Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2015. Том 56, № 3

УДК 512.563

АВТОУСТОЙЧИВОСТЬ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР С ВЫДЕЛЕННЫМИ ИДЕАЛАМИ ОТНОСИТЕЛЬНО СИЛЬНЫХ КОНСТРУКТИВИЗАЦИЙ

Д. Е. Пальчунов,
А. В. Трофимов, А. И. Турко

Аннотация. Изучаются булевы алгебры с выделенными идеалами (I-алгебры). Доказано, что локальная I-алгебра автоустойчива относительно сильных конструктивизаций тогда и только тогда, когда она является прямым произведением конечного числа простых моделей. Приведено описание полных формул элементарных теорий локальных булевых алгебр с выделенными идеалами и конечным набором выделенных констант. Показано, что любая счетно-категоричная I-алгебра, конечно аксиоматизируемая I-алгебра, суператомная булева алгебра с одним выделенным идеалом и любая булева алгебра автоустойчивы относительно сильных конструктивизаций тогда и только тогда, когда они являются произведением конечного числа простых моделей.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.301

Ключевые слова: булева алгебра, булева алгебра с выделенными идеалами, I-алгебра, автоустойчивость, сильная конструктивизируемость, автоустойчивость относительно сильных конструктивизаций, простая модель.

Посвящается Юрию Леонидовичу Ершову

1. Введение

В работе А. И. Мальцева [1] положено начало систематическому изучению конструктивных моделей. А. И. Мальцев [2] ввел понятия автоэквивалентных конструктивизаций и автоустойчивой модели. Ю. Л. Ершовым [3] для построения теории конструктивных моделей было введено понятие сильно конструктивной модели, эквивалентное понятие разрешимой модели предложено Морли [4].

В теории конструктивных моделей существуют две базисные проблемы: во-первых, проблема существования конструктивных представлений, во-вторых, вопросы автоустойчивости и алгоритмической размерности моделей.

Вопросы автоустойчивости и алгоритмической размерности восходят к работе А. И. Мальцева [1]. Исследованию этих проблем в настоящее время посвящено большое количество работ многих авторов как у нас в стране, так и за рубежом [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14–07–00903а) и Минобрнауки России (задание № 2014/139 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности в рамках базовой части).

Для случая автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций А. Т. Нуртазиным [6] был получен критерий автоустойчивости, который показывает тесную взаимосвязь проблемы автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций с простотой модели.

В данной работе изучаются булевы алгебры с выделенными идеалами. В дальнейшем такие алгебры будем называть I-*алгебрами*. Исследования алгоритмических и теоретико-модельных свойств I-алгебр начаты Ю. Л. Ершовым [7].

Д. Е. Пальчуновым [8, 9] было получено описание счетно-категоричных и конечно аксиоматизируемых булевых алгебр с выделенными идеалами, изучены простые и счетно-насыщенные модели [10, 11]. В частности, показано, что счетно-категоричные I-алгебры конечно аксиоматизируемы, а конечно аксиоматизируемые I-алгебры, в свою очередь, локальны. Был получен критерий того, что локальная I-алгебра является простой моделью.

Настоящая работа посвящена описанию I-алгебр, автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций. Изучение автоустойчивых моделей в различных классах алгебраических систем является одной из центральных задач теории вычислимости. Автоустойчивые булевы алгебры изучались С. С. Гончаровым, В. Д. Дзгоевым [12] и Ларошем [13]. Описание I-алгебр, автоустойчивых относительно конструктивизаций, для случая одного выделенного идеала было получено Н. Т. Когабаевым [14], а для случая произвольного конечного числа выделенных идеалов — П. Е. Алаевым [15].

Возникает вполне естественный вопрос описания автоустойчивых I-алгебр относительно сильных конструктивизаций. В настоящей работе показано, что счетная локальная I-алгебра автоустойчива относительно сильных конструктивизаций тогда и только тогда, когда она является прямым произведением конечного числа I-алгебр, являющихся простыми моделями. Приведено описание полных формул элементарных теорий локальных булевых алгебр с выделенными идеалами и конечным набором выделенных констант. Такие формулы являются атомами булевых алгебр формул с n свободными переменными элементарных теорий локальных I-алгебр и локальных I-алгебр с выделенными константами. В качестве следствия доказано, что любая счетно-категоричная I-алгебра, счетная конечно аксиоматизируемая I-алгебра, суператомная булева алгебра с одним выделенным идеалом, счетная булева алгебра автоустойчива относительно сильных конструктивизаций тогда и только тогда, когда она представима в виде прямого произведения конечного числа простых моделей.

2. Предварительные сведения

Определение 1. Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется *полной формулой в теории* T, если она совместна с T и для любой формулы $\psi(x_1, \dots, x_n)$ выполнено $T \vdash (\varphi \to \psi)$ или $T \vdash (\varphi \to \neg\psi)$.

Определение 2. $\mathfrak{A} = \langle A, \cup, \cap, C, 0, 1\rangle$ называется *вычислимой булевой алгеброй*, если

1) $A \subset \omega$ — вычислимое множество,
2) $\cap, \cup : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ — вычислимые функции,
3) $C : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — вычислимая функция.

Определение 3. $\mathfrak{A}$ называется *разрешимой*, если множество кортежей $\{\langle s, l_1, l_2, \dots, l_k\rangle \in \mathbb{N} \mid s$ — номер формулы $\Phi(x_1, \dots, x_k)$ и $\mathfrak{A} \models \Phi(l_1, \dots, l_k)\}$ вычислимо.

Определение 4. $\mathfrak{A}$ называется *вычислимо категоричной относительно разрешимых представлений* тогда и только тогда, когда для любых разрешимых $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ таких, что $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \cong \mathfrak{C}$, существует вычислимый изоморфизм $f : \mathfrak{B} \xrightarrow[\text{на}]{1-1} \mathfrak{C}$.

Так как понятия вычислимой и конструктивной булевой алгебры, разрешимой и сильно конструктивной булевой алгебры и соответственно вычислимо категоричной и автоустойчивой (относительно сильных конструктивизаций) булевой алгебры эквивалентны, мы не будем их различать.

Обозначим через $\sigma = (\cup, \cap, C, 0, 1)$ сигнатуру булевых алгебр. Зафиксируем $\lambda \in \mathbb{N}$ и будем рассматривать булевы алгебры с выделенными идеалами (I-алгебры) в сигнатуре $\sigma_\lambda = (\cup, \cap, C, 0, 1, I_1, \dots, I_\lambda)$, где $I_1, \dots, I_\lambda$ — символы унарных предикатов. Обозначим через T_λ теорию класса булевых алгебр с λ выделенными идеалами (I-алгебр). Теория T_λ класса I-алгебр порождается аксиомами булевых алгебр и предложениями о том, что предикаты $I_1, \dots, I_\lambda$ выделяют идеалы.

