Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2015. Том 56, № 6

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С СУБМОДУЛЯРНЫМИ СИЛОВСКИМИ ПОДГРУППАМИ

В. А. Васильев

Аннотация. Подгруппа H конечной группы G называется *субмодулярной в* G, если H можно соединить с группой G цепью подгрупп, каждая из которых модулярна в следующей. Получены свойства групп с субмодулярными силовскими подгруппами. Группа называется *сильно сверхразрешимой*, если она сверхразрешима и любая силовская подгруппа субмодулярна в ней. Установлено, что группа сильно сверхразрешима тогда и только тогда, когда группа метанильпотентна и любая ее силовская подгруппа субмодулярна в ней. Доказано, что следующие утверждения эквивалентны: 1) в группе всякая силовская подгруппа субмодулярна; 2) группа дисперсивна по Оре и любая ее бипримарная подгруппа сильно сверхразрешима; 3) любая метанильпотентная подгруппа группы сильно сверхразрешима.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.606

Ключевые слова: конечная группа, модулярная подгруппа, субмодулярная подгруппа, сильно сверхразрешимая группа, дисперсивная по Оре группа.

Введение

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны. Центральное место в теории групп занимает понятие нормальной подгруппы. Одним из его обобщений является понятие модулярной подгруппы, т. е. модулярного элемента в смысле Куроша [1, гл. 2, с. 43] решетки всех подгрупп группы. Напомним, что подгруппа M группы G называется *модулярной* в G, если выполняются следующие условия:

1) $\langle X, M \cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ для всех $X \le G, Z \le G$ таких, что $X \le Z$,

2) $\langle M, Y \cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle \cap Z$ для всех $Y \le G, Z \le G$ таких, что $M \le Z$.

Свойства модулярных подгрупп исследованы в [1]. Группы, у которых все подгруппы модулярны, изучались Шмидтом [1, 2] и Циммерман [3]. По аналогии с субнормальной подгруппой в [3] было введено понятие субмодулярной подгруппы.

Определение [3]. Подгруппа H группы G называется *субмодулярной* в G, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \le H_1 \le \dots \le H_{s-1} \le H_s = G$ такая, что H_{i-1} — модулярная подгруппа в H_i для $i = 1, \dots, s$.

Если $H \ne G$, то цепь можно уплотнить до максимальных модулярных подгрупп.

Хорошо известно, что в нильпотентной группе любая силовская подгруппа нормальна (субнормальна). В [3] исследовались группы с субмодулярными подгруппами. В частности, доказано, что в сверхразрешимой группе G любая силовская подгруппа субмодулярна тогда и только тогда, когда $G/F(G)$ —

абелева группа экспоненты, свободной от квадратов простых чисел. Найден критерий субмодулярности силовских подгрупп в произвольной группе.

Настоящая работа посвящена дальнейшему изучению групп с субмодулярными силовскими подгруппами. Группу будем называть *сильно сверхразрешимой*, если она сверхразрешима и любая силовская подгруппа субмодулярна в ней. Через $\mathfrak{B}$ обозначается класс всех абелевых групп экспоненты, свободной от квадратов простых чисел. Доказаны следующие теоремы.

Теорема A. *Класс всех сильно сверхразрешимых групп является наследственной насыщенной формацией и имеет локальный экран f такой, что $f(p) = \mathfrak{A}(p-1) \cap \mathfrak{B}$ для любого простого числа p.*

Теорема B. *Группа G сильно сверхразрешима тогда и только тогда, когда G метанильпотентна и любая силовская подгруппа из G субмодулярна в G.*

Теорема C. *Класс всех групп с субмодулярными силовскими подгруппами является наследственной насыщенной формацией и имеет локальный экран f такой, что $f(p) = (G \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{A}(p-1) \cap \mathfrak{B})$ для любого простого числа p.*

Теорема D. *Пусть G — группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *в G всякая силовская подгруппа субмодулярна;*

(2) *G дисперсивна по Оре и любая ее бипримарная подгруппа сильно сверхразрешима;*

(3) *любая метанильпотентная подгруппа из G сильно сверхразрешима.*

1. Предварительные результаты

Используются определения и обозначения из [4, 5]. Напомним некоторые из них.

Через $\mathrm{Syl}_p(G)$ обозначается множество всех силовских p-подгрупп группы G для некоторого простого числа p; $\mathrm{Syl}(G)$ — множество всех силовских подгрупп из G; M_G — ядро подгруппы M в G, т. е. пересечение всех подгрупп, сопряженных с M в G; $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G, т. е. произведение всех нормальных нильпотентных подгрупп группы G; $F_p(G)$ — p-нильпотентный радикал группы G, т. е. произведение всех нормальных p-нильпотентных подгрупп группы G, p — некоторое простое число.

Группа G порядка $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_n^{n_k}$ называется *дисперсивной по Оре* [4, с. 251], если $p_1 > p_2 > \dots > p_n$ и G имеет нормальную подгруппу порядка $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_n^{n_i}$ для любого $i = 1, 2, \dots, k$.

Используются следующие обозначения: $\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп; $\mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп; $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп; $\mathfrak{A}(p-1)$ — класс всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$. Через $\mathscr{M}(\mathfrak{X})$ обозначается класс всех минимальных не $\mathfrak{X}$-групп, т. е. групп G, у которых классу групп $\mathfrak{X}$ принадлежат все собственные подгруппы из G, а $G \notin \mathfrak{X}$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если выполняются следующие условия: 1) каждая фактор-группа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$; 2) из $A \trianglelefteq H$, $B \trianglelefteq H$, $H/A \in \mathfrak{F}$ и $H/B \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $H/A \cap B \in \mathfrak{F}$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется: 1) *наследственной*, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит и все ее подгруппы; 2) *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Для непустой формации $\mathfrak{F}$ через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

Всякая функция $f : \mathbb{P} \to \{$формации$\}$ называется *локальным экраном.* Формация $\mathfrak{F}$ называется *локальной*, если существует локальный экран f такой, что $\mathfrak{F}$ совпадает с классом групп $(G|G/C_G(H/K) \in f(p)$ для любого главного фактора H/K группы G и $p \in \pi(H/K))$, при этом используется обозначение $\mathfrak{F} = LF(f)$.

