Сибирский математический журнал
Июль—август, 2015. Том 56, № 4

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИСТЕМ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. Ш. Любанова

Аннотация. Исследуется краевая задача для системы двух псевдопараболических уравнений в случае, когда наряду с начальными данными для одной из функций известно ее значение в финальный момент времени. Доказываются теоремы существования и единственности решения этой задачи с помощью свойств решений некоторых нелокальных и обратных задач для одного псевдопараболического уравнения, установленных в данной работе.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.410

Ключевые слова: система псевдопараболических уравнений, нагруженное уравнение, обратная задача для уравнения в частных производных, теорема существования и единственности, нелокальная краевая задача.

1. Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^k, т. е. $\partial\Omega \subset C^k$, $k \geq 2$, $\overline{\Omega}$ — замыкание Ω, T — произвольное положительное действительное число, $Q_T = (0,T) \times \Omega$ — цилиндр в $\mathbf{R}^{n+1}$ с боковой поверхностью $S_T = (0,T) \times \partial\Omega$. Точки области Ω будем обозначать через x, точки отрезка $[0,T]$ — через t, а точки цилиндра Q_T — через (t,x).

Введем линейные дифференциальные операторы

$$M_k = -\operatorname{div}(\mathscr{M}_k(x)\nabla) + (\mathbf{m}_k, \nabla)_R + m_k(x)I, \tag{1.1}$$

$$L_k = -\operatorname{div}(\mathscr{L}_k(x)\nabla) + (\mathbf{l}_k, \nabla)_R + l_k(x)I, \quad k = 1, 2, \tag{1.2}$$

$$B = -\operatorname{div}(\mathscr{B}(x)\nabla) + (\mathbf{b}, \nabla)_R + b(x)I,$$

где $\mathscr{M}_k(x) \equiv (m_{kij}(x))$, $\mathscr{L}_k(x) \equiv (l_{kij}(x))$ и $\mathscr{B}(x) \equiv (b_{ij}(x))$ — матрицы функций, $i, j = 1, 2, \dots, n$; $\mathbf{m}_k = \mathbf{m}_k(x)$, $\mathbf{l}_k = \mathbf{l}_k(x)$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}(x)$ — вектор-функции; m_k, l_k, b — скалярные функции; I — тождественный оператор.

Рассмотрим следующую задачу для системы псевдопараболических уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском Федеральном университете (договор № 14.Y26.31.0006).

Задача 1. *При заданных функциях $g_k(x,p)$, $f_k(t,x)$, $\beta_k(t,x)$, $k = 1,2$, $\gamma(x,p)$, $u_0(x)$ и $u_T(x)$ найти пару функций $\{u_1(t,x), u_2(t,x)\}$, удовлетворяющих системе уравнений*

$$(M_1u_1)_t + M_2u_1 = g_1(x,U_1) + g_2(x,U_1)AU_2 + f_1(t,x), \tag{1.3}$$

$$(L_1u_2)_t + L_2u_2 = Bu_1 + \gamma(x,u_1) + f_2(t,x), \quad (t,x) \in Q_T, \tag{1.4}$$

и условиям

$$M_1u_1|_{t=0} = u_0(x), \quad M_1u_1|_{t=T} = u_T(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{1.5}$$

$$u_k|_{S_T} = \beta_k(t,x). \tag{1.6}$$

Здесь $U_k(x) \equiv \int\limits_0^T u_k dt$, $k = 1,2$, A — линейный оператор. Предполагается, что A — это либо тождественный оператор, т. е. $A = I$, либо дифференциальный оператор вида

$$A = -\operatorname{div}(\mathscr{A}(x)\nabla) + (\mathbf{a},\nabla)_R + a(x)I, \tag{1.7}$$

где $\mathscr{A}(x) \equiv (a_{ij}(x))$ — матрица функций, $i,j = 1,2,\dots,n$; $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x)$ — вектор-функция; a — скалярная функция.

Задачи для систем уравнений с данными типа (1.5) представляют как математический, так и практический интерес. Они возникают при моделировании процесса массопереноса (диффузии) в сплошных средах со сложным химическим составом, например, при электролитическом рафинировании цветных металлов. Концентрация основного металла и кислотного остатка в электролизной ванне, как правило, известна и на начальной, и на конечной стадиях процесса, тогда как концентрация примесей, в частности состава шлама благородных металлов, не поддается определению с приемлемой точностью [1].

Процессы диффузии, как правило, моделируются с помощью эволюционных систем уравнений, в частности параболических систем типа (1.3), (1.4) с $M_1 \equiv I$ и $L_1 \equiv I$, $g_1 = g_1(x,u_1,u_2)$, $g_2 = 0$ [1, 2]. Модели таких процессов, учитывающие внутренние взаимодействия в сложных средах, при определенных допущениях приводят к псевдопараболическим уравнениям или системам [3]. Кроме того, псевдопараболические уравнения можно рассматривать как регуляризатор эволюционных уравнений. В [4–6] установлены условия на входные данные, при которых решения различных краевых задач для уравнения

$$(u + \eta\widetilde{M}_1u)_t + \widetilde{M}_2u = f_1, \tag{1.8}$$

где $\widetilde{M}_1$, $\widetilde{M}_2$ — операторы типа (1.1), стремятся к решениям соответствующих эволюционных задач при $\eta \to 0$. В [6] это позволило доказать корректность одной обратной задачи для параболического уравнения (1.8) при $\eta = 0$.

Уравнение (1.3) относится к так называемым нагруженным уравнениям. Оно является нелокальным по времени. Задачи для некоторых нелокальных уравнений, содержащих интеграл по всему промежутку $[0,T]$, исследовались в [7]. В литературе принято использовать термин «нагруженное уравнение» для уравнений с частными производными, содержащих следы или значения некоторых функционалов от решения [8]. Краевые задачи для нагруженных уравнений могут возникать, например, при решении обратных задач отыскания неизвестных коэффициентов в дифференциальных уравнениях [9–11]. Среди работ, которые связаны с вопросами, обсуждаемыми в данном исследовании, отметим также статьи [12–14], где рассматривались нагруженные параболические и псевдопараболические уравнения и задачи с нелокальными краевыми условиями.

Исследование начально-краевых задач для систем псевдопараболических уравнений восходит к работе Гальперна [15]. Им посвящен и ряд более поздних работ (см. статью [16] и ссылки в ней). В [15, 16] доказаны существование и единственность решения задачи Коши для систем линейных операторных дифференциальных уравнений псевдопараболического типа. Насколько известно автору, краевые задачи для систем псевдопараболических уравнений с данными по времени типа (1.5), известными только для одной из искомых функций, ранее не изучались.

Данная работа продолжает исследование, начатое в [17], где были получены теоремы существования и единственности решения задачи, аналогичной (1.3)–(1.6), для параболической системы (1.3), (1.4) в случае $M_1 \equiv I$ и $L_1 \equiv I$. В настоящей статье устанавливаются существование и единственность решения задачи 1. Исследование проводится в два этапа. Первый этап включает в себя обсуждение некоторых задач для одного псевдопараболического уравнения. В частности, рассматривается краевая задача для линейного уравнения с нелокальным условием по времени. Кроме того, исследуется корректность одной обратной задачи для квазилинейного нагруженного псевдопараболического уравнения. На втором этапе доказываются теоремы существования и единственности решения задачи 1 с помощью результатов, полученных на первом этапе.

2. Предварительные замечания

Всюду ниже будем использовать обозначения: $\|\cdot\|_R$ и $(\cdot,\cdot)_R$ — норма и скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$; $\|\cdot\|$ и $(\cdot,\cdot)$ — норма и скалярное произведение в $L^2(\Omega)$; $\|\cdot\|_j$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_j$ — норма в $W_2^j(\Omega)$ и отношение двойственности между $\overset{\circ}{W}{}_2^j(\Omega)$ и $W_2^{-j}(\Omega)$ соответственно, $j \geq 1$. Обозначим гёльдерово пространство функций, зависящих от переменных $x \in \overline{\Omega}$, через $H^{p+r}(\overline{\Omega})$, где $p \geq 0$ — целое число, $0 < r < 1$, а пространство p раз непрерывно дифференцируемых на $\overline{\Omega}$ функций — через $C^p(\overline{\Omega})$.

Для удобства получения априорных оценок будем считать операторы M_1 и L_1 самосопряженными, т. е. $m_{1ij} = m_{1ji}$, $l_{1ij} = l_{1ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $\mathbf{m}_1 = \mathbf{l}_1 = \mathbf{0}$.