Обозначим через $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ элементарную теорию модели $\mathfrak{A}$, т. е. множество всех предложений, истинных на $\mathfrak{A}$. Выражение $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ означает, что $\mathrm{Th}\,\mathfrak{A} = \mathrm{Th}\,\mathfrak{B}$.

Если $\mathfrak{A}$ — I-алгебра и $a \in |\mathfrak{A}|$, то полагаем $\hat{a} \rightleftharpoons \{b \in \mathfrak{A} \mid b \leq a\}$ и $(a) \rightleftharpoons \langle \hat{a}, \cup, \cap, C^a, 0, 1^a, I_1^a, \dots, I_\lambda^a \rangle$, где $C^a(b) \rightleftharpoons a \backslash b, 1^a \rightleftharpoons a$ и $I_l^a = I_l \cap \hat{a}$ для всех $l \leq \lambda$. Несложно заметить, что $\mathfrak{A} \cong (a) \times (C(a))$. Для удобства будем считать, что $\mathfrak{A} = (a) \times (C(a))$. Если $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{L}$, то для удобства полагаем, что $1^{\mathfrak{B}}, 1^{\mathfrak{L}} \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} = (1^{\mathfrak{B}})$ и $\mathfrak{L} = (1^{\mathfrak{L}})$. Для I-алгебры $\mathfrak{A}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$ полагаем $\bar{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, $\varepsilon = \langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \rangle \in \{0,1\}^n$ и $\bar{a}^\varepsilon = a_1^{\varepsilon_1} \cap \dots \cap a_n^{\varepsilon_n}$, где $a_i^1 = a_i$ и $a_i^0 = C(a_i)$.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры σ_0 полная в теории T той же сигнатуры, если $T \cup \{\varphi(c_1, \dots, c_n)\}$ аксиоматизирует полную теорию сигнатуры $\sigma_0 \cup \{c_1, \dots, c_n\}$, где $c_1, \dots, c_n \notin \sigma_0$.

В [9] введена последовательность формул $V_n^\lambda(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку λ зафиксировано, вместо $V_n^\lambda(x)$ будем писать $V_n(x)$.

Пусть даны формулы $P(x)$ и $Q(x)$ с одной свободной переменной сигнатуры σ_λ. Следуя [9], пишем

$P < Q$, если $T_\lambda \vdash (\forall x)(Q(x) \to (\exists y \leq x) P(y))$;

$P \not< Q$, если $T_\lambda \vdash (\forall x)(Q(x) \to (\forall y \leq x) \neg P(y))$;

$P \ll Q$, если для любого натурального числа $l \in \mathbb{N}$ выполнено

$$T_\lambda \vdash (\forall x)\Big(Q(x) \to (\exists x_1 \dots \exists x_l)\Big(\Big(\bigwedge_{i \leq l} x_i \leq x\Big) \& \Big(\bigwedge_{i \neq j} x_i \cap x_j = 0\Big) \& \Big(\bigwedge_{i \leq l} P(x_i)\Big)\Big)\Big).$$

Формула $P(x)$ называется *сплошной*, если

$$T_\lambda \vdash (\forall x)(P(x) \to (\exists y \leq x)(P(y) \& P(x \setminus y))).$$

Формула $P(x)$ называется *точечной*, если

$$T_\lambda \vdash (\forall x)(P(x) \to (\forall y \leq x)(P(y) \to (\forall z \leq x \setminus y) \neg P(z))).$$

Формула $P(x)$ называется *неисчезающей*, если

$$T_\lambda \vdash (\forall x)(P(x) \to (\forall y \leq x)(P(y) \vee P(x \setminus y))).$$

Предложение [9]. (а) *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ формула $V_n(x)$ неисчезающая.*
(б) *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ формула $V_n(x)$ либо точечная, либо сплошная.*

Предложение [9]. *Для любых натуральных чисел $m < n$ выполнены следующие условия:*
(а) $V_n \not< V_m$,
(б) $V_m \ll V_n$ *либо* $V_m \not< V_n$,
(в) $V_m \ll V_n$ *тогда и только тогда, когда* $V_m < V_n$.

Для каждой I-алгебры $\mathfrak{A}$ и элемента $a \in \mathfrak{A}$ в [9] определена характеристика $r_a : \mathbb{N} \to \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ элемента a следующим образом:
$r_a(n) \rightleftharpoons 0$, если $\mathfrak{A} \models (\forall x \leq a)\neg V_n(x)$;
$r_a(n) \rightleftharpoons 1$, если V_n — сплошная формула и $\mathfrak{A} \models (\exists x \leq a)V_n(x)$;
$r_a(n) \rightleftharpoons m$, если V_n — точечная формула и m — наибольшее число такое, что $\mathfrak{A} \models \Psi_m(a)$, где $\Psi_m(a) \rightleftharpoons (\exists x_1 \ldots \exists x_m \leq a)\big(\mathop{\&}\limits_{i \neq j}(x_i \cap x_j = 0) \& \mathop{\&}\limits_{i \leq m} V_n(x_i)\big)$;
$r_a(n) = \infty$, если V_n точечная и $\mathfrak{A} \models \Psi_m(a)$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

Для I-алгебры $\mathfrak{A}$ введем следующие обозначения: $r_{\mathfrak{A}} \rightleftharpoons r_{1^{\mathfrak{A}}}$; $M(a) \rightleftharpoons \{k \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A} \models (\exists x \leq a)V_k(x)\}$; $M(r_a) \rightleftharpoons M(a)$; $M(\mathfrak{A}) \rightleftharpoons M(r_{\mathfrak{A}}) \rightleftharpoons M(1^{\mathfrak{A}})$; $N(a) \rightleftharpoons \{n \in M(a) \mid V_n \not< V_m$ для любого $m \in M(a)$, $m \neq n\}$; $N(r_a) \rightleftharpoons N(a)$ $N(\mathfrak{A}) \rightleftharpoons N(r_{\mathfrak{A}}) \rightleftharpoons N(1^{\mathfrak{A}})$.

Определение 5. Функция $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ называется *естественной*, если выполнены следующие условия:
а) если V_n — сплошная формула, то $r(n) \leq 1$;
б) если $V_m < V_n$ и $r(n) \neq 0$, то $r(m) \neq 0$, причем если формула $V_m(x)$ точечная, то $r(m) = \infty$.

Теорема [9]. *Функция r естественна тогда и только тогда, когда $r = r_{\mathfrak{A}}$ для некоторой I-алгебры $\mathfrak{A}$.*

Определение 6 [9]. I-алгебра $\mathfrak{A}$ называется *локальной*, если множество $M(\mathfrak{A})$ конечно. Элемент $a \in \mathfrak{A}$ называется *локальным*, если $M(a)$ конечно.

Естественная функция $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ называется *локальной*, если множество $M(r) \rightleftharpoons \{l \in \mathbb{N} \mid r(l) \neq 0\}$ конечно. Обозначим $N(r) \rightleftharpoons \{n \in M(r) \mid V_n \not< V_m$ для любого $m \in M(r)$, $m \neq n\}$.