Напомним, что собственная подгруппа H группы G называется *максимальной модулярной* в G, если H модулярна в G и из $H \leq M < G$ всегда следует $H = M$ для любой модулярной в G подгруппы M.

Лемма 1.1 [3, лемма 1]. *Пусть G — группа и $T \leq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если T субмодулярна в G и U — подгруппа из G, то $U \cap T$ — субмодулярная в U подгруппа;*

2) *если T субмодулярна в G, N нормальна в G и $N \leq T$, то T/N субмодулярна в G/N;*

3) *если T/N субмодулярна в G/N, то T субмодулярна в G;*

4) *если T субмодулярна в G, то T^x субмодулярна в G для любого $x \in G$;*

5) *если T_1 и T_2 — субмодулярные в G подгруппы, то $T_1 \cap T_2$ — субмодулярная в G подгруппа;*

6) *если T субмодулярна в G, то TN субмодулярна в G для любой нормальной в G подгруппы N.*

Лемма 1.2 [2, лемма 1]. *Подгруппа M группы G является максимальной модулярной подгруппой в G тогда и только тогда, когда либо M — максимальная нормальная подгруппа в G, либо G/M_G неабелева порядка pq, где p и q — простые числа.*

Лемма 1.3 [6, лемма 2]. *Пусть $G = AB$ — произведение нильпотентных подгрупп A, B и G имеет минимальную нормальную подгруппу N такую, что $N = C_G(N) \neq G$. Тогда*

1) *$A \cap B = 1$;*

2) *$N \subseteq A \cup B$;*

3) *если $N \leq A$, то A — p-группа для некоторого простого числа p и B — p'-группа.*

Лемма 1.4 [4, лемма 3.9 (1)]. *Если H/K — главный фактор группы G и $p \in \pi(H/K)$, то $G/C_G(H/K)$ не содержит неединичных нормальных p-подгрупп, причем $F_p(G) \leq C_G(H/K)$.*

Теорема 1.5 [7, теорема 1.4]. *Пусть H/K — p-главный фактор группы G. Тогда и только тогда $|H/K| = p$, когда $\mathrm{Aut}_G(H/K)$ — абелева группа экспоненты, делящей $p - 1$.*

Теорема 1.6 [5, гл. IV, теорема 4.6]. *Формация насыщенна тогда и только тогда, когда она локальна.*

Лемма 1.7 [4, лемма 4.5]. *Пусть f — локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Группа G тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{F}$, когда $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.*

Нам потребуется следующее свойство класса всех сверхразрешимых групп (см., например, [4, гл. I, § 4] или [5, гл. IV, разд. 3]).

Лемма 1.8. *Класс всех сверхразрешимых групп имеет локальный экран f такой, что $f(p) = \mathfrak{A}(p - 1)$ для любого простого p.*

2. Сильно сверхразрешимые группы

Лемма 2.1. *Пусть p — наибольший простой делитель $|G|$ и $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Если P — субмодулярная подгруппа в G, то P нормальна в G.*

Доказательство. Будем использовать индукцию по $|G|$. Можно считать, что $P \neq G$ и существует цепь подгрупп $P = H_0 < H_1 < \dots < H_{s-1} < H_s = G$ такая, что H_{i-1} — максимальная модулярная в H_i подгруппа для $i = 1, \dots, s$. По индукции P нормальна в $H_{s-1} = M$. По лемме 1.2 либо M нормальна в G, либо G/M_G неабелева порядка rq, где r и q — простые числа. В первом случае P нормальна в G. Поэтому пусть $|G/M_G| = rq$ и G/M_G неабелева. Отсюда следует, что $|G : M|$ — простое число, отличное от p. Тем самым можно считать, что $|G : M| = q \neq p$. Если $N_G(P) \neq G$, то по теореме Силова $|G : M| = |G : N_G(P)| = q \equiv 1 \pmod p$. Получили противоречие с $q < p$. Поэтому $N_G(P) = G$. Лемма доказана.

Следствие 2.1.1 [3, предложение 9]. *Если в группе G любая силовская подгруппа субмодулярна в G, то G дисперсивна по Оре.*

Определение 2.2. Группу будем называть *сильно сверхразрешимой*, если она сверхразрешима и любая силовская подгруппа субмодулярна в ней.

Обозначим через $s\mathfrak{U}$ класс всех сильно сверхразрешимых групп.

Предложение 2.3 [3, предложение 10]. *Группа G сильно сверхразрешима тогда и только тогда, когда G сверхразрешима и $G/F(G)$ — абелева группа экспоненты, свободной от квадратов простых чисел.*

Везде в работе обозначим через $\mathfrak{B}$ класс всех абелевых групп экспоненты, свободной от квадратов простых чисел.

Лемма 2.4. *Класс групп $\mathfrak{B}$ является наследственной формацией.*

Доказательство. Ясно, что если $G \in \mathfrak{B}$, то $H \in \mathfrak{B}$ и $G/N \in \mathfrak{B}$ для любой подгруппы H и любой нормальной подгруппы N из G.

Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что $G/N_i \in \mathfrak{B}$, $N_i \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$, а $G/N_1 \cap N_2 \notin \mathfrak{B}$.

Если $N_1 \cap N_2 \neq 1$, то в $N_1 \cap N_2$ найдется нетривиальная нормальная в G подгруппа K. Из $|G/K| < |G|$ и $G/K/N_i/K \simeq G/N_i \in \mathfrak{B}$, $i = 1, 2$, следует, что $G/K/(N_1/K \cap N_2/K) \simeq G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{B}$. Это противоречит выбору G.