В дополнение к задаче 1 рассмотрим вспомогательную задачу для линейного псевдопараболического уравнения. При заданных $u_0(x)$, $F(t,x)$ найти функцию $u(t,x)$, удовлетворяющую уравнению

$$M_1 u_t + M_2 u = F(t,x) \tag{2.1}$$

для всех $(t,x) \in Q_T$ и условиям

$$M_1 u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.2}$$

$$u|_{S_T} = 0. \tag{2.3}$$

Следуя определению Шовальтера и Тинга [5], однородную задачу, соответствующую (2.1)–(2.3), будем называть *p-гладкой* при целом $p \geq 2$, если $\partial\Omega \subset C^p$, $m_{kij}(x) \in C^{p-1}(\overline{\Omega})$, $\mathbf{m}_2 \in (C^{p-2}(\overline{\Omega}))^n$, $m_k \in C^{p-2}(\overline{\Omega})$ и $m_k(x) \geq 0$, $k = 1, 2$; операторы M_k сильно эллиптические, т. е. существуют положительные константы k_m, K_m такие, что для каждого $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$k_m \|v\|_1^2 \leq \langle M_k v, v\rangle_1 \leq K_m \|v\|_1^2, \quad k = 1, 2. \tag{2.4}$$

В [5] установлены достаточные условия существования и единственности решения задачи (2.1)–(2.3), которые приводятся в следующей теореме.

Теорема 2.1. (1) *Пусть однородная задача, соответствующая* (2.1)–(2.3), *является p-гладкой, $u_0(x) \in W_2^{p-2}(\Omega)$, $F(t,x) \in C\big([0,T]; W_2^{p-2}(\Omega)\big)$. Тогда существует единственное решение $u \in C^1\big([0,T]; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^p(\Omega)\big)$ задачи* (2.1)–(2.3).

(2) *Пусть $\partial\Omega \subset C^{2+r}$, $m_{kij}(x) \in H^{1+r}(\overline{\Omega})$, $\mathbf{m}_2 \in (H^r(\overline{\Omega}))^n$, $m_k \in H^r(\overline{\Omega})$, $0 < r < 1$, $m_k(x) \geq 0$, $k = 1,2$; операторы M_k сильно эллиптические, т. е. удовлетворяют условию* (2.4); *$u_0(x) \in H^r(\overline{\Omega})$, $F(t,x) \in C([0,T]; H^r(\overline{\Omega}))$. Тогда существует единственное классическое решение $u \in C^1([0,T]; H^{2+r}(\overline{\Omega}))$ задачи* (2.1)–(2.3).

Из результатов [5] можно получить оценку

$$\|u(t,x)\|_2 \leq C_2 \left\{ \|u_0(x)\| e^{-\alpha t} + C_1 \left[\int_0^t \|F\|^2 e^{-2\alpha(t-\tau)}\, d\tau \right]^{1/2} \right\} \tag{2.5}$$

для любого $t \in [0,T]$. Положительные постоянные α, C_1, C_2 зависят от n, k_m, K_m, $\operatorname{mes}\Omega$ и не зависят от T.

3. Задачи для псевдопараболического уравнения

В этом разделе найдем условия корректности и изучим свойства решений некоторых краевых задач для псевдопараболического уравнения. Эти свойства будут использованы в дальнейшем при исследовании задачи 1.

Введем норму

$$\|v\|_M = (\|M_1 v\|^2 + \lambda \langle M_1 v, v\rangle_1)^{1/2} \tag{3.1}$$

в функциональном пространстве $W \equiv W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Если однородная задача, соответствующая (2.1)–(2.3), является p-гладкой при $p \geq 2$, то норма (3.1) эквивалентна обычной норме в $W_2^2(\Omega)$, т. е. существуют положительные константы μ_1, μ_2 такие, что для каждого $v \in W$

$$\mu_1 \|v\|_2 \leq \|v\|_M \leq \mu_2 \|v\|_2. \tag{3.2}$$

Это соотношение и свойства эллиптических операторов (см. [18, гл. 2, неравенство (2.23)]) позволяют выбрать постоянную λ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{\nu}{\mu_2} \|v\|_M^2 \leq \nu \|v\|_2^2 \leq (M_2 v, M_1 v + \lambda v) \leq \nu_1 \|v\|_M^2, \tag{3.3}$$

$$\|M_2 v\| \leq \nu_2 \|v\|_M \tag{3.4}$$

с положительными константами ν и ν_k, $k = 1,2$, для всех $v \in W$.

Наряду с задачей (2.1)–(2.3) рассмотрим задачу для (2.1) с граничными данными (2.3) и нелокальным условием

$$M_1 u(T,x) - M_1 u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in \Omega. \tag{3.5}$$

Задачи с аналогичными нелокальными условиями для параболических уравнений ранее изучались в [19, 20].

Теорема 3.1. *Пусть $\partial\Omega \subset C^2$ и выполняются следующие условия:*

(i) *$m_{kij}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $\mathbf{m}_2 \in (C(\overline{\Omega}))^n$, $m_k \in C(\overline{\Omega})$ и $m_1(x) \geq 0$; операторы M_k, $k = 1,2$, сильно эллиптические, т. е.* (2.4) *справедливо для каждого $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$;*

(ii) *$\varphi(x) \in L^2(\Omega)$, $F(t,x) \in L^2(Q_T)$.*

Тогда существует единственное решение $u \in C^1([0,T];W)$ *задачи* (2.1), (2.3), (3.5). *При этом справедливы оценки*

$$\max_{t\in[0,T]} \|u\|_M \le 2C_2(1-e^{-\alpha_1 T})^{-1}\left[\|\varphi\| + C_1\left(\int\limits_0^T \|F\|^2\,d\tau\right)^{1/2}\right], \tag{3.6}$$

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_t\|_M \le C_3(1-e^{-\alpha_1 T})^{-1}\left[\|\varphi\| + C_1\left(\int\limits_0^T \|F\|^2\,d\tau\right)^{1/2}\right] + C_3'\|F\|. \tag{3.7}$$

Положительные константы C_3, C_3' *и* α_1 *зависят от* n, k_m, K_m, μ_2, $\operatorname{mes}\Omega$ *и не зависят от* T.

Доказательство. Рассмотрим итерационную схему

$$M_1 u_t^N + M_2 u^N = F(t,x), \tag{3.8}$$

$$M_1 u^N(0,x) = h^N(x), \tag{3.9}$$

$$u^N|_{S_T} = 0, \tag{3.10}$$

$$h^{N+1}(x) = M_1 u^N(T,x) - \varphi(x), \quad N = 0,1,2,\dots, \quad h^0 \equiv -\varphi(x). \tag{3.11}$$

По теореме 2.1 задача (3.8)–(3.10) имеет единственное решение $u^N \in C^1([0,T];W)$ для каждого $N = 1,2,\dots$.

Пусть оператор P отображает $L^2(\Omega)$ в себя и $P(h) = M_1 H(T,x)$ для каждого $h(x) \in L^2(\Omega)$, где $H(t,x)$ — решение задачи

$$M_1 H_t + M_2 H = F(t,x), \tag{3.12}$$

$$M_1 H(0,x) = h(x), \tag{3.13}$$

$$H|_{S_T} = 0. \tag{3.14}$$

Покажем, что оператор P сжимающий. Действительно, пусть $h_1(x)$, $h_2(x)$ — произвольные элементы из $L^2(\Omega)$ и $H_1(x)$, $H_2(x)$ — решения задачи (3.12)–(3.14) с $h = h_1$ и $h = h_2$ соответственно. Тогда функция $H(t,x) = H_1 - H_2$ удовлетворяет уравнению

$$M_1 H_t + M_2 H = 0, \tag{3.15}$$

начальным данным

$$M_1 H(0,x) = h_1(x) - h_2(x) \tag{3.16}$$

и граничному условию (3.14). Умножая (3.15) на $(M_1 H + \lambda H)e^{\nu t/\mu_2}$, интегрируя по частям по x в первом слагаемом и оценивая второе слагаемое левой части результирующего соотношения с помощью (3.3), получим

$$\frac{d}{dt}\bigl\{e^{\alpha_1 t}\|H\|_M^2\bigr\} \le 0. \tag{3.17}$$

Из (3.17) с учетом (3.16) имеем оценку

$$\|H(t,\cdot)\|_M \le e^{-\alpha_1 t}\|h_1 - h_2\| \tag{3.18}$$

для всех $t \in [0,T]$ или в силу определения оператора P — оценку

$$\|P(h_1) - P(h_2)\| \le e^{-\alpha_1 T}\|h_1 - h_2\|, \tag{3.19}$$

где $\alpha_1 = \nu/\mu_2$.

Перепишем равенство (3.11) в виде

$$h^N(x) = P(h^{N-1}(x)) - \varphi(x). \tag{3.20}$$

Аналогично соотношениям (3.18) и (3.19) из (3.8)–(3.10) можно получить неравенства

$$\|h^{N+1} - h^N\| \le e^{-\alpha_1 T}\|h^N - h^{N-1}\| \le e^{-\alpha_1 NT}\|h^1 - h^0\|, \tag{3.21}$$

$$\|u^N - u^{N-1}\|_M \le e^{-\alpha_1 t}\|h^N - h^{N-1}\| \le e^{-\alpha_1((N-1)T+t)}\|h^1 - h^0\| \tag{3.22}$$

для всех $t \in [0,T]$ и $N \ge 2$.