Предложение [9]. *Утверждение $r_x(k) = l$ записывается одной формулой от свободной переменной x.*

Предложение [9]. *Пусть r — локальная естественная функция.*
(а) *Если для любого $n \in N(r)$ выполнено $r(n) < \infty$, то утверждение $r_x = r$ записывается одной формулой $\varphi(x)$.*
(б) *Утверждение $r_x = r$ записывается перечислимым множеством формул $\{\varphi_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$.*
(в) *Утверждение $N(x) = N(r)$ записывается одной формулой $\psi(x)$.*

Теорема [9]. *Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — произвольные локальные I-алгебры, то $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $r_{\mathfrak{A}} = r_{\mathfrak{B}}$.*

В [10] получено достаточное условие простоты модели теории I-алгебр.

Теорема [10]. *Пусть для любого элемента $b \in \mathfrak{A}$ счетной I-алгебры $\mathfrak{A}$ выполнены следующие условия:*
(а) *если b локальный, то для любого $l \in N(b)$ равенство $r_b(l) = \infty$ влечет $r_{C(b)}(l) < \infty$;*

(б) *если b нелокальный, то его дополнение $C(b)$ локально.*
Тогда $\mathfrak{A}$ — простая модель.

Замечание [10]. Условие (а) теоремы является необходимым условием, а именно если I-алгебра $\mathfrak{A}$ — простая модель, $b \in \mathfrak{A}$, $l \in N(b)$, $r_b(l) = \infty$ и b локальный, то $r_{C(b)}(l) < \infty$.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{A}$ — локальная счетная I-алгебра. Тогда $\mathfrak{A}$ — простая модель в том и только том случае, когда для каждого $b \in \mathfrak{A}$ и любого $l \in N(b)$ если $r_b(l) = \infty$, то $r_{C(b)}(l) < \infty$.*

Теорема [10]. *Теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ произвольной локальной I-алгебры $\mathfrak{A}$ имеет простую модель.*

Следующее утверждение дает необходимые и достаточные условия существования неавтоэквивалентных сильных конструктивизаций данной модели $\mathfrak{A}$.

Теорема (критерий Нуртазина) [6]. *Пусть $(\mathfrak{A}, \mu)$ — сильно конструктивная модель полной теории T. Тогда эквивалентны следующие условия:*

(1) *$\mathfrak{A}$ не автоустойчива относительно сильных конструктивизаций;*

(2) *не существует конечной последовательности $\bar{a}$ элементов модели $\mathfrak{A}$ такой, что $\mathfrak{A}$ — простая модель теории $T(a)$ и семейство множеств атомов булевых алгебр $F_n(T(\bar{a}))$ вычислимо;*

(3) *существует сильно вычислимое семейство моделей $(\mathfrak{A}, \mu_0), \dots, (\mathfrak{A}, \mu_s)$, $\dots$, члены которого попарно элементарно конструктивно не вложимы друг в друга;*

(4) *не существует сильно вычислимого семейства моделей сигнатуры Σ, содержащего все сильные конструктивизации модели $\mathfrak{A}$.*

В дальнейшем потребуется эквивалентность пп. (1) и (2). Приведем более подходящую для наших целей формулировку этого утверждения.

Теорема [16]. *Разрешимая модель $\mathfrak{A}$ автоустойчива относительно сильных конструктивизаций тогда и только тогда, когда для некоторого набора констант $c_1, \dots, c_l$ модель $(\mathfrak{A}, c_1, \dots, c_l)$ простая и множества $\{\varphi(x_1, \dots, x_n) \mid \varphi(x_1, \dots, x_n)$ — полная формула теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}, c_1, \dots, c_l)\}$ вычислимо перечислимы равномерно по $n \in \omega$.*

3. Автоустойчивость булевых алгебр с выделенными идеалами относительно сильных конструктивизаций

Определение 7. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная I-алгебра и $a \in \mathfrak{A}$. Элементы $a_1, \dots, a_n$ называются *разбиением* элемента a, если $a = a_1 \cup \dots \cup a_n$, $a_i \cap a_j = 0$ при $i \neq j$ и $a_i \neq 0$ для всех $i \leq n$.

Замечание 1. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}$ — произвольные I-алгебры, $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$, $c_1, \dots, c_n \in \mathfrak{C}$, $k = 2^n$, $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\} = \{0,1\}^n$, $b_i = \bar{a}^{\varepsilon_i}$, $d_i = \bar{c}^{\varepsilon_i}$, $i \leq k$. При этих условиях $f : (\mathfrak{A}, \bar{a}) \to (\mathfrak{C}, \bar{c})$ — элементарное вложение тогда и только тогда, когда $f : (\mathfrak{A}, \bar{b}) \to (\mathfrak{C}, \bar{d})$ — элементарное вложение.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $f : (\mathfrak{A}, \bar{a}) \to (\mathfrak{C}, \bar{c})$ — элементарное вложение. Рассмотрим формулу $\varphi(x_1, \dots, x_m)$ и $u_1, \dots, u_m \in \mathfrak{A}$. Предположим, что $(\mathfrak{A}, \bar{b}) \models \varphi(\bar{u})$. Рассмотрим формулу φ^1, полученную из φ заменой всех вхождений констант b_i соответствующим термом $\bar{a}^{\varepsilon_i}$. Индукцией по длине формулы непосредственно доказывается, что $(\mathfrak{A}, \bar{b}) \models \varphi(\bar{u}) \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \bar{a}) \models \varphi^1(\bar{u})$.

Обозначим $f(\bar{u}) = (f(u_1), \dots, f(u_m))$. Так как f — элементарное вложение, $(\mathfrak{C}, \bar{c}) \models \varphi^1(f(\bar{u}))$. Следовательно, $(\mathfrak{C}, \bar{d}) \models \varphi(f(\bar{u}))$.

($\Leftarrow$) Доказательство аналогично, поскольку константы a_i, $i \leq n$, тоже термально выражаются через $b_1, \dots, b_k$.

Замечание 1 доказано.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная I-алгебра, $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$ и $b_i = \bar{a}^{\varepsilon_i}$, $i \leq 2^n$.*

$(\mathfrak{A}, \bar{a})$ — простая модель тогда и только тогда, когда $(\mathfrak{A}, \bar{b})$ — простая модель.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Предположим, что $(\mathfrak{A}, \bar{a})$ — простая модель. Докажем, что $(\mathfrak{A}, \bar{b})$ — простая модель. В самом деле, пусть $(\mathfrak{C}, \bar{d}) \equiv (\mathfrak{A}, \bar{b})$. Рассмотрим $c_1, \dots, c_n \in \mathfrak{C}$ такие, что $d_i = \bar{c}^{\varepsilon_i}$ для $\varepsilon_i \in \{0,1\}^n$, а именно пусть элементы $c_1, \dots, c_n$ термально выражаются через $d_1, \dots, d_{2^n}$ точно так же, как элементы $a_1, \dots, a_n$ через $b_1, \dots, b_{2^n}$. Индукцией по длине формул доказывается, что в модели $(\mathfrak{A}, \bar{a})$ истинны те же самые предложения, что и в модели $(\mathfrak{C}, \bar{c})$. Следовательно, $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv (\mathfrak{C}, \bar{c})$. Тогда существует элементарное вложение $f : (\mathfrak{A}, \bar{a}) \to (\mathfrak{C}, \bar{c})$. В силу доказанного замечания $f : (\mathfrak{A}, \bar{b}) \to (\mathfrak{C}, \bar{d})$ также элементарное вложение. Следовательно, $(\mathfrak{A}, \bar{b})$ — простая модель.