Пусть $N_1 \cap N_2 = 1$. Так как $\mathfrak{A}$ — формация и $G/N_i \in \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, то $G \in \mathfrak{A}$. Покажем, что экспонента G свободна от квадратов простых чисел. Пусть z — элемент порядка q^n из G, где q — простое число, и $Z = \langle z \rangle$. Допустим, что $Z \cap N_1 \neq 1$ и $Z \cap N_2 \neq 1$. Поскольку Z — циклическая q-группа, найдется $i \in \{1, 2\}$ такое, что $Z \cap N_i \leq Z \cap N_{3-i}$. Отсюда получаем противоречие: $1 \neq Z \cap N_i \leq (Z \cap N_1) \cap (Z \cap N_2) = 1$. Значит, $Z \cap N_j = 1$ для некоторого $j \in \{1, 2\}$. Тогда из $G/N_j \in \mathfrak{B}$ и $ZN_j/N_j \simeq Z$ следует, что $n < 2$ и $G \in \mathfrak{B}$. Лемма доказана.

Заметим, что класс групп $\mathfrak{B}$ не насыщен. Например, циклическая группа $G = \langle z \mid z^4 = 1 \rangle$ не принадлежит $\mathfrak{B}$, хотя $G/\Phi(G)$ принадлежит $\mathfrak{B}$.

Лемма 2.5. *Пусть G — группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если G сильно сверхразрешима, то и любая подгруппа из G сильно сверхразрешима;*

2) *если G сильно сверхразрешима и $N \trianglelefteq G$, то G/N сильно сверхразрешима;*

3) *если* $N_i \trianglelefteq G$ *и* G/N_i *сильно сверхразрешима для* $i = 1, 2$, *то* $G/N_1 \cap N_2$ *сильно сверхразрешима;*

4) *если* $H_i \trianglelefteq G$, H_i *сильно сверхразрешима,* $i = 1, 2$, *и* $H_1 \cap H_2 = 1$, *то* $H_1 \times H_2$ *сильно сверхразрешима;*

5) *если* $G/\Phi(G)$ *сильно сверхразрешима, то* G *сильно сверхразрешима.*

Доказательство. Покажем справедливость утверждений 1 и 2. Пусть $G \in s\mathfrak{U}$, $H \leq G$ и $N \trianglelefteq G$. Из сверхразрешимости G следует сверхразрешимость H и G/N. Пусть $S \in \mathrm{Syl}_p(H)$ и $R/N \in \mathrm{Syl}_q(G/N)$. Тогда в G найдется $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ такая, что $S = P \cap H$, и найдется $Q \in \mathrm{Syl}_p(G)$ такая, что $R/N = QN/N$. По утверждению 1 леммы 1.1 S субмодулярна в H. Ввиду утверждений 6 и 2 леммы 1.1 R/N субмодулярна в G/N. Значит, $H \in s\mathfrak{U}$ и $G/N \in s\mathfrak{U}$.

Докажем утверждение 3. Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что $N_i \trianglelefteq G$ и $G/N_i \in s\mathfrak{U}$ для $i = 1, 2$, а $G/N_1 \cap N_2 \notin s\mathfrak{U}$. Так как $\mathfrak{U}$ — формация, $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{U}$.

Если $N_1 \cap N_2 \neq 1$, то возьмем из $N_1 \cap N_2$ нетривиальную подгруппу $K \trianglelefteq G$. Из выбора G и $G/K/N_i/K \simeq G/N_i \in s\mathfrak{U}$ для $i = 1, 2$ следует, что $G/K/(N_1/K \cap N_2/K) \simeq G/N_1 \cap N_2 \in s\mathfrak{U}$. Это противоречит выбору G.

Пусть $N_1 \cap N_2 = 1$. Для любой силовской p-подгруппы P группы G фактор-группа PN_i/N_i принадлежит $\mathrm{Syl}_p(G/N_i)$, $i = 1, 2$. Из сильной сверхразрешимости G/N_i следует, что PN_i/N_i субмодулярна в G/N_i, $i = 1, 2$. По утверждению 3) леммы 1.1 PN_i субмодулярна в G, $i = 1, 2$. Из свойств силовских подгрупп и утверждения 5 леммы 1.1 вытекает, что $PN_1 \cap PN_2 = P(N_1 \cap N_2) = P$ субмодулярна в G. Значит, $G \in s\mathfrak{U}$. Это противоречит выбору G. Утверждение 3 доказано.

Утверждение 4 следует из 3.

Докажем утверждение 5. Пусть $G/\Phi(G) \in s\mathfrak{U}$. Из $s\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{U}$ и насыщенности класса групп $\mathfrak{U}$ получаем, что $G \in \mathfrak{U}$. Поэтому $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$. Тогда $G/F(G) \simeq G/\Phi(G)/F(G/\Phi(G)) \in \mathfrak{B}$. По предложению 2.3 $G \in s\mathfrak{U}$. Лемма доказана.

Предложение 2.6. *Пусть группа* $G = AB$ — *произведение нильпотентных подгрупп* A *и* B. *Если* A *и* B *субмодулярны в* G, *то* G *сильно сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть G — контрпример минимального порядка к теореме. Тогда по теореме Виландта — Кегеля [8, 9] G разрешима. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа из G. Тогда $AN/N \simeq A/A \cap N \in \mathfrak{N}$, $BN/N \simeq B/B \cap N \in \mathfrak{N}$. По утверждениям 6 и 2 леммы 1.1 AN/N и BN/N субмодулярны в G/N. Из выбора G следует, что $G/N \in s\mathfrak{U}$. Ввиду утверждений 3 и 5 леммы 2.5 заключаем, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $\Phi(G) = 1$. Тогда $G = MN$, где M — максимальная подгруппа в G, $M \cap N = 1$, $N = C_G(N)$ и $|N| = p^n$ для некоторого простого числа p. По утверждению 1 леммы 1.3 $A \cap B = 1$. Из $N \subseteq A \cup B$ вытекает, что либо $N \leq A$, либо $N \leq B$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $N \leq A$. Тогда по утверждению 3 леммы 1.3 A — p-подгруппа, B — p'-подгруппа.