Далее, обозначим $u^{N+1} - u^N$ через $\tilde{u}^N$ и рассмотрим разность уравнений (3.8) для u^{N+1} и u^N. Умножая ее на $(M_1\tilde{u}^N + \lambda\tilde{u}^N)_t$ скалярно в $L^2(\Omega)$ и интегрируя по частям по x, имеем

$$\big\|\tilde{u}_t^N\big\|_M^2 = -\big(M_2\tilde{u}^N, M_1\tilde{u}_t^N\big) - \lambda\big\langle M_2\tilde{u}^N, \tilde{u}_t^N\big\rangle_1,$$

откуда с помощью (2.4), (3.4) и (3.22) можно получить неравенство

$$\big\|u_t^N - u_t^{N-1}\big\|_M \le C_4 e^{-\alpha_1((N-1)T+t)}\|h^1 - h^0\|. \tag{3.23}$$

Здесь $C_4 = \mathrm{const} > 0$ зависит от C_1, T, α_1 и не зависит от N. Наконец, (3.22) и (3.23) дают оценки

$$\max_{t\in[0,T]}\|u^N - u^{N-1}\|_M \le e^{-\alpha_1(N-1)T}\|h^1 - h^0\|, \tag{3.24}$$

$$\max_{t\in[0,T]}\big\|u_t^N - u_t^{N-1}\big\|_M \le C_4 e^{-\alpha_1(N-1)T}\|h^1 - h^0\|. \tag{3.25}$$

Неравенства (3.21), (3.24), (3.25) показывают, что последовательности u^N и h^N фундаментальны и существуют функции $u \in C^1([0,T];W)$ и $h \in W$ такие, что $u^N \to u$ в $C^1([0,T];W)$ и $h^N \to h$ в $L^2(\Omega)$ при $N \to \infty$. При этом в силу (3.20) и (3.21)

$$\|h^{N+1}\| \le \|h^1 - h^0\|\sum_{i=0}^{N} e^{-\alpha_1 iT} + \|\varphi\| \le \frac{1}{1 - e^{-\alpha_1 T}}\|h^1 - h^0\| + \|\varphi\|.$$

Из (2.5) и (3.24) следует, что

$$\|u^N\|_M \le \|h^1 - h^0\|\sum_{i=0}^{N} e^{-\alpha_1 iT} + \|u^0\|_M \le (1 - e^{-\alpha T})^{-1}\|u^0(T,\cdot)\|_M + \|u^0\|_M$$

$$\le 2C_2(1 - e^{-\alpha_1 T})^{-1}\left[\|\varphi\| + C_1\left(\int_0^T \|F\|^2\,d\tau\right)^{1/2}\right]. \tag{3.26}$$

Аналогично из (3.8) с учетом (3.2), (3.4), (3.26) можно вывести оценку

$$\big\|u_t^N\big\|_M \le C_5(1 - e^{-\alpha_1 T})^{-1}\left[\|\varphi\| + C_1\left(\int_0^T \|F\|^2\,d\tau\right)^{1/2}\right] + C_5'\|F\|,$$

где положительные постоянные C_5 и C_5' зависят от ν, ν_1, μ_2 и C_2 и не зависят от N. Переходя к пределу в (3.8), (3.9) и (3.20), заключаем, что u является решением задачи (2.1), (2.3), (3.5). Более того, u удовлетворяет оценкам (3.6) и (3.7) с $C_3 = C_5$ и $C_3' = C_5'$. Единственность решения следует из оценки (3.6) и линейности задачи (2.1), (2.3), (3.5). Теорема доказана.

В следующем утверждении даются достаточные условия, при которых решение u задачи (2.1), (2.3), (3.5) принадлежит классу $C^1\big([0,T];W_2^4(\Omega)\big)$.

Теорема 3.2. *Пусть $\partial\Omega \subset C^4$ и выполняются следующие условия:*

(iii) $m_{1ij}(x) = m_{2ij}(x) = m_{ij}(x)$, $m_{ij}(x) \in H^{3+r}(\overline{\Omega})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$; $\mathbf{m}_2 \in (H^{2+r}(\overline{\Omega}))^n$, $m_k \in H^{2+r}(\overline{\Omega})$, $0 < r < 1$; $m_1(x) \geq 0$ *и* (2.4) *справедливо для каждого* $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$;

(iv) $\varphi(x) \in W_2^2(\Omega) \cap H^r(\overline{\Omega})$, $F(t, x) \in C\big([0, T]; W_2^2(\Omega) \cap H^r(\overline{\Omega})\big)$.

Тогда решение u задачи (2.1), (2.3), (3.5) *принадлежит* $C^1\big([0, T]; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^4(\Omega)\big)$. *Кроме того, имеют место оценки*

$$\max_{t\in[0,T]} \|u\|_4 \leq C' \left[\|\varphi\|_2 + \left(\int_0^T \|F\|_2^2 \, d\tau \right)^{1/2} \right], \tag{3.27}$$

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_t\|_4 \leq C'' \left[\|\varphi\|_2 + \left(\int_0^T \|F\|_2^2 \, d\tau \right)^{1/2} + \|F\|_2 \right] \tag{3.28}$$

с некоторыми положительными константами C', C''.

Доказательство. Обратимся к итерационной схеме (3.8)–(3.11). По теореме 2.1 решение u^N принадлежит классу $C^1\big([0, T]; W_2^4(\Omega) \cap H^{2+r}(\overline{\Omega})\big)$ при каждом $N \geq 0$. Поэтому можем применить оператор M_1 к (3.8), (3.9). Получим соотношения

$$M_1^2 u_t^N + M_1 M_2 u^N = M_1 F(t, x), \tag{3.29}$$

$$M_1^2 u^N(0, x) = M_1 h^N(x). \tag{3.30}$$

Введем линейный дифференциальный оператор $M_0 = -\operatorname{div}(\mathscr{M}(x)\nabla)$ и перепишем (3.8) следующим образом:

$$(M_0 u^N)_t + M_0 u^N = F - (m_1 u)_t - (\mathbf{m}_2, \nabla)_R u^N - m_2 u^N. \tag{3.31}$$

Выразим $M_0 u^N$ из (3.31). Это дает

$$M_0 u^N = h^N e^{-t} - m_1 u^N + \int_0^t [(m_1 - m_2) u^N - (\mathbf{m}_2, \nabla)_R u^N + F] e^{-(t-\tau)} \, d\tau. \tag{3.32}$$

Ввиду гладкости u^N уравнение (3.8), а следовательно, и (3.32) выполняются на границе $\partial\Omega$. Из (3.32) вытекает, что

$$M_1 u^N\big|_{S_T} = \left\{ e^{-t} h^N + \int_0^t [-(\mathbf{m}_2, \nabla)_R u^N + F] e^{-(t-\tau)} \, d\tau \right\}\Bigg|_{S_T} \equiv \Psi^N|_{S_T}. \tag{3.33}$$

Введем новую функцию $V^N = M_1 u^N - \Psi^N$ и запишем (3.29), (3.30), (3.33) как краевую задачу для V^N:

$$(M_1 V^N)_t + M_1 V^N = -M_1[(m_2 - m_1) u^N], \tag{3.34}$$

$$M_1 V^N(0, x) = M_1 h^N(x) - M_1 \Psi^N(0, x) \equiv 0, \quad V^N|_{S_T} = 0.$$

Умножим (3.34) на $V^N e^t$ скалярно в $L^2(\Omega)$, проинтегрируем по частям в полученном уравнении и оценим правую часть с помощью неравенства Коши. Имеем

$$\frac{d}{dt}[e^t \langle M_1 V^N, V^N \rangle_1] \leq |\langle M_1[(m_2 - m_1) u^N], (m_2 - m_1) u^N \rangle_1| e^t.$$

Отсюда в силу (2.4), (3.6) и предположения (iii) следует оценка

$$\|V^N\|_1 \leq C_6(1-e^{-\alpha_1 T})^{-1}[\|\varphi\| + C_1\|F\|_{L^2(Q_T)}], \tag{3.35}$$

где положительная постоянная C_6 зависит от $\|m_k\|_{C^1(\overline{\Omega})}$, $k=1,2$, T, C_2, k_m, K_m и не зависит от N. Далее, умножив (3.34) на M_1V^N скалярно в $L^2(\Omega)$ и оценив правую часть результата с помощью неравенства Коши, получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|M_1V^N\|^2 + \|M_1V^N\|^2 \leq \frac{1}{2}\|M_1V^N\|^2 + \frac{1}{2}\|M_1(m_2-m_1)u^N\|^2,$$

откуда вытекает неравенство

$$\|M_1V^N\|^2 \leq \int\limits_0^t \|M_1(m_2-m_1)u^N\|^2 e^{-(t-\tau)}\,d\tau,$$

и в силу гладкости m_k, $k=1,2$, а также (3.2) и (3.4) — оценка

$$\|M_1V^N\| \leq C_7 \max_{\tau\in[0,t]}\|u^N\|_M. \tag{3.36}$$

Положительная постоянная C_7 зависит от μ_k, n, $\operatorname{mes}\Omega$, $\|m_k\|_{C^2(\overline{\Omega})}$, $k=1,2$, и не зависит от N. С помощью (3.4) и (3.36) из (3.34) можно вывести аналогичное неравенство для V_t^N. А именно,

$$\big\|M_1V_t^N\big\| \leq C_8 \max_{\tau\in[0,t]}\|u^N\|_M. \tag{3.37}$$

Здесь постоянная C_8 зависит от C_7, μ_k, n, $\operatorname{mes}\Omega$, $\|m_k\|_{C^2(\overline{\Omega})}$, $k=1,2$, и не зависит от N.