($\Leftarrow$) Доказывается аналогично.

Следствие 1 доказано.

Определение 8. Пусть $f : (\mathfrak{A}, \bar{a}) \to (\mathfrak{B}, \bar{b})$ — изоморфное вложение, $c \in \mathfrak{A}$ и $d = f(c)$. Тогда отображение $f^c : (c) \to (d)$ такое, что $f^c(e) = f(e)$ для всех $e \in (c)$, назовем *отображением, индуцированным f на алгебре (c)*.

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — произвольные I-алгебры, $a_1, \dots, a_n$ — разбиение $1^{\mathfrak{A}}$ и $b_1, \dots, b_n$ — разбиение $1^{\mathfrak{B}}$. Тогда $f : (\mathfrak{A}, \bar{a}) \to (\mathfrak{B}, \bar{b})$ — элементарное вложение в том и только том случае, когда для каждого $i \leq n$ отображение $f^{a_i} : (a_i) \to (b_i)$ — элементарное вложение I-алгебр.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $f : (\mathfrak{A}, \bar{a}) \to (\mathfrak{B}, \bar{b})$ — элементарное вложение. Для $d_1, \dots, d_k \in \mathfrak{A}$ обозначим $f(\bar{d}) = (f(d_1), \dots, f(d_k))$. Зафиксируем $i \leq n$. Докажем, что $(a_i) \models \varphi(\bar{d}) \Leftrightarrow (b_i) \models \varphi(f(\bar{d}))$ для любой формулы φ сигнатуры I-алгебр σ_λ и любых $d_1, \dots, d_n \in (a_i)$. Рассмотрим формулу φ_1 сигнатуры $\sigma_\lambda \cup \{c_1, \dots, c_n\}$, полученную из формулы φ заменой всех подформул вида $\forall y \psi$ и $\exists y \psi$ формулами $\forall y((y \leq c_i) \to \psi)$ и $\exists y((y \leq c_i) \& \psi)$ соответственно. Тогда для формулы

$$\varphi^*(\bar{x}) = \varphi_1(\bar{x}) \mathop{\&}_{x_j \in FV(\varphi_1)} (x_j \leq c_i),$$

где $FV(\varphi)$ — множество свободных переменных формулы φ, выполнено

$$(a_i) \models \varphi(\bar{d}) \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \bar{a}) \models \varphi^*(\bar{d}) \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, \bar{b}) \models \varphi^*(f(\bar{d})) \Leftrightarrow (b_i) \models \varphi(f(\bar{d})).$$

Таким образом, $(a_i) \models \varphi(\bar{d}) \Leftrightarrow (b_i) \models \varphi(f(\bar{d}))$. Следовательно, f^{a_i} — элементарное вложение.

($\Leftarrow$) Пусть $f^{a_i} : (a_i) \to (b_i)$ — элементарное вложение. Заметим, что для отображения $f : (\mathfrak{A}, \bar{a}) \to (\mathfrak{B}, \bar{b})$ и произвольного $d \in \mathfrak{A}$ выполнено $f(d) = f^{a_1}(d \cap a_1) \cup \dots \cup f^{a_n}(d \cap a_n)$. Константы $c_1, \dots, c_n$ на прямых сомножителях $(a_1), \dots, (a_n)$ алгебраической системы $(\mathfrak{A}, \bar{a})$ и на прямых сомножителях $(b_1), \dots, (b_n)$ алгебраической системы $(\mathfrak{B}, \bar{b})$ означиваются следующим образом:

на (a_i) $c_i = 1$ и $c_j = 0$ при $i \neq j$;

на (b_i) $c_i = 1$ и $c_j = 0$ при $i \neq j$.

При таком означивании $(\mathfrak{A}, \bar{a}) = ((a_1), \bar{c}) \times \dots \times ((a_n), \bar{c})$ и $(\mathfrak{B}, \bar{b}) = ((b_1), \bar{c}) \times \dots \times ((b_n), \bar{c})$. Поскольку f^{a_i} осуществляет элементарное вложение $(a_i) \to (b_i)$, очевидно, f^{a_i} осуществляет элементарное вложение $((a_i), \bar{c}) \to ((b_i), \bar{c})$. Можно считать, что $f = f^{a_1} \times \dots \times f^{a_n} : ((a_1), \bar{c}) \times \dots \times ((a_n), \bar{c}) \to ((b_1), \bar{c}) \times \dots \times ((b_n), \bar{c})$. Тогда f является элементарным вложением $((a_1), \bar{c}) \times \dots \times ((a_n), \bar{c}) \to ((b_1), \bar{c}) \times \dots \times ((b_n), \bar{c})$, т. е. f — элементарное вложение $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \to (\mathfrak{B}, \bar{b})$.

Предложение 1 доказано.

Определение 9. Модель $\mathfrak{A}$ называется *почти простой*, если для некоторых $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$ модель $(\mathfrak{A}, \bar{a})$ — простая модель в обогащенной константами сигнатуре.