Пусть q — наибольший простой делитель $|G|$. Если $q \neq p$, то B содержит некоторую силовскую q-подгруппу Q группы G. Из $Q \trianglelefteq B$ и субмодулярности B в G следует, что Q субмодулярна в G. По лемме 2.1 $Q \trianglelefteq G$. Тогда $N \leq Q$. Получили противоречие с $q \neq p$. Итак, $q = p$. Ввиду леммы 2.1 $A \trianglelefteq G$. По лемме 1.4 $O_p(M) = 1$. Тогда $M \cap A = 1$ и $A = N$, B — максимальная подгруппа группы G и ядро $B_G = 1$. Отсюда B — максимальная модулярная подгруппа в

G. Ввиду $B_G = 1$ из леммы 1.2 заключаем, что $|G| = pr$, где r — простое число $p \neq r$. Поэтому $G \in s\mathfrak{U}$. Противоречие с выбором G. Предложение доказано.

В предложении 2.6 нельзя отбросить субмодулярность одной из подгрупп.

Пример 2.7. В группе $G = AB$, где $A \simeq Z_{17}$ и $B \simeq \mathrm{Aut}(Z_{17}) \simeq Z_{16}$, подгруппа A субмодулярна, а подгруппа B ввиду леммы 1.2 не субмодулярна в G. Группа G сверхразрешима, но не сильно сверхразрешима. Это означает, что $s\mathfrak{U} \neq \mathfrak{U}$.

Доказательство теоремы А. По утверждениям 1–3 и 5 леммы 2.5 $s\mathfrak{U}$ — наследственная насыщенная формация.

Так как $f(p) = \mathfrak{A}(p-1) \cap \mathfrak{B}$ — формация, f — локальный экран. Пусть локальная формация $LF(f)$ определяется экраном f. Покажем, что $s\mathfrak{U} = LF(f)$.

Пусть $G \in s\mathfrak{U}$ и H/K — любой ее главный фактор. Из $G/F(G) \in \mathfrak{B}$ и $F(G) \leq C_G(H/K)$ следует, что $G/C_G(H/K) \in \mathfrak{B}$. Поскольку G сверхразрешима, $|H/K| = p$ — некоторое простое число. По лемме 1.5 $G/C_G(H/K) \in \mathfrak{A}(p-1)$. Значит, $G/C_G(H/K) \in f(p)$. Тогда $G \in LF(f)$ и $s\mathfrak{U} \subseteq LF(f)$.

Пусть теперь $G \in LF(f)$. Тогда $G/C_G(H/K) \in f(p) = \mathfrak{A}(p-1) \cap \mathfrak{B}$ для любого главного фактора H/K группы G и $p \in \pi(H/K)$. Ввиду леммы 1.8 G сверхразрешима. Так как $\mathfrak{B}$ — формация, заключаем, что $G/F(G) \in \mathfrak{B}$. Поэтому $LF(f) \subseteq s\mathfrak{U}$. Итак, $LF(f) = s\mathfrak{U}$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы В. Необходимость следует из того, что сильно сверхразрешимая группа сверхразрешима, а значит, имеет нильпотентный коммутант, т. е. метанильпотентна.

Достаточность. Пусть существуют метанильпотентные группы, у которых силовские подгруппы субмодулярны в группе, а группа не является сильно сверхразрешимой. Выберем из них группу G наименьшего порядка. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда $G/N \in s\mathfrak{U}$ ввиду выбора G. Так как по теореме A класс $s\mathfrak{U}$ — насыщенная формация, N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $\Phi(G) = 1$. Поэтому $N = C_G(N)$ и $G = NM$, где M — максимальная подгруппа группы G, $M \cap N = 1$. Из метанильпотентности G и $N = F(G)$ следует, что $G/N \simeq M \in \mathfrak{N}$. Пусть p — наибольший простой делитель $|G|$. Из дисперсивности по Оре группы G получаем, что N содержится в силовской p-подгруппе группы G. Ввиду $O_p(M) = 1$ заключаем, что $N \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и M — p'-группа. Пусть $S \in \mathrm{Syl}_q(M)$.

Если $G = SN$, то по предложению 2.6 G сильно сверхразрешима. Это противоречит выбору G.

Пусть $G \neq SN$ для любой $S \in \mathrm{Syl}_q(M)$. Обозначим $L = SN$. Тогда L сильно сверхразрешима по выбору G. Из $C_G(N) = N$ вытекает, что $O_{p'}(L) = 1$. Тогда $N = F_p(L)$. Из леммы 1.7 и теоремы А получаем, что $S \simeq L/F_p(L) \in \mathfrak{A}(p-1) \cap \mathfrak{B}$. Отсюда и из нильпотентности M следует, что $M \in \mathfrak{A}(p-1)$. Так как $N = F_p(G)$, заключаем, что $M \simeq G/F_p(G) \in \mathfrak{A}(p-1)$. По леммам 1.7 и 1.8 G сверхразрешима. По определению 2.2 G сильно сверхразрешима. Это противоречит выбору G. Теорема доказана.

3. Группы с субмодулярными силовскими подгруппами

Обозначим $sm\mathfrak{U} = (G \mid$ всякая силовская подгруппа группы G субмодулярна в $G)$.

Лемма 3.1. *Пусть G — группа. Справедливы следующие утверждения:*

1) *если $G \in sm\mathfrak{U}$ и $H \leq G$, то $H \in sm\mathfrak{U}$;*
2) *если $G \in sm\mathfrak{U}$ и $N \trianglelefteq G$, то $G/N \in sm\mathfrak{U}$;*
3) *если $N_i \trianglelefteq G$ и $G/N_i \in sm\mathfrak{U}$, $i = 1, 2$, то $G/N_1 \cap N_2 \in sm\mathfrak{U}$;*
4) *если $H_i \in sm\mathfrak{U}$, $H_i \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$, и $H_1 \cap H_2 = 1$, то $H_1 \times H_2 \in sm\mathfrak{U}$;*
5) *если $G/\Phi(G) \in sm\mathfrak{U}$, то $G \in sm\mathfrak{U}$.*

Доказательство. Справедливость утверждений 1 и 2 теоремы следует из утверждений 1, 2 и 6 леммы 1.1 ввиду того, что $H \cap G_p \in \mathrm{Syl}_p(H)$ для некоторой $G_p \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и $R/N = G_qN/N \in \mathrm{Syl}_q(G/N)$ для некоторой $G_q \in \mathrm{Syl}_q(G)$.