Покажем, что последовательность V^N фундаментальна в $C^1\big(0,T;W_2^2(\Omega)\big)$. Для этого рассмотрим разность $V^{N+1}-V^N$. В силу (3.34) она удовлетворяет соотношению

$$M_1(V^{N+1}-V^N)_t + M_1(V^{N+1}-V^N) = -M_1[(m_2-m_1)(u^{N+1}-u^N)] \tag{3.38}$$

и $(V^{N+1}-V^N)|_{t=0} = (V^{N+1}-V^N)|_{\partial\Omega} = 0$. Повторяя этапы доказательства неравенств (3.36), (3.37) применительно к (3.38) и учитывая (3.24), (3.25), можно показать, что

$$\|M_1(V^{N+1}-V^N)\| \leq C_9 e^{-\alpha_1((N-1)T+t)}\|h^1-h^0\|, \tag{3.39}$$

$$\big\|M_1(V_t^{N+1}-V_t^N)\big\| \leq C_{10} e^{-\alpha((N-1)T+t)}\|h^1-h^0\|, \tag{3.40}$$

где постоянные C_9, C_{10} зависят от μ_1, C_4, C_7, C_8 и $\|m_k\|_{C^2(\overline{\Omega})}$, $k=1,2$, и не зависят от N.

Ввиду свойств оператора M_1 для любого $v\in W_2^{2+s}(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ справедливы неравенства [21, гл. 2]

$$\|v\|_{2+s} \leq D_s\{\|M_1v\|_s + \|v\|_{1+s}\} \tag{3.41}$$

при $s=0,1,2$. Кроме того, вследствие (3.2) и [18, гл. 2]

$$\|v\|_2 \leq D_0'\{\|M_1v\| + \|v\|\} \tag{3.42}$$

и для любого $v\in W_2^4(\Omega)$ и $\varepsilon>0$

$$\|v\|_3 \leq D_1(\|M_1v\|_1 + \|v\|_2) \leq D_1\varepsilon\|M_1v\|_2 + D_1\big(\mu_1^{-1}+c_\varepsilon\big)\|v\|_M, \tag{3.43}$$

где положительная постоянная c_ε зависит от ε, n и $\operatorname{mes}\Omega$. Константы D_s и D_0' зависят от n, M и $\operatorname{mes}\Omega$.

Из (3.22) и (3.43) заключаем, что

$$\|u^{N+1}-u^N\|_3 \le D_1\varepsilon\|M_1(u^{N+1}-u^N)\|_2+D_1\big(\mu_1^{-1}+c_\varepsilon\big)e^{-\alpha_1(N-1)T}\|h^1-h^0\|. \quad (3.44)$$

Далее, в силу (3.22), (3.39)–(3.44)

$$\|M_1(u^{N+1}-u^N)\|_2 \le (C_{11}+C_{12}D_1c_\varepsilon)e^{-\alpha_1(N-1)T}\|h^1-h^0\| \\ + e^{-t}\|M_1(u^N-u^{N-1})|_{t=T}\|_2 + C_{12}D_1\varepsilon\int_0^t \|M_1(u^{N+1}-u^N)\|_2 e^{-(t-\tau)}\,d\tau. \quad (3.45)$$

Здесь положительные постоянные C_{11}, C_{12} зависят от k_m, n, D_1, $\max_{x\in\overline{\Omega}}\|\mathbf{m}_2\|_R$, $\max_{x\in\overline{\Omega}}\|\mathbf{m}_{2x_i}\|_R$ и $\max_{x\in\overline{\Omega}}\|\mathbf{m}_{2x_ix_j}\|_R$, $i,j=1,2,\dots,n$, $\operatorname{mes}\Omega$ и не зависят от N. Согласно лемме Гронуолла из (3.45) следует, что

$$\|M_1(u^{N+1}-u^N)\|_2 \le (C_{11}+C_{12}D_1c_\varepsilon)e^{-\alpha_1(N-1)T}\|h^1-h^0\|\exp(C_{12}D_1\varepsilon t) \\ + \exp(-(1-C_{12}D_1\varepsilon)t)\|M_1(u^N-u^{N-1})|_{t=T}\|_2$$

для любого $t\in[0,T]$. Положим $\varepsilon=(2C_{12}D_1)^{-1}$. В этом случае

$$\|M_1(u^{N+1}-u^N)\|_2 \le e^{-\frac{t}{2}}\|M_1(u^N-u^{N-1})|_{t=T}\|_2+C_{13}e^{-\alpha_1(N-1)T}\|h^1-h^0\|, \quad (3.46)$$

где $C_{13}=C_{11}+C_{12}D_1c_\varepsilon$. Тогда

$$\|M_1(u^{N+1}-u^N)|_{t=T}\|_2 \le e^{-T/2}\|M_1(u^N-u^{N-1})|_{t=T}\|_2+C_{13}e^{-\alpha_1(N-1)T}\|h^1-h^0\|. \quad (3.47)$$

Из (3.46) и (3.47) вытекает неравенство

$$\|M_1(u^{N+1}-u^N)\|_2 \le e^{-(t+T(N-1))/2}\|h^1-h^0\|_2+C_{13}(Ne^{-t/2}+1)e^{-\tilde\alpha(N-1)T}\|h^1-h^0\|, \quad (3.48)$$

где $\tilde\alpha=\min\{\alpha_1,\frac12\}$.

Теперь можно оценить $\|u^{N+1}-u^N\|_4$. С учетом (3.24), (3.41)–(3.44) и (3.48) имеем

$$\max_{t\in[0,T]}\|u^{N+1}-u^N\|_4 \le D_2\max_{t\in[0,T]}\{\|M_1(u^{N+1}-u^N)\|_2+\|u^{N+1}-u^N\|_3\} \\ \le C_{14}e^{-\tilde\alpha(N-1)T}\{\|h^1-h^0\|_2+(N+1)\|h^1-h^0\|\}. \quad (3.49)$$

Постоянная C_{14} зависит от D_1, μ_1, n, $\operatorname{mes}\Omega$, C_{13} и не зависит от N.

Аналогичным образом можно вывести соответствующее неравенство для разности $u_t^{N+1}-u_t^N$. В силу (3.2), (3.4), (3.8), (3.48)

$$\big\|M_1\big(u_t^{N+1}-u_t^N\big)\big\|_2=\|M_2(u^{N+1}-u^N)\|_2 \le D_2'\{e^{-(t+T(N-1))/2}\|h^1-h^0\|_2 \\ + C_{13}(N+1)e^{-\tilde\alpha(N-1)T}\|h^1-h^0\|\}. \quad (3.50)$$

Здесь D_2' зависит от $\|m_{2ij}\|_{C^2(\overline{\Omega})}$, $\|m_{2i}\|_{C^2(\overline{\Omega})}$, $i,j=1,2,\dots,n$, $\|m_2\|_{C^2(\overline{\Omega})}$, D_2, μ_2, ν_2. Из (3.4), (3.44), и (3.50) получаем оценку

$$\max_{t\in[0,T]}\big\|u_t^{N+1}-u_t^N\big\|_4 \le D_2\max_{t\in[0,T]}\big\{\big\|M_1\big(u_t^{N+1}-u_t^N\big)\big\|_2+\big\|u_t^{N+1}-u_t^N\big\|_3\big\} \\ \le C_{15}\{e^{-T(N-1)/2}\|h^1-h^0\|_2+(N+1)e^{-\tilde\alpha(N-1)T}\|h^1-h^0\|\} \quad (3.51)$$