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная счетная I-алгебра. Тогда $\mathfrak{A}$ — почти простая модель в том и только том случае, когда $\mathfrak{A}$ разлагается в конечное прямое произведение простых моделей.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $\mathfrak{A}$ — почти простая модель. Тогда найдутся $d_1, \dots, d_n \in \mathfrak{A}$ такие, что $(\mathfrak{A}, \bar{d})$ — простая модель. Пусть $a_i = \bar{d}^{\varepsilon_i}$, $\varepsilon_i \in \{0,1\}^n$, $i \le 2^n$. Тогда в силу следствия 1 $(\mathfrak{A}, \bar{a})$ — простая модель. Обозначим $k = 2^n$. Будем считать, что $(\mathfrak{A}, \bar{a}) = ((a_1), \bar{c_1}) \times \dots \times ((a_k), \bar{c_k})$, где $\bar{c_i} = \langle c_{i1}, \dots, c_{ik} \rangle$, $k = 2^n$ и $c_{ij} = a_i$ при $i = j$ и $c_{ij} = 0$ иначе. Следовательно, $\mathfrak{A} = (a_1) \times \dots \times (a_k)$. Докажем, что (a_i) — простая модель. Пусть счетные модели $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_k$ таковы, что $(\mathfrak{B}_1) \equiv (a_1), \dots, \mathfrak{B}_k \equiv (a_k)$. Тогда $(\mathfrak{B}_1 \times \dots \times \mathfrak{B}_k, c_1, \dots, c_k) \equiv (\mathfrak{A}, \bar{a})$, где константа c_i интерпретируется как $1^{\mathfrak{B}_i}$. Так как $(\mathfrak{A}, \bar{a})$ — простая модель, существует элементарное вложение $f : (\mathfrak{A}, \bar{a}) \to (\mathfrak{B}_1 \times \dots \times \mathfrak{B}_k, \bar{c})$. Стало быть, в силу предложения 1 существуют элементарные вложения $f_i : (a_i) \to \mathfrak{B}_i$. Следовательно, (a_i) — простая модель для любого $i \le k$.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \dots \times \mathfrak{A}_n$, причем $\mathfrak{A}_i$ — простая модель для любого $i \le n$. Докажем, что $(\mathfrak{A}, \bar{a})$ — простая модель, где $a_i = 1^{a_i}$ — единица алгебры $\mathfrak{A}_i$. В самом деле, пусть счетная модель $(\mathfrak{B}, \bar{b})$ элементарно эквивалентна $(\mathfrak{A}, \bar{a})$. Тогда $(\mathfrak{B}, \bar{b}) = ((b_1), \bar{c_1}) \times \dots \times ((b_k), \bar{c_k})$, где $c_{ij} = b_i$ при $i = j$ и $c_{ij} = 0$ иначе. Следовательно, $(\mathfrak{B}) \equiv (b_1) \times \dots \times (b_k)$ и $(b_i) \equiv (a_i)$. Так как (a_i) простая, существует отображение $f^{a_i} : (a_i) \to (b_i)$, которое является элементарным вложением. Стало быть, существует элементарное вложение $f : (\mathfrak{A}, \bar{a}) \to (\mathfrak{B}, \bar{b})$, определенное, как в пункте ($\Leftarrow$) доказательства предложения 1. Предложение 2 доказано.

Следствие 2. *Теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}, \bar{a})$ произвольной локальной I-алгебры $\mathfrak{A}$ с выделенными константами $a_1, \dots, a_n$ имеет простую модель.*

Доказательство. Теория любой локальной I-алгебры $(\bar{a}^{\varepsilon_i})$ имеет простую модель; произведение простых моделей теорий $\mathrm{Th}(\bar{a}^{\varepsilon_i})$ является почти простой моделью в сигнатуре σ_λ без констант и, следовательно, простой в сигнатуре, обогащенной константами $a_1, \dots, a_n$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — локальная I-алгебра и $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$. Тогда $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{b})$ в том и только том случае, когда $r_{\bar{a}^\varepsilon} = r_{\bar{b}^\varepsilon}$ для всех $\varepsilon \in \{0,1\}^n$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Утверждение $r_{\bar{a}^{\varepsilon_i}}(k) = l$, где $k \in \mathbb{N}$ и $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, записывается некоторым семейством формул. Значит, из элементарной эквивалентности $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{b})$ следует $r_{\bar{a}^\varepsilon} = r_{\bar{b}^\varepsilon}$.

($\Leftarrow$) Пусть $r_{\bar{a}^\varepsilon} = r_{\bar{b}^\varepsilon}$ для всех $\varepsilon \in \{0,1\}^n$. Пусть $\{0,1\}^n = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2^n}\}$. Обозначим $\bar{a}^{\bar{\varepsilon}} = \langle \bar{a}^{\varepsilon_1}, \dots, \bar{a}^{\varepsilon_{2^n}} \rangle$. Заметим, что $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{b}) \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \bar{a}^{\bar{\varepsilon}}) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{b}^{\bar{\varepsilon}})$. Будем считать, что $(\mathfrak{A}, \bar{a}^{\bar{\varepsilon}}) = ((\bar{a}^{\varepsilon_1}), \bar{c_1}) \times \dots \times ((\bar{a}^{\varepsilon_n}), \bar{c_n})$, где $\bar{c_i} = \langle c_{i1}, \dots, c_{i2^n} \rangle$, $c_{ij} =$

$\bar{a}^{\varepsilon_i}$ при $i=j$ и $c_{ij}=0$ иначе. Аналогично $(\mathfrak{B},\bar{b}^{\bar{\varepsilon}})=((\bar{b}^{\varepsilon_1}),\bar{d}_1)\times\dots\times((\bar{b}^{\varepsilon_n}),\bar{d}_n)$, где $\bar{d}_i=\langle d_{i1},\dots,d_{i2^n}\rangle$, $d_{ij}=\bar{b}^{\varepsilon_i}$ при $i=j$ и $d_{ij}=0$ при $i\neq j$. В силу критерия элементарной эквивалентности локальных I-алгебр, приведенного ранее, из $r_{\bar{a}^{\varepsilon_i}}=r_{\bar{b}^{\varepsilon_i}}$ следует $(\bar{a}^{\varepsilon_i})\equiv(\bar{b}^{\varepsilon_i})$. Легко видеть, что тогда $((a^{\varepsilon_i}),\bar{c}_i)\equiv((b^{\varepsilon_i}),\bar{d}_i)$ для любого $i\leq 2^n$. Из этого вытекает $(\mathfrak{A},\bar{a}^{\bar{\varepsilon}})\equiv(\mathfrak{B},\bar{b}^{\bar{\varepsilon}})$. Поэтому $(\mathfrak{A},\bar{a})\equiv(\mathfrak{B},\bar{b})$.

Теорема 1 доказана.

Следствие 3. *Теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{A},\bar{a})$ *произвольной локальной* I*-алгебры* $\mathfrak{A}$ *с выделенными константами* $a_1,\dots,a_n$ *разрешима.*

Доказательство. Теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{A},\bar{a})$ имеет перечислимую систему аксиом, и она полна. Следовательно, $\mathrm{Th}(\mathfrak{A},\bar{a})$ разрешима.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— произвольная* I*-алгебра. Тогда если* $\mathfrak{A}$ *автоустойчива относительно сильных конструктивизаций, то она разлагается в конечное прямое произведение простых моделей.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ автоустойчива относительно сильных конструктивизаций. Тогда в силу критерия Нуртазина [6] она почти простая модель. Следовательно, в силу предложения 2 $\mathfrak{A}$ разлагается в прямое произведение конечного числа простых моделей.

Теорема 2 доказана.

Рассмотрим множество формул

$$AT_n=\Big\{\varphi(x_1,\dots,x_n)=\mathop{\&}_{i\leq 2^n}\Big(\mathop{\&}_{\substack{k\in N(r_i),\\ r_i(k)<\infty}}(r_{t_i(\bar{x})}(k)=r_i(k))\&(N(t_i(\bar{x}))=N(r_i))\Big)$$

$$\mid r_1,\dots,r_{2^n} \text{ — локальные естественные функции, причем}$$

$$\forall k\in\mathbb{N}\ \forall i\leq 2^n \text{ если } k\in N(r_i) \text{ и } r_i(k)=\infty,\ \text{то } \forall j\neq i,\ j\leq 2^n,\ r_j(k)<\infty\Big\},$$

где $n\in\mathbb{N}$, $\{0,1\}^n=\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{2^n}\}$ и $t_i(\bar{x})\rightleftharpoons\bar{x}^{\varepsilon_i}$, $i\leq 2^n$.