Докажем утверждение 3. Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что $G/N_i \in sm\mathfrak{U}$, $N_i \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$, а $G/N_1 \cap N_2 \notin sm\mathfrak{U}$.

Можно считать, что $N_1 \cap N_2 = 1$. Пусть $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Тогда $PN_i/N_i \in \mathrm{Syl}_p(G/N_i)$, $i = 1, 2$. Поэтому PN_i/N субмодулярна в G/N_i. По утверждению 3 леммы 1.1 PN_i субмодулярна в G. По свойству силовских подгрупп и ввиду утверждения 5 леммы 1.1 $PN_1 \cap PN_2 = P(N_1 \cap N_2) = P$ субмодулярна в G, т. е. $G \in sm\mathfrak{U}$. Это противоречие завершает доказательство утверждения 3.

Утверждение 4 следует из 3.

Докажем утверждение 5. Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что $G/\Phi(G) \in sm\mathfrak{U}$, а $G \notin sm\mathfrak{U}$. Тогда G разрешима ввиду следствия 2.1.1 и разрешимости $\Phi(G)$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Из $\Phi(G)N/N \subseteq \Phi(G/N)$ и утверждения 2 леммы заключаем, что $G/N/\Phi(G/N) \in sm\mathfrak{U}$. Так как $|G/N| < |G|$, фактор-группа $G/N \in sm\mathfrak{U}$. Из утверждения 3 леммы следует, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда $|N| = p^n$ для некоторого простого числа p и $O_{p'}(G) = 1$. Значит, $N \subseteq \Phi(G)$.

Пусть $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$. Из $QN/N \in \mathrm{Syl}_q(G/N)$ следует, что QN/N субмодулярна в G/N. Ввиду утверждения 2 леммы 1.1 QN субмодулярна в G.

Если $p = q$, то $QN = Q$ субмодулярна в G.

Пусть $p \neq q$. Рассмотрим два случая.

(1) $|\pi(G)| = 2$. Тогда $G/N = QN/N \cdot P/N$, где $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. По предложению 2.6 G/N сильно сверхразрешима. Так как по теореме A $s\mathfrak{U}$ является насыщенной формацией, из $G/\Phi(G) \simeq G/N/\Phi(G)/N \in s\mathfrak{U}$ вытекает, что $G \in s\mathfrak{U} \subseteq sm\mathfrak{U}$. Это противоречит выбору G.

(2) $|\pi(G)| > 2$. Тогда QN/N содержится в некоторой холловой $\{p, q\}$-подгруппе H/N из G/N и $H/N = QN/N \cdot R/N$, где $R/N \in \mathrm{Syl}_p(G/N)$. По утверждению 1 леммы $H/N \in sm\mathfrak{U}$. Поэтому силовская q-подгруппа QN/N и силовская p-подгруппа R/N группы H/N субмодулярны в H/N. По предложению 2.6 H/N сильно сверхразрешима. Так как по теореме A $s\mathfrak{U}$ — локальная формация и $H = QR$ — холлова $\{p, q\}$-подгруппа из G, применим следствие 16.2.3 из [4]. Из $H\Phi(G)/\Phi(G) \simeq H/H \cap \Phi(G) \simeq H/N/H \cap \Phi(G)/N \in s\mathfrak{U}$ следует, что $H \in s\mathfrak{U}$. По утверждению 1 леммы 2.5 $QN \in s\mathfrak{U}$. Тогда Q субмодулярна в QN, а значит, субмодулярна в G. Из произвольности выбора Q следует, что $G \in sm\mathfrak{U}$. Это противоречие завершает доказательство утверждения 5. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Класс групп* $(G \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{B})$ *является наследственной формацией.*

2. *Для любого простого числа* p *класс групп* $(G \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{A}(p-1) \cap \mathfrak{B})$ *является наследственной формацией.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Обозначим $\mathfrak{H} = (G \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{B})$. Ясно, что если $H \leq G \in \mathfrak{H}$ и $N \trianglelefteq G$, то $H \in \mathfrak{H}$ и $G/N \in \mathfrak{H}$.

Покажем индукцией по $|G|$, что если $N_i \trianglelefteq G$ и $G/N_i \in \mathfrak{H}$, $i = 1, 2$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{H}$. Если $K = N_1 \cap N_2 \neq 1$, то из $|G/K| < G$ и $G/K/N_i/K \simeq G/N_i \in \mathfrak{H}$ следует, что $G/K/(N_1/K \cap N_2/K) \simeq G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{H}$. Пусть $N_1 \cap N_2 = 1$ и $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Из $G/N_i \in \mathfrak{H}$ вытекает, что $PN_i/N_i \simeq P/P \cap N_i$ — элементарная абелева p-группа. Так как класс абелевых групп $\mathfrak{A}$ является формацией, $P/(P \cap N_1) \cap (P \cap N_2) \simeq P \in \mathfrak{A}$. Покажем, что P — элементарная абелева p-группа. Пусть $z \in P$, $|z| = p^n$ и $Z = \langle z \rangle$. Из $ZN_i/N_i \leq PN_i/N_i$ следует, что $|ZN_i/N_i| = |Z/Z \cap N_i| \leq p$. Поскольку $N_1 \cap N_2 = 1$, найдется $i \in \{1, 2\}$ такое, что $Z \cap N_i = 1$. Тогда $|Z| = p^n$, $n = 1$. Так как P является прямым произведением циклических подгрупп, получаем $P \in \mathfrak{B}$. Итак, $G \in \mathfrak{H}$.

