Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2016. Том 57, № 1

УДК 517.955

О СВОЙСТВЕ НЕОСЦИЛЛЯЦИИ УРАВНЕНИЯ НА ГРАФЕ

Р. Ч. Кулаев

Аннотация. Развивается теория неосцилляции уравнений четвертого порядка на геометрическом графе. Определение неосцилляции уравнения дается в терминах свойств специальной фундаментальной системы решений однородного уравнения. Устанавливается связь свойства неосцилляции со свойством положительности функции Грина некоторых классов краевых задач для уравнения четвертого порядка на графе. Также формулируется принцип максимума для уравнения четвертого порядка на графе и доказываются свойства дифференциальных неравенств.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.107

Ключевые слова: граф, дифференциальное уравнение на графе, неосцилляция, функция Грина, принцип максимума, дифференциальное неравенство.

Вопрос о неосцилляции дифференциального уравнения занимает одно из центральных мест в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Напомним, что в классической теории однородное уравнение n-го порядка называется *неосциллирующим на промежутке* $I \subset \mathbb{R}$, если любое его нетривиальное решение имеет не более $n-1$ нулей, которые считаются с учетом их кратностей [1, 2]. Основное значение это свойство приобретает в контексте исследования осцилляционных свойств спектра краевых задач и прежде всего положительности функции Грина того или иного класса краевых задач [1–4]. Так, например, для уравнения второго порядка на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ неосцилляция эквивалентна, с одной стороны, существованию положительного на полуинтервале $[a, b)$ решения уравнения, а с другой стороны — положительности функции Грина задачи Дирихле. Аналогично (см. [5, гл. 4; 6]) условия неосцилляции уравнения второго порядка на графе эквивалентны, с одной стороны, положительности решений специальных краевых задач, а с другой стороны, положительности функции Грина задачи Дирихле. При этом с другими краевыми условиями функция Грина может оказаться неположительной.

В данной работе изучается свойство неосцилляции уравнений четвертого порядка на графе, которые возникают при описании деформаций упругих стержневых систем. В [7] дан критерий положительности функции Грина некоторых краевых задач для таких уравнений, согласно которому, положительность функции Грина эквивалентна положительной разрешимости специфических краевых задач четвертого порядка. Этот результат позволил в качестве отправной точки при изучении неосцилляции уравнения на графе брать свойство положительности системы решений уравнения на графе, удовлетворяющих на границе графа специальным краевым условиям. При таком подходе проявляется специфика уравнений четвертого порядка. Если для уравнения второго порядка пространство его решений допускает параметризацию граничными значениями функций, то в случае уравнения четвертого порядка решение однозначно определяется уже *парами* значений — самого решения и его первой (или второй) производной — в граничных вершинах графа. При этом параметр, соответствующий граничному значению функции, оказывается более существенным, чем параметр, соответствующий значению производной. В связи с этим для уравнения четвертого порядка возникает два типа неосцилляции: слабая (см. [8]) и сильная. Для классического случая, когда внутренние вершины графа отсутствуют, эти понятия неразличимы, а в случае, когда множество внутренних вершин графа непусто, они, вообще говоря, разнятся. Слабая неосцилляция обеспечивает положительность функции Грина для класса задач Дирихле [8], а сильная неосцилляция — положительность функции Грина для более широкого класса краевых задач. Помимо этого, в терминах сильной неосцилляции удается сформулировать принцип максимума и получить свойства дифференциальных неравенств четвертого порядка на графе.

1. Основные понятия и постановка задачи. Под геометрическим графом Γ в настоящей работе понимается связное ограниченное множество, имеющее структуру сети и вложенное в $\mathbb{R}^2$. Ребро графа — это интервал в $\mathbb{R}^2$, а вершина графа — точка, являющаяся концом одного или нескольких ребер. При этом полагаем, что число ребер графа конечно, все они занумерованы и обозначаются через γ_i, а вершины — через a, b, c или a_j, b_j, c_j (при этом предполагается, что нумерация вершин не зависит от нумерации ребер).