Из [9] вытекает

Замечание 2. Множества формул AT_n перечислимы равномерно по n.

Напомним, что каждая элементарная теория локальной I-алгебры имеет простую модель.

Предложение 3. *Множество* AT_n *является множеством всех атомов булевых алгебр* $F_n(\mathrm{Th}(\mathfrak{A}))$ *локальных* I*-алгебр* $\mathfrak{A}$*, а именно*

(а) *для любой локальной* I*-алгебры* $\mathfrak{A}$*, являющейся простой моделью, любого* $n\in\mathbb{N}$ *и любых* $a_1,\dots,a_n\in\mathfrak{A}$ *найдется формула* $\varphi(x_1,\dots,x_n)\in AT_n$ *такая, что* $\mathfrak{A}\models\varphi(a_1,\dots,a_n)$ *и* $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ *– полная формула в теории* $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$;

(б) *для любой* $\varphi(x_1,\dots,x_n)\in AT_n$ *найдутся локальная* I*-алгебра* $\mathfrak{A}$*, являющаяся простой моделью, и элементы* $a_1,\dots,a_n\in\mathfrak{A}$ *такие, что* $\mathfrak{A}\models\varphi(a_1,\dots,a_n)$ *и* $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ *— полная формула в теории* $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$.

Доказательство. (а) Пусть $n\in\mathbb{N}$, $a_1,\dots,a_n\in\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}$ — локальная I-алгебра, являющаяся простой моделью. Пусть $b_i=\bar{a}^{\varepsilon_i}$, $\varepsilon_i\in\{0,1\}^n$. Обозначим $r_i=r_{b_i}$. Тогда $r_1,\dots,r_{2^n}$ — локальные естественные функции, причем, так как $\mathfrak{A}$ является простой моделью, в силу критерия простоты модели для любых $k\in\mathbb{N}$ и $i\leq 2^n$ если $k\in N(r_i)$ и $r_i(k)=\infty$, то для любого $j\neq i$, $j\leq 2^n$, выполнено $r_j(k) < \infty$. Стало быть,

$$\varphi(\bar{x}) = \mathop{\&}_{i \le 2^n} \Big(\mathop{\&}_{\substack{k \in N(r_i), \\ r_i(k) < \infty}} (r_{t_i(\bar{x})}(k) = r_i(k)) \& (N(t_i(\bar{x})) = N(r_i)) \Big) \in AT_n.$$

Из построения формулы $\varphi(\bar{x})$ следует, что $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$. Докажем, что $\varphi(\bar{x})$ является полной формулой в теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. Пусть $\psi(\bar{x})$ — произвольная формула. Докажем, что $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \vdash (\varphi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))$ или $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \vdash (\varphi(\bar{x}) \to \neg\psi(\bar{x}))$. Без ограничения общности можно считать, что $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a})$. Выберем произвольную $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ и $u_1, \dots, u_n \in \mathfrak{B}$ такие, что $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{u})$. Обозначим, $v_i = \bar{u}^{\varepsilon_i}, \varepsilon_i \in \{0,1\}^n$. Докажем, что $(b_i) \equiv (v_i)$ для всех $i \le 2^n$. Так как $\mathfrak{A}$ — локальная I-алгебра, $\mathfrak{B}$ и (v_i) также являются локальными I-алгебрами. Следовательно, в силу критерия элементарной эквивалентности локальных I-алгебр [9] достаточно доказать, что элементарные характеристики (b_i) и (v_i) равны. В самом деле, если $r_{b_i}(k) < \infty$, то ввиду $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{u})$ заключаем, что $r_{v_i}(k) = r_{b_i}(k)$.

Если $r_{b_i}(k) = \infty$ и $k \in N(b_i)$, то в силу того, что $\mathfrak{A}$ — простая модель, получаем $r_{b_j}(k) < \infty$ для всех $j \ne i$. Следовательно, $r_{v_j}(k) = r_{b_j}(k)$ при $j \ne i$ и $r_{\mathfrak{A}}(k) = \infty$. Так как $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, то $r_{\mathfrak{B}}(k) = \infty$. Учитывая то, что $r_{v_j}(k) < \infty$ при $j \ne i$, заключаем, что $r_{v_i}(k) = \infty$. Аналогично доказывается, что если $r_{v_i}(k) = \infty$ и $k \in N(v_i)$, то $r_{b_i}(k) = \infty$. Таким образом, характеристики равны, т. е. $r_{v_i} = r_{b_i}$. Значит, $(v_i) \equiv (b_i)$ для всех $i \le 2^n$. Отсюда следует, что $(\mathfrak{A}, \bar{b}) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{v})$. Стало быть, поскольку $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a})$, $\mathfrak{B} \models \psi(\bar{u})$. Так как модель $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ и элементы $u_1, \dots, u_n \in \mathfrak{B}$ выбраны произвольно, $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \vdash (\varphi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))$. Следовательно, $\varphi(\bar{x})$ — полная формула относительно $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$, поэтому класс эквивалентности $[\varphi(\bar{x})]$ является атомом в булевой алгебре $F_n(\mathrm{Th}(\mathfrak{A}))$.

(б) Пусть $\varphi(\bar{x}) \in AT_n$ и $r_1, \dots, r_{2^n}$ — естественные локальные функции из определения формулы $\varphi(\bar{x})$, удовлетворяющие условию: $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall i \le 2^n$ если $k \in N(r_i)$ и $r_i(k) = \infty$, то $r_j(k) < \infty$ для всех $j \ne i$, $j \le 2^n$.

Обозначим через $\mathfrak{A}_i$ локальную I-алгебру, являющуюся простой моделью, для которой $r_{\mathfrak{A}_i} = r_i$. Докажем, что алгебра $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \dots \times \mathfrak{A}_{2^n}$ — простая модель. Для каждого числа $i \le 2^n$ через a_i обозначим единицу алгебры $\mathfrak{A}_i$, т. е. кортеж, у которого на i-м месте стоит 1, а на остальных местах — 0. Рассмотрим элемент $b \in \mathfrak{A}$ и число l такие, что $r_b(l) = \infty$ и $l \in N(b)$. Пусть $b_i = b \cap a_i$ для всех $i \le 2^n$. Тогда для некоторого числа $j \le 2^n$ выполнено, что $r_{b_j}(l) = \infty$, значит, $l \in N(b_j)$. Так как $\mathfrak{A}_j$ — простая модель, то $r_{a_j \setminus b_j}(l) < \infty$. Следовательно, $l \in N(a_j)$. Последнее влечет $r_{a_i}(l) < \infty$ при $i \ne j$, $i \le 2^n$. Легко видеть, что тогда $r_{c(b)}(l) < \infty$. Стало быть, $\mathfrak{A}$ — простая модель. Кроме того, формула $\varphi(\bar{x})$ реализуется на $\mathfrak{A}$. Аналогично п. (а) доказывается, что $\varphi(\bar{x})$ полная в $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$.