Утверждение 2 доказывается аналогично с учетом того, что $\mathfrak{A}(p-1) \cap \mathfrak{B}$ — наследственная формация. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Локальная формация* $LF(f)$ *с локальным экраном* f *таким, что* $f(p) = (H \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(H) \subseteq \mathfrak{A}(p-1) \cap \mathfrak{B})$ *для любого простого* p, *является наследственной насыщенной формацией.*

Доказательство. По теореме 1.6 $LF(f)$ — насыщенная формация.

Докажем наследственность $LF(f)$. Пусть $G \in LF(f)$ и $R \leq G$. Тогда G обладает главным рядом $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_{n-1} < G_n = G$ таким, что $G/C_G(G_i/G_{i-1}) \in f(p)$ для любого простого $p \in \pi(G_i/G_{i-1})$, $i = 1, \dots, n$. Пусть $R_{i-1} = R \cap G_{i-1}$, $i = 1, \dots, n+1$, и $C_i = C_G(G_i/G_{i-1})$ и $C_i^* = C_R(R_i/R_{i-1})$, $i = 1, \dots, n$. Легко заметить, что $R \cap C_i \leq C_i^*$. Из $RC_i/C_i \leq G/C_i \in f(p)$ и наследственности $f(p)$ следует, что $RC_i/C_i \simeq R/R \cap C_i \in f(p)$. Тогда $R/C_i^* \simeq R/R \cap C_i/C_i^*/R \cap C_i \in f(p)$. Следовательно, $R/C_R(H/K) \in f(p)$ для любого главного фактора H/K группы R, и $p \in \pi(H/K)$. Значит, $R \in LF(f)$. Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Любая минимальная не* $sm\mathfrak{U}$*-группа является бипримарной минимальной не* $s\mathfrak{U}$*-группой.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathscr{M}(sm\mathfrak{U})$ и q — наименьший простой делитель $|G|$. Любая подгруппа H группы G принадлежит $sm\mathfrak{U}$. По следствию 2.1.1 H дисперсивна по Оре. Поэтому H q-нильпотентна. Рассмотрим два случая.

(1) G q-нильпотентна. Тогда $G = QP$, где $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$, $P \trianglelefteq G$ и P — холлова q'-подгруппа из G. Из $P \in sm\mathfrak{U}$ следует разрешимость P. Тогда из $G/P \simeq Q$ получаем разрешимость G.

Допустим, что $\Phi(G) = 1$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда $|N| = p^n$ для некоторого $p \in \pi(G)$. Группа G равна NM, где M — максимальная подгруппа группы G. Поскольку $G \in \mathscr{M}(sm\mathfrak{U})$ и $G/N \simeq M/M \cap N \in sm\mathfrak{U}$, то N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Пусть R — произвольная силовская r-подгруппа группы G. Из $G/N \in sm\mathfrak{U}$ заключаем, что RN/N субмодулярна в G/N. По утверждению 3 леммы 1.1 RN субмодулярна в G. Если $RN \neq G$, то из $RN \in sm\mathfrak{U}$ получаем, что R субмодулярна в G. Это противоречие с $G \notin sm\mathfrak{U}$. Следовательно, $RN = G$ —

бипримарная группа. Так как любая подгруппа T из G принадлежит $sm\mathfrak{U}$, по предложению 2.6 $T \in s\mathfrak{U}$. Из $s\mathfrak{U} \subseteq sm\mathfrak{U}$ следует, что $G \notin s\mathfrak{U}$, т. е. $G \in \mathscr{M}(s\mathfrak{U})$.

Пусть $\Phi(G) \neq 1$. Тогда $\Phi(G/\Phi(G)) = 1$. Из насыщенности $sm\mathfrak{U}$ следует, что $G/\Phi(G) \notin sm\mathfrak{U}$. Тогда $G/\Phi(G) \in \mathscr{M}(sm\mathfrak{U})$. По доказанному выше $G/\Phi(G)$ — бипримарная группа и $G/\Phi(G) \notin s\mathfrak{U}$. Значит, $G \in \mathscr{M}(s\mathfrak{U})$.

(2) G не q-нильпотентна. По теореме 5.4 из [10, гл. IV] $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{N})$. Поскольку любая подгруппа T из G нильпотентна, $T \in s\mathfrak{U}$. Тогда $G \in \mathscr{M}(s\mathfrak{U})$. Лемма доказана.

Напомним [11], что подгруппа H группы G называется K-$\mathbb{P}$-*субнормальной* в G, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{n-1} \leq H_n = G \tag{3.1}$$

такая, что либо H_{i-1} нормальна в H_i, либо $|H_i : H_{i-1}|$ есть простое число для любого $i = 1, \dots, n$.

Если $H = G$ или в цепи (3.1) индекс $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число для любого $i = 1, \dots, n$, то H называется $\mathbb{P}$-*субнормальной* в G [12].

Лемма 3.5. *Пусть H — субмодулярная силовская подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *H K-$\mathbb{P}$-субнормальна в G;*

2) *если G разрешима, то H $\mathbb{P}$-субнормальна в G.*

Доказательство. Утверждение 1 следует из леммы 1.2 и определения K-$\mathbb{P}$-субнормальной в G подгруппы.

Утверждение 2 вытекает из 1, так как в разрешимой группе K-$\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна. Лемма доказана.

Из леммы 3.5 следует, что $sm\mathfrak{U} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{U}$, где $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ — класс всех групп с $\mathbb{P}$-субнормальными силовскими подгруппами. Пример 2.7 показывает, что $sm\mathfrak{U} \neq \mathrm{w}\mathfrak{U}$.

Лемма 3.6. *Пусть G — группа, у которой всякая силовская подгруппа субмодулярна в G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *любая метанильпотентная подгруппа из G сильно сверхразрешима;*

2) *любая бипримарная подгруппа из G сильно сверхразрешима.*

Доказательство. Утверждение 1 вытекает из наследственности класса групп $sm\mathfrak{U}$ и теоремы B, утверждение 2 — из наследственности класса групп $sm\mathfrak{U}$ и предложения 2.6. Лемма доказана.