Обозначим через $J(\Gamma)$ множество вершин графа, которые являются концевыми точками двух и более ребер. Такие вершины называем *внутренними.* Вершины графа, не принадлежащие $J(\Gamma)$, будем называть *граничными* и обозначать их множество через $\partial\Gamma$. Считаем, что граф Γ — это объединение множества всех его ребер γ_i и множества всех внутренних вершин $J(\Gamma)$. При этом граничные вершины в граф не входят. Если вершина a является концевой точкой ребра γ_i, то будем говорить, что ребро γ_i *примыкает к вершине* a. Ребро, примыкающее к граничной вершине $a \in \partial\Gamma$, иногда будет удобнее обозначать через γ_a. Множество индексов всех ребер, примыкающих к вершине a, обозначим через $I(a)$. Множество, получаемое удалением из графа всех его вершин, обозначим через $\mathring{\Gamma}$. *Подграфом графа* Γ назовем любое связное подмножество графа Γ.

Под *функцией на графе* понимается отображение $u : \mathring{\Gamma} \to \mathbb{R}$. Через $u_i(x)$ обозначим сужение функции $u(x)$ на ребро γ_i. Через $C[\Gamma]$ будем обозначать пространство функций, равномерно непрерывных на каждом ребре графа Γ. Для таких функций в каждой вершине a графа при $i \in I(a)$ существует предел $\lim\limits_{\gamma_i \ni x \to a} u_i(x)$, который обозначаем через $u_i(a)$. При этом для внутренней вершины a величины $u_k(a)$ и $u_i(a)$ не обязаны совпадать при $k \neq i$ $(k, i \in I(a))$. Выделим в пространстве $C[\Gamma]$ подпространство функций, для которых $u_k(a) = u_i(a)$ при любой $a \in J(\Gamma)$ и любых $k, i \in I(a)$. Множество всех таких функций обозначим через $C(\Gamma)$ и назовем их *непрерывными на графе.* Такое определение вполне естественно, так как можно доопределить их по непрерывности на весь граф и положить $u(a) = u_i(a)$, $a \in J(\Gamma)$, $i \in I(a)$.

Пусть a — некоторая граничная вершина графа и γ_a — примыкающее к ней ребро. Будем иногда использовать выражение «вблизи вершины $a \in \partial\Gamma$» вместо выражения «в некоторой малой полуокрестности вершины a, содержащейся в γ_a». Если функция $u \in C[\Gamma]$ имеет конечное число нулей на γ_a, то через $\sigma u(a+0)$ обозначим знак $u(x)$ вблизи вершины a при ориентации ребра от данной вершины. S^--*зоной* функции $u(x) \in C(\Gamma)$ будем называть подграф $\Gamma_0 \subset \Gamma$ такой, что $u(x) < 0$ на Γ_0 и $u(x) = 0$ на $\partial\Gamma_0$.

Производная функции на ребре γ_i определяется как производная на ориентированном многообразии и обозначается через $u_i'(x)$. Аналогично определяются производные высших порядков. Отметим, что производные нечетных порядков зависят от направления ориентации ребер графа, т. е. определяются с точностью до знака, а для четной производной ориентация не важна. Обозначим через $C^n[\Gamma]$ пространство функций из $C[\Gamma]$, производные которых до порядка n включительно существуют и принадлежат $C[\Gamma]$. Пространство $C^n[\Gamma]$ допускает естественную нормировку $\|u\| = \sum\limits_{j=0}^{n} \sup\limits_{x\in\mathring{\Gamma}} |u^{(j)}(x)|$.

Под *дифференциальным уравнением на графе* подразумеваем, следуя [5], набор обыкновенных дифференциальных уравнений на ребрах графа и набор условий согласования во внутренних вершинах, которое можно записать в общем виде:

$$Lu = f(x), \quad x \in \Gamma. \tag{1}$$

При изучении дифференциальных уравнений на графах важное значение имеет вопрос о том, для каких наборов условий связи в вершинах графа следует ожидать распространения таких ключевых свойств уравнения, как характер расположения точек экстремума (принцип максимума), положительность функции Грина соответствующей краевой задачи, свойства спектра и т. п. Понятно, что такое распространение вряд ли возможно для всех условий. Поэтому основой для выделения классов наборов условий в вершинах графа, в сочетании с которыми уравнение на графе наследует ключевые свойства уравнения на отрезке, должны служить математические модели реальных физических явлений. Именно это соображение используем при выделении классов уравнений 4-го порядка на графе, для которых изучаются аналоги свойств скалярных уравнений на отрезке.