Предложение 3 доказано.

Пусть $\sigma_\lambda^c = \langle \cup, \cap, C, 0, 1, I_1, \dots, I_\lambda, c_1, \dots, c_l \rangle$ и $n \in \mathbb{N}$. Определим следующее множество формул сигнатуры σ_λ^c:

$$AT_n{}^l = \Big\{ \psi(x_1, \dots, x_n) = \mathop{\&}_{i \le 2^l} \varphi_i^*(x_1 \cap \bar{c}^{\varepsilon_i}, \dots, x_n \cap \bar{c}^{\varepsilon_i}) \mid \varphi_i(x_1, \dots, x_n) \in AT_n \Big\},$$

где φ_i^* — релятивизация формулы φ_i относительно замкнутого терма $\bar{c}^{\varepsilon_i}$, а именно φ_i^* получена из φ_i в результате замены всех вхождений подформул вида $\forall x \psi$ на $\forall x((x \le \bar{c}^{\varepsilon_i}) \to \psi)$, $\exists x \psi$ — на $\exists x((x \le \bar{c}^{\varepsilon_i}) \& \psi)$, термов $C(t)$ — на $(\bar{c}^{\varepsilon_i} \setminus t)$ и 1 — на $\bar{c}^{\varepsilon_i}$.

Замечание 3. Множества формул AT_n^l перечислимы равномерно по n.

Предложение 4. *Множество AT_n^l является множеством всех атомов булевых алгебр $F_n(\mathrm{Th}(\mathfrak{A}, \bar{a}))$ локальных I-алгебр $\mathfrak{A}$ с выделенным набором констант $a_1, \ldots, a_l$, а именно*

(а) *для любой локальной I-алгебры $\mathfrak{A}$ с выделенным набором констант $a_1, \ldots, a_l \in \mathfrak{A}$, являющейся простой моделью, и любых $b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{A}$ найдется формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in AT_n^l$ такая, что $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \models \varphi(b_1, \ldots, b_n)$ и $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — полная формула в $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}, \bar{a})$;*

(б) *для любой формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_l) \in AT_n^l$ найдутся локальная I-алгебра $(\mathfrak{A}, \bar{a})$ с выделенным набором констант, являющаяся простой моделью, и набор элементов $b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{A}$ такой, что $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \models \varphi(b)$ и $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — полная формула в теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}, \bar{a})$.*

Доказательство. (а) Пусть $(\mathfrak{A}, \bar{a})$ — простая модель и $d_1, \ldots, d_n \in \mathfrak{A}$. Обозначим $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2^l}\} = \{0, 1\}^l$. Пусть $\varphi_i(\bar{x})$ — полная формула из AT_n, реализующаяся на кортеже $\langle d_1 \cap \bar{a}^{\varepsilon_i}, \ldots, d_n \cap \bar{a}^{\varepsilon_i} \rangle$ в модели $(\bar{a}^{\varepsilon_i})$. Тогда рассмотрим формулу $\varphi(\bar{x}) = \mathop{\&}\limits_{i \leq 2^l} \varphi_i^*(x_1 \cap \bar{c}^{\varepsilon_i}, \ldots, x_n \cap \bar{c}^{\varepsilon_i})$.

По построению $\varphi(\bar{x}) \in AT_n^l$. Так как для каждого $i \leq 2^l$ справедливо $(\bar{a}^{\varepsilon_i}) \models \varphi_i(d_1 \cap \bar{a}^{\varepsilon_i}, \ldots, d_n \cap \bar{a}^{\varepsilon_i})$, для каждого $i \leq 2^l$ выполнено $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \models \varphi_i^*(d_1 \cap \bar{a}^{\varepsilon_i}, \ldots, d_n \cap \bar{a}^{\varepsilon_i})$. Тем самым $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \models \varphi(\bar{d})$. Покажем, что формула $\varphi(\bar{x})$ полная. Рассмотрим формулу $\psi(\bar{x})$ такую, что $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \models \psi(\bar{d})$. Пусть $(\mathfrak{B}, \bar{b}) \equiv (\mathfrak{A}, \bar{a})$, $u_1, \ldots, u_n \in \mathfrak{B}$ и $(\mathfrak{B}, \bar{b}) \models \varphi(\bar{u})$. Тогда $((\bar{a}^{\varepsilon_i}), d_1 \cap \bar{a}^{\varepsilon_i}, \ldots, d_n \cap \bar{a}^{\varepsilon_i}) \equiv ((\bar{b}^{\varepsilon_i}), u_1 \cap \bar{b}^{\varepsilon_i}, \ldots, u_n \cap \bar{b}^{\varepsilon_i})$ для всех $i \leq 2^l$. Следовательно, $(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{d}) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{b}, \bar{u})$. Стало быть, $(\mathfrak{B}, \bar{b}) \models \psi(\bar{u})$. Поэтому $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}, \bar{a}) \vdash (\varphi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))$. Таким образом, формула $\varphi(\bar{x})$ полная в теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}, \bar{a})$.

(б) Доказывается аналогично п. (б) предложения 3.

Следствие 4. *Для любой локальной I-алгебры $\mathfrak{A}$ и произвольных $a_1, \ldots, a_l \in \mathfrak{A}$ множества $\{\varphi(x_1, \ldots, x_n) \mid \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — полная формула теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_l)\}$ вычислимы равномерно по $n \in \omega$.*

Напомним, что теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}, \bar{a})$ произвольной локальной I-алгебры с выделенными константами имеет простую модель.

Предложение 5. *Простая модель теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}, \bar{a})$, где $\mathfrak{A}$ — локальная I-алгебра, сильно конструктивизируема.*

Доказательство. Теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}, \bar{a})$ разрешима, и семейство множеств атомов булевых алгебр $F_n(\mathrm{Th}(\mathfrak{A}, \bar{a}))$ вычислимо. Следовательно, по теореме Гончарова [17] простая модель теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}, \bar{a})$ имеет сильную конструктивизацию.

Следствие 5. *Если локальная I-алгебра является почти простой моделью, то она сильно конструктивизируема.*

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{A}$ — счетная локальная I-алгебра. Тогда $\mathfrak{A}$ автоустойчива относительно сильных конструктивизаций в том и только том случае, когда $\mathfrak{A}$ разлагается в прямое произведение конечного числа простых моделей.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Следует из теоремы 1.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathfrak{A}$ разлагается в прямое произведение конечного числа простых моделей. Тогда для некоторых $a_1, \ldots, a_l \in \mathfrak{A}$ алгебра $(\mathfrak{A}, \bar{a})$ является простой моделью. Значит, $\mathfrak{A}$ сильно конструктивизируема, и множества $\{\varphi(x_1, \ldots, x_n) \mid \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — полная формула теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}, c_1, \ldots, c_l)\}$ вычислимо перечислимы равномерно по $n \in \omega$. Используя критерий автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций [16], получаем требуемое.