Доказательство теоремы C. По утверждениям 1–3 и 5 леммы 3.1 $sm\mathfrak{U}$ является наследственной насыщенной формацией.

Так как $f(p) = (G \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{A}(p-1) \cap \mathfrak{B})$ — формация, f — локальный экран. Пусть локальная формация $LF(f)$ определяется экраном f. Обозначим $\mathfrak{F} = LF(f)$. По теореме 2.10 в [12] класс групп $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ является локальной формацией и имеет локальный экран h такой, что $h(p) = (G \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{A}(p-1))$ для любого простого p. Поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Ввиду предложения 2.8 в [12] $\mathfrak{F}$ состоит из дисперсивных по Оре групп.

Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq sm\mathfrak{U}$. Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \backslash sm\mathfrak{U}$. По лемме 3.3 $\mathfrak{F}$ — наследственная формация. Поэтому G — минимальная не $sm\mathfrak{U}$-группа. Из $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$ и наследственности формации $sm\mathfrak{U}$ заключаем, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N, $N = C_G(N)$ — элементарная абелева p-группа для некоторого простого p, $\Phi(G) = 1$. Тогда

$G = NM$, где M — максимальная подгруппа из G. По лемме 1.4 $O_p(M) = 1$. Из дисперсивности по Оре G следует, что $N \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и p — наибольший простой делитель $|G|$. По лемме 3.4 G — бипримарная минимальная не $s\mathfrak{U}$-группа. Отсюда и из $G/C_G(N) \simeq M \in f(p)$ получаем, что M — элементарная абелева q-группа и q делит $(p-1)$. Из $\mathbb{P}$-субнормальности M в G следует, что $|G : M| = p$ и $|N| = p$. Тогда $M \simeq G/N$ изоморфно вкладывается в циклическую группу порядка $p-1$. Поэтому $|M| = q$. Значит, $G \in s\mathfrak{U} \subseteq sm\mathfrak{U}$. Противоречие с выбором G. Итак, $\mathfrak{F} \subseteq sm\mathfrak{U}$.

Докажем, что $sm\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть G — группа наименьшего порядка из $sm\mathfrak{U} \backslash \mathfrak{F}$. Так как $G \in sm\mathfrak{U}$, то G разрешима по следствию 2.1.1. Поскольку $sm\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — насыщенные формации, $\Phi(G) = 1$. В G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа $N = C_G(N) = F(G)$, $|N| = p^n$ для некоторого $p \in \pi(G)$. Группа G равна NM, где M — максимальная подгруппа в G, $N \cap M = 1$. По следствию 2.1.1 G дисперсивна по Оре. Тогда p — наибольший простой делитель $|G|$. Ввиду леммы 1.4 $N \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и M — p'-группа. Пусть $Q \in \mathrm{Syl}_q(M)$. Тогда $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$.

Предположим, что $QN \neq G$. В силу $QN \in sm\mathfrak{U}$ и предложения 2.6 QN сильно сверхразрешима. Из $N \leq F(QN)$, $N = C_G(N)$ и $O_{p'}(QN) = 1$ следует, что $N = F_p(QN)$. По лемме 1.7 $Q \simeq QN/F_p(QN) \in \mathfrak{A}(p-1) \cap \mathfrak{B}$. Тогда $M \in f(p)$ ввиду произвольности выбора Q. Из леммы 1.7 вытекает, что $G \in \mathfrak{F}$. Это противоречит выбору G.

Значит, $QN = G$. По предложению 2.6 G сильно сверхразрешима. По теореме A $G/C_G(N) = G/N \in \mathfrak{A}(p-1) \cap \mathfrak{B}$. Согласно лемме 1.7 $G \in \mathfrak{F}$. Это противоречит выбору G. Теорема доказана.

В [3] Циммерманн было показано, что группы с субмодулярными силовскими подгруппами имеют неограниченную нильпотентную длину, так же была получена характеризация таких групп.

Теорема D (см. введение) дает новый критерий принадлежности группы формации $sm\mathfrak{U}$.

Доказательство теоремы D. Обозначим через $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ следующие классы групп.

$\mathfrak{F} = (G \mid$ группа G дисперсивна по Оре и любая ее бипримарная подгруппа сильно сверхразрешима).

$\mathfrak{X} = (G \mid$ любая метанильпотентная подгруппа группы G сильно сверхразрешима).

Из утверждения 1 следует 2 ввиду следствия 2.1.1 и утверждения 2 леммы 3.6.

Докажем, что из утверждения 2 следует 3. Пусть G — группа наименьшего порядка, принадлежащая $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{X}$. Тогда G метанильпотентна.

Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $G/\Phi(G)$ дисперсивна по Оре. Пусть $T/\Phi(G)$ — любая бипримарная подгруппа из $G/\Phi(G)$ и $\pi(T/\Phi(G)) = \{q_1, q_2\}$. Поскольку T разрешима, в T существует холлова $\{q_1, q_2\}$-подгруппа L. Из $G \in \mathfrak{F}$ следует, что L сильно сверхразрешима. Отсюда $T/\Phi(G) = L\Phi(G)/\Phi(G) \simeq L/L \cap \Phi(G)$ сильно сверхразрешима. Значит, $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Из $|G/\Phi(G)| < |G|$ следует, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{X}$. Ввиду метанильпотентности G заключаем, что $G/\Phi(G)$ метанильпотентна. Поэтому $G/\Phi(G)$ сильно сверхразрешима. Ввиду утверждения 5 леммы 2.5 G сильно сверхразрешима. Тогда $G \in \mathfrak{X}$, что противоречит выбору G.