с постоянной C_{15}, которая зависит от D_1, D_2' μ_1, n, $\operatorname{mes}\Omega$, C_{14} и не зависит от N. Далее, ввиду (3.49)

$$\|u^N\|_4 \le \sum_{i=0}^{N-1} \|u^{i+1} - u^i\|_4 + \|u^0\|_4 \le \frac{C_{16}}{(1-e^{-\tilde{\alpha}T})^2} \|u^0|_{t=T}\|_4 + \|u^0\|_4, \tag{3.52}$$

где C_{16} зависит от C_{14}, $\tilde{\alpha}$, T и не зависит от N. В силу (3.6), (3.35), (3.37), (3.41) и (3.43)

$$\begin{aligned}\|u^0\|_4 &\le D_2\{D_0[\|M_1V^0\| + \|M_1\Psi^0\|] + (D_0+D_1)[\|V^0\|_1 + \|\Psi^0\|_1] + D_1\|u^0\|_2\} \\ &\le C_{17}\{(1-e^{-\alpha_1 T})^{-1}[\|\varphi\| + C_1\|F\|_{L^2(Q_T)}] + \|\varphi\|_2 + \|M_1F\|_{L^2(Q_T)}\} \\ &\quad + C_{18}\int_0^t \|u^0\|_4\,d\tau \le C_{19}\left[\|\varphi\|_2 + \left(\int_0^T \|F\|_2^2\,d\tau\right)^{1/2}\right] + C_{18}\int_0^t \|u^0\|_4\,d\tau,\end{aligned}$$

откуда согласно лемме Гронуолла следует, что

$$\max_{t\in[0,T]} \|u^0\|_4 \le C_{19}e^{C_{18}T}\left[\|\varphi\|_2 + \left(\int_0^T \|F\|_2^2\,d\tau\right)^{1/2}\right].$$

Постоянные C_{17}, C_{18} и C_{19} зависят от $\tilde{\alpha}$, T, D_0, D_1, D_2, C_1, C_7, ν_1, μ_2 и не зависят от N. Последнее неравенство и (3.52) приводят к оценке

$$\begin{aligned}\|u^N\|_4 &\le (C_{16}(1-e^{-\tilde{\alpha}T})^{-2} + C_{19}e^{C_{18}T})\left[\|\varphi\|_2 + \left(\int_0^T \|F\|_2^2\,d\tau\right)^{1/2}\right] \\ &\equiv C_{20}\left[\|\varphi\|_2 + \left(\int_0^T \|F\|_2^2\,d\tau\right)^{1/2}\right].\end{aligned} \tag{3.53}$$

Аналогично, используя (3.7), (3.35), (3.37), (3.41), (3.43), (3.50) и (3.53), из уравнения (3.31) можно получить оценку для u_t^N:

$$\|u_t^N\|_4 \le C_{21}\left[\|\varphi\|_2 + \left(\int_0^t \|F\|_2^2\,d\tau\right)^{1/2} + \|F\|_2\right].$$

Из неравенств (3.49) и (3.51) вытекает, что последовательность u^N фундаментальна в $C^1([0,T];W_2^4(\Omega))$. Как показано в теореме 3.1, она сходится к решению u задачи (2.1), (2.3), (3.5) при $N\to\infty$. При этом для u справедливы оценки (3.27), (3.28) с $C' = C_{20}$ и $C'' = C_{21}$. Теорема доказана.

Полученные результаты позволяют установить однозначную разрешимость следующей обратной задачи. При заданных $g_k(x,p)$, $k=1,2$, $G(t,x)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ найти пару функций $(u(t,x), f(x))$, удовлетворяющую уравнению

$$M_1u_t + M_2u = g_1(x,U) + g_2(x,U)f(x) + G(t,x) \tag{3.54}$$

в Q_T, где $U = \int\limits_0^T u\,dt$, краевым условиям

$$M_1u|_{t=0} = u_0(x), \quad x\in\Omega, \tag{3.55}$$

$$u|_{S_T} = 0 \tag{3.56}$$

и условию переопределения

$$M_1 u|_{t=T} = u_T(x), \quad x \in \Omega. \tag{3.57}$$

Задача (3.54)–(3.57) исследовалась ранее (см. [10, 11]) в случае, когда функции g_1 и g_2 не зависят от U.

Теорема 3.3. *Пусть выполняется предположение* (i) *теоремы* 3.1, *а также условия*

(v) $G(t,x) \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, $u_0, u_T \in L^2(\Omega)$;

(vi) *функции* $g_k(x,p)$, $k = 1, 2$, $\gamma(x,p)$ *непрерывны в* $\overline{\Omega} \times (-\infty, +\infty)$; *существуют положительная константа* ν *и неотрицательные непрерывные функции* $q_1(\xi)$ *и* $q_2(\xi)$ $(\xi \in \mathbf{R})$ *такие, что* $|g_2(x,p)| \geq \nu$ *для всех* $(x,p) \in \overline{\Omega} \times (-\infty, +\infty)$,

$$\|g_1|_{p=v}\| \leq q_1(\|v\|_2)$$

для любого $v \in W_2^2(\Omega)$ *и*

$$\|\gamma|_{p=v}\|_{L^2(Q_T)} \leq q_2(\|v\|_{C^1([0,T];W_2^2(\Omega))})$$

для любого $v \in C^1\big([0,T]; W_2^2(\Omega)\big)$.

Тогда существует единственное решение $(u(t,x), f(x)) \in V \equiv C^1([0,T]; W) \times L^2(\Omega)$ *задачи* (3.54)–(3.57) *при любом* $T > 0$. *При этом справедливы оценки*

$$\max_{t\in[0,T]} \|u(t,\cdot)\|_M \leq C_{22}[\|u_T\| + \|u_0\| + \|G\|_{L^2(Q_T)}], \tag{3.58}$$

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_t\|_M \leq C_{23}[\|u_T\| + \|u_0\| + \max_{t\in[0,T]} \|G\|], \tag{3.59}$$

$$\|f\| \leq C_{24}[\|u_T\| + \|u_0\| + \|G\|_{L^2(Q_T)}] \tag{3.60}$$

с некоторыми положительными постоянными C_{22}, C_{23} *и* C_{24}.

Доказательство. Проинтегрируем (3.54) по t от 0 до T и выразим $f(x)$ из полученного равенства. Это дает

$$f(x) = \left[\frac{1}{T}\left(u_T - u_0 + M_2 U - \int_0^T G(t,x)\,dt\right) - g_1(x,U)\right](g_2(x,U))^{-1}. \tag{3.61}$$

Подставим (3.61) в (3.54) и запишем результат, используя новую функцию

$$w = u - \frac{1}{T}\int_0^T u\,d\tau. \tag{3.62}$$

Имеем

$$M_1 w_t + M_2 w = F_1(t,x), \tag{3.63}$$

где

$$F_1(t,x) = \frac{1}{T}(u_T - u_0) + G(t,x) - \frac{1}{T}\int_0^T G(s,x)\,ds.$$

В силу (3.54), (3.1) и (3.62) $w(t,x)$ удовлетворяет условиям

$$M_1 w(T,x) - M_1 w(0,x) = u_T(x) - u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.64}$$

$$w|_{S_T} = 0. \tag{3.65}$$

Таким образом, получаем две задачи: (3.63)–(3.65) и (3.62), (3.55). Согласно теореме 3.1 задача (3.63)–(3.65) имеет единственное решение $w \in C^1([0,T];W)$ и справедливы оценки

$$\max_{t\in[0,T]} \|w\|_M \le \frac{2C_2}{1-e^{-\alpha_1 T}}[\|u_T - u_0\| + C_1\|F_1\|_{L^2(Q_T)}] \le C_{25}[\|u_T\| + \|u_0\| + \|G\|_{L^2(Q_T)}],$$

$$\max_{t\in[0,T]} \|w_t\|_M \le \frac{C_3}{1-e^{-\alpha_1 T}}[\|u_T - u_0\| + C_1\|F_1\|_{L^2(Q_T)}] + \max_{t\in[0,T]}\|F_1\| \le C_{26}[\|u_T\| + \|u_0\| + \|G\|_{L^2(Q_T)}] + \max_{t\in[0,T]}\|G\|.$$

Здесь положительные постоянные C_{25} и C_{26} зависят от α_1, T, C_1, C_2, C_3. Из (3.63)–(3.65) следует, что $\int\limits_0^T w\,dt \equiv 0$. Это позволяет найти u как решение интегрального уравнения (3.62). Ввиду (3.55)

$$u(t,x) = w(t,x) - w(0,x) + M_1^{-1}u_0(x). \tag{3.66}$$

В силу гладкости w и предположений теоремы $u \in C^1([0,T];W)$. Кроме того, имеют место оценки (3.58) и (3.59) с положительными постоянными C_{22}, C_{23}, зависящими от T, ν_1, k_m, K_m, C_{25}, C_{26}. В свою очередь, из (3.61) и (3.66) заключаем, что $f(x)$ определяется функцией u единственным образом, $f(x) \in L^2(\Omega)$ и справедлива оценка (3.60), где положительная постоянная C_{24} зависит от T, ν_1, k_m, K_m, C_{20}, $\|m_{2ij}\|_{C(\overline{\Omega})}$, $\|m_{2i}\|_{C(\overline{\Omega})}$, $\|m_2\|_{C(\overline{\Omega})}$, $i,j = 1,2,\dots,n$.