В данной работе в центре внимания будет уравнение, порождаемое совокупностью дифференциальных уравнений на ребрах графа

$$(p_i(x)u_i'')'' - (q_i(x)u_i')' = f_i(x), \quad x \in \gamma_i \subset \mathring{\Gamma}, \tag{2}$$

с коэффициентами, определяемыми функциями $p(x) \in C^2[\Gamma]$, $\inf\limits_{x\in\mathring{\Gamma}} p(x) > 0$, $q(x) \in C^1[\Gamma]$, $q(x) \geq 0$ на Γ, $f(x) \in C[\Gamma]$, дополняемой в каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$ равенствами

$$\begin{gathered} u_i(a) = u_k(a), \quad u_i'(a) = \alpha_{ki}(a)u_k'(a) + \alpha_{ji}(a)u_j'(a), \\ \sum_{i\in I(a)} \alpha_{ki}(a)p_i(a)u_i''(a) = 0, \quad \sum_{i\in I(a)} \alpha_{ji}(a)p_i(a)u_i''(a) = 0 \end{gathered} \tag{3}$$

и условиями с третьими производными

$$\sum_{i\in I(a)} D^3u_i(a) + \delta(a)u(a) = f(a), \quad a \in J(\Gamma). \tag{4}$$

Считаем, что в условиях (3), (4) все производные берутся в направлении от вершины $a \in J(\Gamma)$; k, j — фиксированные (базисные) индексы из $I(a)$, $i \in I(a)$; $\alpha_{ki}(a)$, $\alpha_{ji}(a)$ и $\delta(a)$, $f(a)$ — заданные числа, причем $\alpha_{kk}(a) = \alpha_{jj}(a) = 1$ и

$\alpha_{kj}(a) = \alpha_{jk}(a) = 0$, $\delta(a) \geq 0$, а в (4) через D^3u обозначена третья квазипроизводная $(p(x)u'')' - q(x)u'$. Кроме того, если к внутренней вершине a примыкает всего два ребра γ_i и γ_k, то полагаем, что все величины и соотношения, связанные с индексом j, в системе условий (3) отсутствуют.

При этом левая часть Lu уравнения (1) — это левые части уравнений (2) на ребрах вместе с равенствами (3) и левыми частями условий (4) на $J(\Gamma)$, а правая часть равна правой части (2) на ребрах и правой части (4) во внутренних вершинах.

Решением дифференциального уравнения (1) будем называть всякую функцию $u(x) \in C^4[\Gamma] \cap C(\Gamma)$, удовлетворяющую на каждом ребре графа соответствующему обыкновенному дифференциальному уравнению (2), а в каждой внутренней вершине — условиям (3), (4).

Рассматриваемое уравнение возникает при моделировании малых деформаций плоской механической системы, состоящей из тонких прямолинейных стержней и имеющей структуру сети. Узлы системы образованы в результате жесткого соединения трех и более концов различных стержней. При этом допускается, что в некоторых точках (не обязательно узловых или граничных) система упруго подперта [7, 9].

При исследовании свойств решений уравнения (1) будем предполагать, что выполнены следующие условия:

• граф Γ является деревом;

• для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$ и каждого индекса $i \in I(a)$ хотя бы одна из констант $\alpha_{ji}(a)$, $\alpha_{ki}(a)$ отлична от нуля;

• для каждой вершины $a \in J(\Gamma)$ можно задать базисные индексы $j, k \in I(a)$ так, что для некоторого индекса $i \in I(a) \setminus \{j, k\}$ одновременно будут выполняться неравенства $\alpha_{ji}(a) \leq 0$, $\alpha_{ki}(a) \leq 0$, причем хотя бы одно неравенство строгое.

Учитывая результаты из [10], видим, что предположения гарантируют невырожденность краевой задачи для уравнения (1) с краевыми условиями вида

$$u(a) = 0, \quad \vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) = 0, \ a \in \partial\Gamma, \quad \vartheta(a), \beta(a) \geq 0, \ \vartheta(a) + \beta(a) > 0. \tag{5}$$

Здесь и всюду ниже полагаем, что каждое граничное ребро графа Γ ориентировано от соответствующей граничной вершины.