Теорема 3 доказана.

Следствие 6. *Если* $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ *счетно-категорична, то счетная* I*-алгебра* $\mathfrak{A}$ *автоустойчива относительно сильных конструктивизаций тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{A}$ *разлагается в прямое произведение конечного числа простых моделей.*

Доказательство. Любая счетно-категоричная I-алгебра локальна в силу классификации счетно-категоричных I-алгебр [9]. Апеллируя к теореме 3, получаем требуемое.

Следствие 7. *Если* $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ *конечно аксиоматизируема, то счетная* I*-алгебра* $\mathfrak{A}$ *автоустойчива относительно сильных конструктивизаций тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{A}$ *разлагается в прямое произведение конечного числа простых моделей.*

Доказательство. В силу классификации конечно аксиоматизируемых I-алгебр [8] любая конечно аксиоматизируемая I-алгебра локальна.

Следствие 8. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— счетная булева алгебра. Тогда* $\mathfrak{A}$ *автоустойчива относительно сильных конструктивизаций тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{A}$ *разлагается в прямое произведение конечного числа простых моделей.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная булева алгебра. Обозначим через $\mathrm{ch}(\mathfrak{A}) = (\mathrm{ch}_1(\mathfrak{A}), \mathrm{ch}_2(\mathfrak{A}), \mathrm{ch}_3(\mathfrak{A}))$ элементарную характеристику булевой алгебры $\mathfrak{A}$. Если $\mathrm{ch}_1(\mathfrak{A}) < \infty$, то $\mathfrak{A}$ является локальной I-алгеброй с нулевым идеалом, и утверждение следует из теоремы 3. Пусть $\mathrm{ch}(\mathfrak{A}) = (\infty, 0, 0)$. Тогда достаточно доказать, что если $\mathfrak{A}$ представима в виде прямого произведения конечного числа простых моделей, то $\mathfrak{A}$ автоустойчива относительно сильных конструктивизаций. Пусть $\sigma_l = \langle \cup, \cap, C, 0, 1, c_1, \dots, c_l \rangle$. Доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы 3, нужно только внести изменения в множество полных формул AT_n для случая булевых алгебр (без выделенных констант). Для случая булевой алгебры характеристики $(\infty, 0, 0)$ рассмотрим формулы вида $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = \underset{j \le 2^n,\, j \ne i}{\&} (\mathrm{ch}(t_i(x)) = (k_i, l_i, m_i))$, где $i \le 2^n, k_i$, $l_i \in \mathbb{N}$, $m_i \in \{0, 1\}$, $t_i(\bar{x}) = \bar{x}^{\varepsilon_i}$ и $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2^n}\} = \{0, 1\}^n$. Формула $\varphi_i(\bar{x})$ означает, что $\mathrm{ch}(\bar{x^{\varepsilon_i}}) = (\infty, 0, 0)$ (это следует из того, что $\mathrm{ch}(\mathfrak{A}) = (\infty, 0, 0)$), а у остальных элементов $\bar{x^{\varepsilon_j}}$ при $j \ne i$ характеристика конечна: $\mathrm{ch}(\bar{x^{\varepsilon_j}}) = (k_i, l_i, m_i)$. Напомним, что при этом $1 = \bar{x}^{\varepsilon_1} \cup \dots \cup \bar{x}^{\varepsilon_{2^n}}$ и элементы $\bar{x^{\varepsilon_j}}$ попарно не пересекаются.

Следствие 8 доказано.

Следствие 9. *Если* $\mathfrak{A}$ *— счетная суператомная булева алгебра с одним выделенным идеалом, то* $\mathfrak{A}$ *автоустойчива относительно сильных конструктивизаций тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{A}$ *разлагается в прямое произведение конечного числа простых моделей.*

Доказательство. Суператомные булевы алгебры с одним выделенным идеалом локальны, кроме одного элементарного типа, имеющего бесконечную характеристику. Для него доказательство аналогично доказательству следствия 8.

Следствие 9 доказано.

Авторы выражают признательность С. С. Гончарову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев А. И.* Конструктивные алгебры. I // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 3. С. 3–60.

2. *Мальцев А. И.* О рекурсивных абелевых группах // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146, № 5. С. 1009–1012.
3. *Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели // Избранные вопросы алгебры и логики. Новосибирск: Наука, 1973. С. 111–130.
4. *Morley M. D.* Decidable models // Israel J. Math. 1976. V. 25, N 3–4. P. 233–240.
5. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Науч. книга, 1999.
6. *Нуртазин А. Т.* Сильные и слабые конструктивизации и вычислимые семейства // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 3. С. 311–323.
7. *Ершов Ю. Л.* Разрешимость элементарной теории дистрибутивных структур с относительными дополнениями и теории фильтров // Алгебра и логика. 1964. Т. 3, № 3. С. 17–38.
8. *Пальчунов Д. Е.* Конечно-аксиоматизируемые булевы алгебры с выделенными идеалами // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 4. С. 435–455.
9. *Pal'chunov D. E.* Countably-categorical Boolean algebras with distinguished ideals // Stud. Logica. 1987. V. 46, N 2. P. 121–135.
10. *Пальчунов Д. Е.* Простые и счетно-насыщенные булевы алгебры с выделенными идеалами // Тр. Ин-та математики СО РАН. 1993. Т. 25. С. 82–103.
11. *Пальчунов Д. Е.* Теории булевых алгебр с выделенными идеалами, не имеющие простой модели // Тр. Ин-та математики СО РАН. 1993. Т. 25. С. 104–132.
12. *Гончаров С. С., Дзгоев В. Д.* Автоустойчивость моделей // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 1. С. 45–58.
13. *LaRoche P.* Recursively represented Boolean algebras // Notices Amer. Math. Soc. 1977. V. 24. P. A-552.
14. *Когабаев Н. Т.* Автоустойчивость булевых алгебр с выделенным идеалом // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 1074–1084.
15. *Алаев П. Е.* Автоустойчивые I-алгебры // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 5. С. 511–550.
16. *Goncharov S., Khoussainov B.* Open problems in the theory of constructive algebraic systems // Contemp. Math. 2000. V. 257. P. 145–170.
17. *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск: Науч. книга, 1996.

Статья поступила 26 апреля 2014 г.

Пальчунов Дмитрий Евгеньевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
palch@math.nsc.ru

Трофимов Александр Викторович
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2 Новосибирск 630090
Tr0f@mail.ru

Турко Алена Игоревна
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2 Новосибирск 630090
alenaturko@gmail.com