Пара (u,f) является решением задачи (3.54)–(3.57). Действительно, подставляя (3.61), (3.62) в (3.63), можно убедиться в справедливости уравнения (3.54). В силу (3.64) и (3.66) выполняются условия (3.56) и (3.57).

Докажем, что решение (u,f) единственно. Пусть (u',f') и (u'',f'') — два решения задачи (3.54)–(3.57). Тогда пара $(\tilde u,\tilde f) = (u'-u'', f'-f'')$ удовлетворяет соотношениям

$$M_1\tilde u_t + M_2\tilde u_2 = g_1(x,U') - g_1(x,U'') + (g_2(x,U') - g_2(x,U''))f' + g_2(x,U'')\tilde f, \tag{3.67}$$

$$M_1\tilde u|_{t=0} = M_1\tilde u|_{t=T} = 0, \quad \tilde u|_{S_T} = 0.$$

Вводя функцию $\tilde v = \tilde u - \frac{1}{T}\int\limits_0^T \tilde u\,dt$ и повторяя рассуждения, приведшие к (3.63)–(3.65), (3.66), получим равенства

$$M_1\tilde v_t + M_2\tilde v_2 = 0, \quad M_1\tilde v|_{t=0} - M_1\tilde v|_{t=T} = 0, \quad \tilde v|_{S_T} = 0$$

и $\tilde u = \tilde v - \tilde v(0,x)$, откуда согласно теореме 3.1 следует, что $\tilde v \equiv 0$ и соответственно $\tilde u \equiv 0$. В свою очередь, из (3.67) и условий теоремы вытекает, что $\tilde f \equiv 0$. Теорема доказана.

Теорема 3.3 гарантирует существование сильного решения $\{u(t,x), f(x)\}$ обратной задачи (3.54)–(3.57) в классе $C^1([0,T];W) \times L^2(\Omega)$. При условиях на исходные данные, аналогичных предположениям теоремы 3.2 решение этой задачи имеет более высокую гладкость. Строго говоря, справедлива следующая

Теорема 3.4. *Пусть* $\partial\Omega \subset C^4$, *выполняются предположение* (iii) *теоремы* 3.2 *и следующие условия.*

(vii) $u_0, u_T \in W_2^2(\Omega) \cap H^{2+r}(\overline{\Omega})$, $G \in C([0,T]; W_2^2(\Omega) \cap H^r(\overline{\Omega}))$, $0 \le r \le 1$.

(viii) *Если* $n \le 6$, *то функции* $g_k(x,p)$, $k = 1,2$, *дважды непрерывно дифференцируемы в* $\overline{\Omega} \times (-\infty, +\infty)$; *если* $n > 6$, *то* $g_1(x,p) = c(x)p$, *где* $c(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, *и* $g_2(x,p) = g_2(x) \in C^2(\overline{\Omega})$. *Функция* $\gamma(x,p)$ *непрерывна в* $\overline{\Omega} \times (-\infty, +\infty)$. *Существуют постоянная* $\nu > 0$ *и неотрицательная непрерывная функция* $q(\xi)$ ($\xi \in \mathbf{R}$) *такие, что* $|g_2(x,p)| \ge \nu$ *для всех* $(x,p) \in \overline{\Omega} \times (-\infty, +\infty)$ *и*

$$\|\gamma|_{p=v}\|_{L_2(Q_T)} \le q(\|v\|_{C^1([0,T];W_2^4(\Omega))})$$

для всех $v \in C^1\big([0,T]; W_2^4(\Omega)\big)$.

Тогда решение $(u(t,x), f(x))$ *обратной задачи* (3.54)–(3.57) *принадлежит классу* $C^1\big([0,T]; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^4(\Omega)\big) \times W_2^2(\Omega)$ *и справедливы оценки*

$$\max_{t\in[0,T]} \|u(t,\cdot)\|_4 \le C'_{22}\left[\|u_T\|_2 + \|u_0\|_2 + \left(\int_0^T \|G\|_2^2\, d\tau\right)^{1/2}\right], \tag{3.68}$$

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_t\|_4 \le C'_{23}[\|u_T\|_2 + \|u_0\|_2 + \max_{t\in[0,T]} \|G\|_2], \tag{3.69}$$

$$\|f\|_2 \le C'_{24}\left[\|u_T\|_2 + \|u_0\|_2 + \left(\int_0^T \|G\|_2^2\, d\tau\right)^{1/2}\right] \tag{3.70}$$

с некоторыми положительными постоянными C'_{22}, C'_{23} *и* C'_{24}.

Доказательство. Обратимся к задаче (3.63)–(3.65). По теореме 3.2 ее решение w принадлежит классу $C^1\big([0,T]; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^4(\Omega)\big)$ и имеют место оценки

$$\max_{t\in[0,T]} \|w\|_4 \le C_{27}\left[\|u_T - u_0\|_2 + \left(\int_0^T \|G\|_2^2\, d\tau\right)^{1/2}\right], \tag{3.71}$$

$$\max_{t\in[0,T]} \|w_t\|_4 \le C_{28}\left[\|u_T - u_0\|_2 + \left(\int_0^T \|G\|_2^2\, d\tau\right)^{1/2}\right] + \max_{t\in[0,T]} \|G\|_2, \tag{3.72}$$

где положительные постоянные C_{27} и C_{28} зависят от α_1, T, C', C''.

В силу (3.61), (3.66), (3.71) и (3.72) $u \in C^1\big([0,T]; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^4(\Omega)\big)$, $f \in W_2^2(\Omega)$ и справедливы оценки (3.68)–(3.70) с константами C'_{22}, C'_{23} и C'_{24}, зависящими от T, ν_1, k_m, K_m, C_{27}, C_{28}, $\|m_{ij}\|_{C(\overline{\Omega})}$, $\|m_{2i}\|_{C(\overline{\Omega})}$, $\|m_2\|_{C(\overline{\Omega})}$, $i,j = 1,2,\dots,n$. Теорема доказана.

Замечание 3.1. Все полученные результаты остаются справедливыми для нелокальной задачи (2.1), (2.3), (3.5) и обратной задачи (3.54)–(3.57) с оператором M_1 общего вида (1.1).

4. Существование и единственность решения задачи 1

Начнем исследование задачи 1 со случая, когда A является линейным дифференциальным оператором вида (1.7).

Будем предполагать выполненными следующие условия.

I. $l_{kij}(x), a_{ij}(x)b_{ij}(x) \in W^1_\infty(\Omega)$, $i,j = 1,2,\dots,n$; $\mathbf{l}_k, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in (L^\infty(\Omega))^n$, $k = 1,2$, $l, a, b \in L^\infty(\Omega)$.

II. Операторы L_k и A сильно эллиптические, т. е. существуют положительные постоянные k_l, K_l, k_a, K_a такие, что для любого $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$

$$k_l\|v\|_1^2 \le \langle L_k v, v\rangle_1 \le K_l\|v\|_1^2, \quad k = 1,2,$$

$$k_a\|v\|_1^2 \le \langle A v, v\rangle_1 \le K_a\|v\|_1^2.$$

Под решением задачи 1 с таким оператором A будем понимать пару $\{u_1, u_2\}$ из класса $W_1 = \big\{\{v_1, v_2\} \mid v_k \in C^1\big([0,T]; W_2^2(\Omega)\big),\ k = 1,2\big\}$, которая удовлетворяет соотношениям (1.3)–(1.6).

Теорема 4.1. *Пусть выполняются предположения* I, II, *условия* (i) *теоремы* 3.1 *и* (vi) *теоремы* 3.3. *Пусть также* $\partial\Omega \subset C^2$, $f_k \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, $u_0, u_T \in L^2(\Omega)$, $\beta_k \in C^1\big([0,T]; W_2^{3/2}(\partial\Omega)\big)$, $k = 1,2$. *Тогда задача* 1 *имеет единственное решение* $\{u_1, u_2\} \in W_1$. *Для* u_1 *и* u_2 *справедливы оценки*

$$\max_{t\in[0,T]}[\|u_1\|_M + \|u_2\|_M] \le C_{29}\{\max_{t\in[0,T]}[\|\beta_1\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)} + \|\beta_2\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)}] + \|u_0\| + \|u_1\| + \|f_1\|_{L^2(Q_T)} + \|f_2\|_{L^2(Q_T)}\}, \quad (4.1)$$

$$\max_{t\in[0,T]}[\|u_{1t}\|_M + \|u_{2t}\|_M] \le C_{30}\{\|\beta_1\|_{C^1([0,T];W_2^{3/2}(\partial\Omega))} + \|\beta_2\|_{C^1([0,T];W_2^{3/2}(\partial\Omega))} + \|u_0\| + \|u_1\| + \max_{t\in[0,T]}\{\|f_1\| + \|f_2\|\}\} \quad (4.2)$$

с некоторыми положительными постоянными C_{29} *и* C_{30}.