Кроме уравнения, порожденного соотношениями (2)–(4), также будем рассматривать дифференциальное уравнение, порожденное обыкновенными дифференциальными уравнениями (2) на ребрах графа с условиями упруго-шарнирного сочленения

$$\begin{gathered} u_i(a) = u_k(a), \quad \vartheta_i(a)u_i'(a) - \beta_i(a)u_i''(a) = 0, \quad i, k \in I(a), \, a \in J(\Gamma), \\ \vartheta_i(\cdot), \beta_i(\cdot) \geq 0, \quad \vartheta_i(\cdot) + \beta_i(\cdot) > 0, \end{gathered} \tag{6}$$

и условиями (4) на $J(\Gamma)$ (все производные считаются от вершин $a \in J(\Gamma)$). Свойства решений этого уравнения изучались в [11, 12] и подробно представлены в [5, гл. 8]. В дальнейших рассмотрениях не исключаем, что уравнение (1) определяется соотношениями (2), (6), (4), но с учетом результатов из [5, гл. 8; 10] этот случай малосодержателен. Поэтому всюду далее считаем, если не оговорено противное, что уравнение (1) задано равенствами (2)–(4).

2. Некоторые свойства решений однородного уравнения. Для каждой вершины $a \in \partial\Gamma$ введем в рассмотрение краевую задачу

$$\begin{gathered} Lu = 0, \quad x \in \Gamma, \\ u(a) = A_a, \quad \vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) = B_a, \\ u(b) = 0, \quad \vartheta(b)u'(b) - \beta(b)u''(b) = 0, \;\; b \in \partial\Gamma \setminus a, \end{gathered} \tag{7}$$

где $A_aB_a = 0$ и $A_a + B_a = 1$. Из невырожденности краевой задачи (1), (5) следует, что краевые задачи (7) однозначно разрешимы, а набор всех решений этих задач образует фундаментальную систему решений однородного уравнения (1). Всюду далее решения краевой задачи (7) с правыми частями $A_a = 0$ и $B_a = 1$ будем обозначать через $y_a(x)$, а при $A_a = 1$ и $B_a = 0$ — через $w_a(x)$. Через γ_a обозначаем граничное ребро графа, примыкающее к вершине $a \in \partial\Gamma$.

В данном пункте изучим вопрос об иерархии свойства знакопостоянства решений $y_a(x)$ и $w_a(x)$. Точнее, нас будет интересовать вопрос: будет ли из положительности решений $y_a(x)$ следовать положительность $w_a(x)$, и наоборот?

Отметим, что если в задаче (8) дифференциальный оператор L порождается уравнениями (2) с условиями упруго-шарнирного сочленения (6) и (4), то соответствующие решения $y_a(x)$ и $w_a(x)$ всегда положительны на Γ (см. [5, гл. 8; 12]). Для рассматриваемого уравнения решения могут быть знакопеременными. Поэтому поставленный вопрос содержателен.

Далее потребуются некоторые результаты из [7]. Согласно [7] функция Грина $G(x,s)$ краевой задачи (1), (5) существует, непрерывна на $\Gamma\times\Gamma$ и обладает свойством симметричности. При $x = s \in \Gamma$ выполнено неравенство $G(s,s) > 0$, а при $s \in \gamma_a$, $a \in \partial\Gamma$, и $x \in \Gamma \setminus (a,s)$ имеет место представление

$$G(x,s) = w_a(x)\psi_1(s) + y_a(x)\psi_2(s), \tag{8}$$

где функции $\psi_1(s)$ и $\psi_2(s)$ равномерно непрерывны на граничном ребре γ_a и удовлетворяют при $s \to a$ соотношениям

$$\psi_2(s) \to +0, \quad \psi_1(s) < 0, \quad \psi_1(s) = o(\psi_2(s)).$$

Теорема 2.1 [7]. *Для положительности функции Грина краевой задачи* (1), (5) *на* $\Gamma\times\Gamma$ *необходимо и достаточно, чтобы для каждой граничной вершины* $a \in \partial\Gamma$ *соответствующая функция* $y_a(x)$ *была положительна на* Γ.

Рассмотрим произвольную точку $s \in \Gamma$. Точка s разбивает граф Γ на несколько подграфов, для которых она является граничной вершиной. Поэтому можно сказать, что каждая точка $s \in \Gamma$ порождает конечное множество непересекающихся ветвей графа Γ. Если s является внутренней точкой некоторого ребра графа, то таких ветвей будет две. Если $s \in J(\Gamma)$, то количество ветвей равно количеству ребер, примыкающих к внутренней вершине $s \in J(\Gamma)$. При этом каждая граничная вершина $a \in \partial\Gamma$ принадлежит границе только одной из этих ветвей, которую будем обозначать через $\Gamma_a(s)$.