Допустим, что $\Phi(G) = 1$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM$. Так как $M \in \mathfrak{F}$ и $|M| < |G|$, заключаем, что $M \in \mathfrak{X}$. Отсюда и из метанильпотентности M следует, что $M \in s\mathfrak{U}$. Тогда $G/N \simeq M/M \cap N \in s\mathfrak{U}$. Из утверждения 3 леммы 2.5 вытекает, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда $M_G = 1$, $N = C_G(N)$ и $M \cap N = 1$. Заметим, что $F(G) = N = G^{\mathfrak{N}}$ и $G/N \simeq M \in \mathfrak{N}$. Ввиду дисперсивности по Оре G заключаем, что $P \trianglelefteq G$ для $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и наибольшего простого $p \in \pi(G)$. По лемме 1.4 $O_p(M) = 1$. Поэтому $P \cap M = 1$ и $N = P$.

Пусть Q — любая силовская q-подгруппа группы G. Из $G \in \mathfrak{F}$ получаем, что $QN \in s\mathfrak{U}$ и $QN \neq G$. Если $p = q$, то $Q = N \trianglelefteq G$, т. е. Q субмодулярна в G. Если $p \neq q$, то из $QN/N \leq G/N \in \mathfrak{N}$ следует, что $QN/N \trianglelefteq G/N$. Отсюда $QN \trianglelefteq G$. Из субмодулярности Q в QN вытекает субмодулярность Q в G. По теореме B группа G принадлежит $s\mathfrak{U}$. Поэтому $G \in \mathfrak{X}$. Получили противоречие с выбором G. Итак, доказано, что из утверждения 2 следует 3.

Докажем, что из утверждения 3 вытекает 1. Пусть G — группа наименьшего порядка, принадлежащая $\mathfrak{X} \setminus sm\mathfrak{U}$. Тогда $G \in \mathscr{M}(sm\mathfrak{U})$ и по лемме 3.4 G — бипримарная минимальная не $s\mathfrak{U}$-группа. Пусть $\pi(G) = \{p, q\}$.

Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Так как $G/\Phi(G)$ — бипримарная группа, в $G/\Phi(G)$ найдутся $R/\Phi(G) \in \mathrm{Syl}_p(G/\Phi(G))$ и $S/\Phi(G) \in \mathrm{Syl}_q(G/\Phi(G))$ такие, что $G/\Phi(G) = R/\Phi(G)S/\Phi(G)$. Из $R \neq G$, $S \neq G$ и $G \in \mathscr{M}(s\mathfrak{U})$ следует, что $R \in s\mathfrak{U}$ и $S \in s\mathfrak{U}$. По утверждению 3 леммы 2.5 $R/\Phi(G)$ и $S/\Phi(G)$ сильно сверхразрешимы. Ввиду предложения 2.6 и утверждения 5 леммы 2.5 $G \in s\mathfrak{U} \subseteq sm\mathfrak{U}$. Это противоречит выбору G.

Предположим, что $\Phi(G) = 1$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Из $N \nsubseteq \Phi(G)$ следует, что $G = NM$, где M — некоторая максимальная подгруппа группы G. Так как $G \in \mathscr{M}(s\mathfrak{U})$, M сильно сверхразрешима. Поэтому $G/N \simeq M/M \cap N \in s\mathfrak{U}$. Ввиду утверждения 3 леммы 2.5 N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, $M_G = 1$, $N = C_G(N)$ и $M \cap N = 1$.

Пусть $q > p$. Тогда из $G \in \mathfrak{X}$ и $G \in \mathscr{M}(s\mathfrak{U})$ следует, что $NQ \neq G$ для $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$. Ввиду $NQ \in s\mathfrak{U}$ и леммы 2.1 заключаем, что $Q \trianglelefteq NQ$. Поэтому $Q \subseteq C_G(N) = N$. Получили противоречие с $q > p$.

Значит, $q < p$. Так как M сильно сверхразрешима и по лемме 1.4 $O_p(M) = 1$, заключаем, что M — q-группа. Тогда G метанильпотентна. Из $G \in \mathfrak{X}$ вытекает, что $G \in s\mathfrak{U} \subseteq sm\mathfrak{U}$. Это противоречит выбору G. Итак, из утверждения 3 следует 1. Теорема доказана.

Отметим, что по лемме 3.2 класс групп $\mathfrak{H} = (G \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{B})$ является наследственной формацией. По п. 10 из [4, гл. I, § 4] $\mathfrak{N}\mathfrak{H}$ имеет локальный экран f такой, что $f(p) = \mathfrak{H}$ для любого простого p. Из теоремы C следует, что $sm\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{H}$. Тогда $N = G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}$. Ввиду этого получаем

Замечание 3.7. Если G — группа, у которой всякая силовская подгруппа субмодулярна, и N — наименьшая нормальная подгруппа из G такая, что G/N — группа с элементарными абелевыми силовскими подгруппами, то N нильпотентна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schmidt R.* Subgroup lattices of groups. Berlin: Walter de Gruyter, 1994.
2. *Schmidt R.* Modulare Untergruppen endlicher Gruppen // J. Ill. Math. 1969. V. 13. P. 358–377.

3. *Zimmermann I.* Submodular subgroups in finite groups // Math. Z. 1989. V. 202. P. 545–557.
4. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
5. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
6. *Heineken H.* Products of finite nilpotent groups // Math. Ann. 1990. V. 287. P. 643–652.
7. Between nilpotent and solvable (Ed. by M. Weinstein). Passaic: Polygonal Publ. House, 1982.
8. *Wielandt H.* Über Produkte von nilpotenten Gruppen. III // J. Math. 1958. Bd. 2, Heft 4B. S. 611–618.
9. *Kegel O. H.* Produkte nilpotenter Gruppen // Arch. Math. 1961. V. 12, N 1. P. 90–93.
10. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer-Verl., 1967.
11. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О K-$\mathbb{P}$-субнормальных подгруппах конечных групп // Мат. заметки. 2014. Т. 95, № 4. С. 517–528.
12. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.

Статья поступила 12 февраля 2015 г.

Васильев Владимир Александрович
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины,
кафедра алгебры и геометрии,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
VovichX@mail.ru