Доказательство проведем в два этапа. На первом этапе установим существование и единственность решения задачи (1.3), (1.5), (1.6) как обратной задачи восстановления неизвестной функции источника U_2 с финальным условием переопределения на u_1 при $t = T$. На втором этапе найдем u_2 как решение задачи для уравнения (1.4) с граничными данными (1.6) при условии, что известны u_1 и U_2.

Обозначим через h_1 решение задачи $M_1h_1 = 0$, $h_1|_{\partial\Omega} = \beta_1$ и введем функцию $w_1 = u_1 - h_1$. Записывая (1.3), (1.5), (1.6) в терминах w_1, приходим к следующей обратной задаче отыскания пары функций (w_1, AU_2):

$$M_1w_{1t} + M_2w_1 = \tilde g_1(x, \bar w_1) + \tilde g_2(x, \bar w_1)AU_2 + f_1 - M_2h_1, \quad (4.3)$$

$$M_1w_1|_{t=0} = u_0(x), \quad (4.4)$$

$$M_1w_1|_{t=T} = u_T(x), \quad (4.5)$$

$$w_1|_{S_T} = 0, \quad (4.6)$$

где $\bar y = T^{-1}\int\limits_0^T y\,dt$ для $y \in L^1(0,T)$, $\tilde g_k(x, \bar w_1) = g_k(x, \bar w_1 + \bar h_1)$, $k = 1,2$.

Согласно теореме 3.3 эта задача имеет единственное решение, при этом $w_1 \in C^1([0,T]; W)$, $AU_2 \in L^2(\Omega)$ и для w_1 справедливы оценки

$$\max_{t\in[0,T]}\|w_1\|_M \le C_{22}[\|u_T\| + \|u_0\| + \|f_1 - M_1h_1\|_{L^2(Q_T)}], \quad (4.7)$$

$$\max_{t\in[0,T]}\|w_{1t}\|_M \le C_{23}[\|u_T\|+\|u_0\|+\max_{t\in[0,T]}\|f_1-M_1h_1\|]. \tag{4.8}$$

Из условий теоремы и гладкости w_1 следует, что $u_1\in C^1\big([0,T];W_2^2(\Omega)\big)$. Так как для любого целого $\kappa>1$ и $v\in W_2^{2\kappa}(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\|v\|_{2\kappa}\le\sigma\|v\|_{W_2^{2\kappa-1/2}(\partial\Omega)} \tag{4.9}$$

(см. [18, гл. 2]), где константа $\sigma>0$ зависит от n и $\operatorname{mes}\Omega$, соотношения (4.7)–(4.9) позволяют вывести оценки для u_1 и u_{1t}:

$$\max_{t\in[0,T]}\|u_1\|_M\le C_{31}\{\|u_0\|+\|u_1\|+\max_{t\in[0,T]}\|\beta_1\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)}+\|f_1\|_{L^2(Q_T)}\}, \tag{4.10}$$

$$\max_{t\in[0,T]}\|u_{1t}\|_M\le C_{32}\{\|u_0\|+\|u_1\|+\|\beta_1\|_{C^1([0,T];W_2^{3/2}(\partial\Omega))}+\max_{t\in[0,T]}\|f_1\|\}. \tag{4.11}$$

Здесь положительные постоянные C_{31} и C_{32} зависят от n, T, σ, α, k_m, K_m, $\operatorname{mes}\Omega$, C_1, C_2 и C_3.

Проинтегрируем (1.3) и (1.4) по t на $[0,T]$. Это дает

$$\delta u_1+M_2\bar u_1=g_1(x,U_1)+g_2(x,U_1)AU_2+\bar f_1, \tag{4.12}$$

$$L_1(u_2(T,x)-u_2(0,x))+L_2U_2=BU_1+\int_0^T(\gamma(x,u_1)+f_2)\,dt, \tag{4.13}$$

где $\delta u_1=T^{-1}(u_T(x)-u_0(x))$. Выразим U_2 из (4.12):

$$U_2=A^{-1}[(\delta u_1+M_2\bar u_1-g_1(x,U_1)-\bar f_1)(g_2(x,U_1))^{-1}]\equiv A^{-1}\psi(x), \tag{4.14}$$

и подставим в (4.13). Имеем

$$L_1(u_2(T,x)-u_2(0,x))=-L_2A^{-1}\psi+BU_1+\int_0^T(\gamma(x,u_1)+f_2)\,dt\equiv\Phi(x). \tag{4.15}$$

В силу (4.14) теоремы вложения и гладкости входных данных $A^{-1}\psi(x)\in W_2^2(\Omega)$ и $\Phi\in L^2(\Omega)$. Обозначая через h_2 решение задачи $L_1h_2=0$, $h_2|_{\partial\Omega}=\beta_2$ и переписывая (1.4) относительно функции $w_2=u_2-h_2$, приходим к задаче (2.1), (2.3), (3.5) для w_2 с операторами L_k вместо M_k, $k=1,2$, где $F(t,x)=-L_2h_2+Bu_1+\gamma(x,u_1)+f_2(t,x)$ и $\varphi(x)=\Phi(x)-L_1(h_2(T,x)-h_2(0,x))$. Согласно теореме 3.1 эта задача имеет единственное решение $w_2\in C^1([0,T];W)$. Следовательно, существует единственное решение $u_2\in C^1\big([0,T];W_2^2(\Omega)\big)$ задачи (1.4), (1.6), (4.15). Ввиду (3.4), (3.6), (3.7), (4.9)–(4.11) и определения w_2 справедливы оценки

$$\max_{t\in[0,T]}\|u_2\|_M\le C_{33}\{\max_{t\in[0,T]}[\|\beta_1\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)}+\|\beta_2\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)}]+\|u_0\|+\|u_1\| \\ +\|f_1\|_{L^2(Q_T)}+\|f_2\|_{L^2(Q_T)}\}, \tag{4.16}$$

$$\max_{t\in[0,T]}\|u_{2t}\|_M\le C_{34}\{\|\beta_1\|_{C^1([0,T];W_2^{3/2}(\partial\Omega))}+\|\beta_2\|_{C^1([0,T];W_2^{3/2}(\partial\Omega))} \\ +\|u_0\|+\|u_1\|+\max_{t\in[0,T]}\{\|f_1\|+\|f_2\|\}\}, \tag{4.17}$$

где положительные константы C_{33} и C_{34} зависят от T, α, σ, ν_1, ν_2, C_i, $i=1,2,3$, C_{31}, C_{32}. Неравенства (4.10), (4.11), (4.16), (4.17), в свою очередь, приводят к оценкам (4.1) и (4.2) с $C_{29}=C_{31}+C_{33}$ и $C_{30}=C_{32}+C_{34}$. Теорема доказана.

Рассмотрим задачу 1 с тождественным оператором A. В этом случае под решением задачи 1 будем понимать пару функций $\{u_1,u_2\}$ из класса $W_2=\big\{\{v_1,v_2\}\mid v_1\in C^1\big([0,T];W_2^4(\Omega)\big),\ v_2\in C^1\big(0,T;W_2^2(\Omega)\big)\big\}$, которая удовлетворяет соотношениям (1.3)–(1.6).