Лемма 2.1 [7]. *Пусть* $u(x)$ *— нетривиальное решение однородного уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям* (5) *во всех граничных вершинах графа* Γ, *кроме некоторой вершины* $a \in \partial\Gamma$. *Если функция* $u(x)$ *равна нулю в точке* $x_0 \in \Gamma$ *и сохраняет знак в некоторой ее окрестности, то найдется граничная вершина* $b \in \partial\Gamma \setminus a$ *такая, что* $u(x) \equiv 0$ *на* $\Gamma_b(x_0)$.

Лемма 2.2 [7]. *Пусть $b \in \partial\Gamma$ и $u(x)$ — нетривиальное решение однородного уравнения (1), удовлетворяющее на $\partial\Gamma \setminus b$ условиям*

$$u(a) + \alpha(a)D^3u(a) = 0, \quad \vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) = 0, \quad a \in \partial\Gamma \setminus b,$$
$$\alpha(a), \vartheta(a), \beta(a) \geq 0,\ \vartheta(a) + \beta(a) > 0.$$

Тогда для любой граничной вершины $a \in \partial\Gamma \setminus b$ функция $u(x)$ на полуинтервале $\bar{\gamma}_a \setminus a$ либо равна тождественно нулю, либо имеет не более одного простого нуля.

Как показывает формула (8), свойства решений краевых задач (7) тесно связаны со свойствами соответствующей функции Грина. В связи с этим понадобятся некоторые свойства функции Грина $G(x,s)$ краевой задачи (7).

Лемма 2.3. *Пусть для любой вершины $a \in \partial\Gamma$ соответствующая функция $w_a(x)$ положительна на всем графе Γ. Тогда в предположении, что при некотором $s_0 \in \Gamma$ срезка $g_{s_0}(\cdot) = G(\cdot, s_0)$ функции Грина краевой задачи (7) равна нулю в точке $x_0 \in \Gamma$, функция $g_{s_0}(x)$ должна менять знак в любой окрестности точки x_0.*

Доказательство. Предположим, что функция $g_{s_0}(x)$ не меняет знака в некоторой окрестности точки $x_0 \in \Gamma$. Тогда из леммы 2.1 и общих свойств функции Грина (см. [7] или [5, гл. 6]) следует, что $g_{s_0}(x) \equiv 0$ на некотором граничном ребре γ_b, $b \in \partial\Gamma$, а ввиду симметричности функции Грина $G(s_0, x) \equiv 0$ при $x \in \gamma_b$. Поэтому из (8) получаем $y_b(s_0) = w_b(s_0) = 0$, что противоречит условию $w_b(x) > 0$ на Γ.

Следствие 2.1. *Пусть для любой вершины $a \in \partial\Gamma$ соответствующая функция $w_a(x)$ положительна на всем графе Γ. Тогда из неравенства $g_s(x) \geq 0$ на $\Gamma \setminus \Gamma_b(s)$ при некоторых $s \in \Gamma$ и $b \in \partial\Gamma$ следует строгая положительность $g_s(x)$ на $\Gamma \setminus \Gamma_b(s)$.*

Лемма 2.4. *Пусть для любой вершины $a \in \partial\Gamma$ соответствующая функция $w_a(x)$ положительна на всем графе Γ. Тогда в предположении, что какая-нибудь из функций $y_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, не положительна на Γ, должна найтись точка $s \in \Gamma$ такая, что срезка $g_s(\cdot) = G(\cdot, s)$ функции Грина краевой задачи (7) отрицательна вблизи некоторой граничной вершины графа и меняет знак на ребре, примыкающем к этой вершине.*

Доказательство. Пусть для некоторой вершины $a \in \partial\Gamma$ функция $y_a(x)$ принимает неположительное значение на Γ. Из определения этой функции следует, что $\sigma y_a(a+0) > 0$. Стало быть, функция $y_a(x)$ может быть отрицательна лишь вблизи некоторой граничной вершины графа, отличной от a, и равна нулю в некоторой внутренней точке ξ графа Γ. Из (8) и $w_a(x) > 0$ на Γ вытекает, что при всех $s \in \gamma_a$, достаточно близких к вершине $a \in \partial\Gamma$, должно выполняться неравенство $G(\xi, s) < 0$. Пусть $\gamma_a = (a, a_1)$ — ребро графа, примыкающее к вершине $a \in \partial\Gamma$. Поскольку $G(s,s) > 0$ при всех $s \in \Gamma$ (см. [7]), при некотором $s_0 \in \gamma_a$, достаточно близком к вершине $a \in \partial\Gamma$, будет $\xi \in \Gamma \setminus \Gamma_a(s_0)$, поэтому срезка $g_{s_0}(x)$ положительна в точке $x = s_0$ и меняет знак на $\Gamma \setminus \Gamma_a(s_0)$. Для каждого $s \in [s_0, a_1] \subset \bar{\gamma}_a$ определим на графе Γ функцию

$$\mathscr{G}_s(x) = \begin{cases} g_s(x), & x \in \Gamma \setminus \Gamma_a(s), \\ g_s(s), & x \in \Gamma_a(s). \end{cases}$$