Теорема 4.2. *Пусть* $\partial\Omega \in C^4$, *выполняются условия* (iii) *теоремы* 3.2 *и* (viii) *теоремы* 3.4, *предположения* I, II *относительно операторов* L_k *и* B, $k = 1, 2$, $f_1 \in C\big([0,T]; W_2^2(\Omega) \cap H^r(\overline{\Omega})\big)$, $\beta_1 \in C^1\big([0,T]; H^{r+2}(\partial\Omega) \cap W_2^{7/2}(\partial\Omega)\big)$, $u_0, u_T \in H^r(\overline{\Omega}) \cap W_2^2(\Omega)$, $0 < r < 1$, $f_2 \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, $\beta_2 \in C^1\big(0,T; W_2^{3/2}(\partial\Omega)\big)$. *Тогда задача* 1 *имеет единственное решение* $\{u_1, u_2\} \in W_2$ *и справедливы оценки*

$$\max_{t\in[0,T]}(\|u_1\|_4 + \|u_2\|_2) \le C_{35}\{\max_{t\in[0,T]}[\|\beta_1\|_{W_2^{7/2}(\partial\Omega)} + \|\beta_2\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)}] + \|u_0\|_2 + \|u_1\|_2 + \|f_1\|_{L^2(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|f_2\|_{L^2(Q_T)}\}, \quad (4.18)$$

$$\max_{t\in[0,T]}(\|u_{1t}\|_4 + \|u_{2t}\|_2) \le C_{36}\{\|\beta_1\|_{C^1([0,T];W_2^{7/2}(\partial\Omega))} + \|\beta_2\|_{C^1([0,T];W_2^{3/2}(\partial\Omega))} + \|u_0\|_2 + \|u_1\|_2 + \max_{t\in[0,T]}\{\|f_1\|_2 + \|f_2\|\}\}. \quad (4.19)$$

Доказательство. Воспользуемся той же схемой, что и при доказательстве теоремы 4.1. Рассмотрим снова задачу (1.3), (1.5), (1.6) как обратную задачу восстановления неизвестной функции источника U_2 и затем найдем функцию u_2 как решение задачи для (1.4) с граничными данными (1.6) при известных u_1 и U_2.

Обратимся к задаче (4.3)–(4.6) для функции w_1. По теореме 3.4 эта задача имеет единственное решение $w_1 \in C^1\big([0,T]; W_2^4(\Omega)\big)$ и справедливы оценки

$$\max_{t\in[0,T]}\|w_1\|_4 \le C'_{22}\left[\|u_T\|_2 + \|u_0\|_2 + \left(\int_0^T \|f_1 - M_2 h_1\|_2^2\,d\tau\right)^{1/2}\right], \quad (4.20)$$

$$\max_{t\in[0,T]}\|w_{1t}\|_4 \le C'_{23}[\|u_T\|_2 + \|u_0\|_2 + \max_{t\in[0,T]}\|f_1 - M_2 h_1\|_2]. \quad (4.21)$$

В силу гладкости w_1, (1.5), (4.9), (4.20) и (4.21) $u_1 \in C^1\big([0,T]; W_2^4(\Omega)\big)$ и имеют место оценки

$$\max_{t\in[0,T]}\|u_1\|_4 \le C_{37}\{\|u_0\|_2 + \|u_1\|_2 + \max_{t\in[0,T]}\|\beta_1\|_{W_2^{7/2}(\partial\Omega)} + \|f_1\|_{L^2(0,T;W_2^2(\Omega))}\}, \quad (4.22)$$

$$\max_{t\in[0,T]}\|u_{1t}\|_4 \le C_{38}\{\|u_0\|_2 + \|u_1\|_2 + \|\beta_1\|_{C^1([0,T];W_2^{7/2}(\partial\Omega))} + \max_{t\in[0,T]}\|f_1\|_2\}. \quad (4.23)$$

Здесь положительные константы C_{37} и C_{38} зависят от n, T, σ, α, k_m, K_m, $\operatorname{mes}\Omega$, C_1, C'_{22} и C'_{23}.

Проинтегрируем (1.3) по t на $[0,T]$ и выразим U_2 через u_1. Подставляя выражение для U_2 в уравнение (1.4), также проинтегрированное по t на $[0,T]$, получаем равенство

$$L_1(u_2(T,x) - u_2(0,x)) = -L_2\psi + BU_1 + \int_0^T (\gamma(x,u_1) + f_2(t,x))\,dt \equiv \Phi_1(x). \quad (4.24)$$

В условиях теоремы из гладкости u_1 вытекает, что $\psi(x) \in W_2^4(\Omega)$ и $\Phi_1 \in W_2^2(\Omega)$. Переписывая (1.4) как уравнение для w_2, снова приходим к задаче (2.1), (2.3), (3.5) относительно w_2 с операторами L_k вместо M_k, $k = 1, 2$, и такими же функциями $F(t,x)$ и $\varphi(x)$, как в теореме 4.1. Согласно теореме 3.2 эта задача имеет единственное решение $w_2 \in C^1([0,T]; W_2^4(\Omega))$. Следовательно, существует единственное решение $u_2 \in C^1([0,T]; W_2^2(\Omega))$ задачи (1.4), (1.6), (4.24). В силу определения w_2, (3.4), (4.9), (4.22) и (4.23) имеют место оценки

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_2\|_2 \le C_{39}\{\max_{t\in[0,T]}[\|\beta_1\|_{W_2^{7/2}(\partial\Omega)} + \|\beta_2\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)}] + \|u_0\|_2 + \|u_1\|_2 + \|f_1\|_{L^2(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|f_2\|_{L^2(Q_T)}\}, \quad (4.25)$$

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_{2t}\|_2 \le C_{40}\{\|\beta_1\|_{C^1([0,T];W_2^{7/2}(\partial\Omega))} + \|\beta_2\|_{C^1([0,T];W_2^{3/2}(\partial\Omega))} + \|u_0\|_2 + \|u_1\|_2 + \max_{t\in[0,T]}\{\|f_1\|_2 + \|f_2\|\}\}, \quad (4.26)$$

где положительные постоянные C_{39} и C_{40} зависят от T, α, σ, ν_1, ν_2, C_i, $i = 1, 2, 3$, C_{37}, C_{38}. Из неравенств (4.22), (4.23), (4.25) и (4.26) вытекают оценки (4.18) и (4.19) с $C_{34} = C_{37} + C_{39}$ и $C_{35} = C_{38} + C_{40}$. Теорема доказана.

Замечание 4.1. Теоремы 4.1 и 4.2 остаются справедливыми для задачи 1 с операторами M_1 и L_1 общего вида (1.1), (1.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дамаскин Б. Б., Петрий О. А.* Введение в электрохимическую кинетику. М.: Высш. школа, 1983.

2. *Вахрушев А. В., Молчанов Е. К.* Математическое моделирование процесса совместного электрохимического осаждения наночастиц AL_2O_3 в матрицу Cu. Ч. 1. Математическая модель // Химическая физика и мезоскопия. 2013. Т. 15, № 1. С. 57–64.

3. *Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых средах* // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, № 5. С. 852–864.

4. *Ting T. W.* Parabolic and pseudo-parabolic partial differential equations // J. Math. Soc. Japan. 1969. V. 21. P. 440–453.

5. *Showalter R. E., Ting T. W.* Pseudoparabolic partial differential equations // SIAM J. Math. Anal. 1970. V. 1. P. 1–26.

6. *Lyubanova A. Sh.* On the approximation of a parabolic inverse problem by pseudoparabolic one // Журн. Сиб. федер. ун-та. Сер. Математика и физика. 2012. V. 53. P. 326–336.

7. *Джумабаев Д. С., Бакирова Е. А.* О признаках однозначной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 9. С. 1125–1140.

8. *Нахушев А. М.* Уравнения математической физики. М.: Высш. школа, 1995.

9. *Кожанов А. И.* Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и связанной с ним обратной задаче // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 6. С. 840–853.

10. *Кожанов А. И.* Линейные обратные задачи для одного класса вырождающихся уравнений соболевского типа // Вестн. ЮУрГУ. (Сер. Математическое моделирование и программирование. Вып. 11). 2012. № 5. С. 33–42.

11. *Rundell W.* Determination of an unknown nonhomogeneous term in a linear partial differential equation from overspecified boundary data // Appl. Anal. 1980. V. 10. P. 231–242.

12. *Дженалиев М. Т. Рамазанов М. И. О граничной задаче для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности. I* // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 527–547.

13. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.

14. *Vlasii O. D., Ptashnik B. I.* A problem with nonlocal conditions for partial differential equations unsolved with respect to the leading derivative // Ukr. Math. J. 2003. V. 55, N 8. P. 1238–1253.

15. *Гальперн С. А.* Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными // Тр. Моск. мат. о-ва. 1960. Т. 9. С. 401–423.

16. *Демиденко Г. В.* Задача Коши для псевдопараболических систем // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 6. С. 1251–1266.

17. *Lyubanova A. Sh.* On nonlocal problems for systems of parabolic equations // J. Math. Anal. Appl. 2015. V. 421. P. 1767–1778.
18. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
19. *Шелухин В. В. Задача со средними по времени данными для нелинейных параболических уравнений* // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 2. С. 154–165.
20. *Либерман Г. М.* Нелокальные задачи для квазилинейных параболических уравнений // Нелинейные задачи математической физики и смежные вопросы: в честь акад. О. А. Ладыженской. Новосибирск, 2002. Т. 1. С. 233–254.
21. *Lions J.-L., Magenes E.* Problemes aux limites non homogenes et applications. Paris: Dunod, 1968. V. 1. (Trav. Rech. Math.; 17).

Статья поступила 25 августа 2014 г.

Любанова Анна Шоломовна
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
lubanova@mail.ru