Функции семейства $\{\mathscr{G}_s(x),\ s \in [s_0, a_1]\}$ обладают следующими свойствами.

1. Каждая функция семейства принадлежит классу $C(\Gamma)$, а из непрерывности функции Грина $G(x,s)$ следует, что отображение $s \mapsto \mathscr{G}_s(x)$ непрерывно в норме $C(\Gamma)$.

2. Так как $g_s(s) > 0$ [7], функция $\mathscr{G}_s(x)$ положительна в точке $x = s$ и на $\Gamma_a(s)$.

3. Функция $\mathscr{G}_{s_0}(x)$ меняет знак на $\Gamma \setminus \Gamma_a(s_0)$.

4. Из леммы 2.3 получаем, что если $\mathscr{G}_s(x_0) = 0$, $x_0 \in \Gamma$, $s \in [s_0, a_1]$, то функция $\mathscr{G}_s(x)$ меняет знак в любой окрестности точки x_0.

5. Каждая функция $\mathscr{G}_s(x)$ имеет внутри любого граничного ребра графа, отличного от γ_a, не более одного нуля (лемма 2.2).

Рассмотрим функцию $\mathscr{G}_{s_0}(x)$. Если $\mathscr{G}_{s_0}(x)$ отрицательна вблизи некоторой граничной вершины графа и меняет знак на ребре, примыкающем к этой вершине, то лемму можно считать доказанной. В противном случае рассмотрим функцию $\mathscr{G}_{a_1}(x)$. Если окажется, что функция $\mathscr{G}_{a_1}(x)$ положительна на Γ, то ввиду свойств 3, 1 и 4 найдется значение $s^* \in (s_0, a_1)$ такое, что функция $\mathscr{G}_{s^*}(x)$ будет иметь внутри Γ единственный нуль, принадлежащий некоторому граничному ребру графа, отличному от γ_a (если $\zeta = \inf\{s \in [s_0, a_1] : \mathscr{G}_s(x) > 0 \,\text{на}\, \Gamma\}$, то в качестве s^* можно взять, например, значение $s^* \in (s_0, \zeta)$, достаточно близкое к ζ). Тогда из свойств 2 и 5 вытекает, что срезка $g_{s^*}(x)$ обладает нужным свойством и лемму можно считать доказанной. Если функция $\mathscr{G}_{a_1}(x)$ меняет знак на Γ, то из свойства 2 следует, что $\mathscr{G}_{a_1}(x)$ меняет знак на $\Gamma \setminus \Gamma_a(a_1)$ и, значит, на некоторой ветви подграфа $\Gamma \setminus \Gamma_a(a_1)$, выходящей из вершины $a_1 \in J(\Gamma)$. Обозначим через $\gamma_2 = (a_1, a_2)$ ребро этой ветви, примыкающее к вершине a_1. Если $a_2 \in \partial\Gamma$, то ребро γ_2 граничное, и из свойств 2 и 5 получаем, что срезка $g_{s_1}(x)$ обладает нужным свойством. В этом случае лемму можно считать доказанной. Если $a_2 \in J(\Gamma)$, то, как и выше, определим на графе Γ семейство функций $\{\mathscr{G}_s(x),\, s \in [a_1, a_2]\}$. Это семейство обладает свойствами 1–5 с заменой в них s_0 на a_1 и a_1 на a_2. Поэтому можно повторить рассуждения, проведенные выше.

В наших повторяющихся рассуждениях каждая последующая ветвь графа Γ, на которой функция $\mathscr{G}_{a_j}(x)$ меняет знак, вложена в предыдущую (на которой меняет знак функция $\mathscr{G}_{a_{j-1}}(x)$) и содержит по крайней мере на одно ребро меньше. Поскольку граф Γ содержит конечное число ребер, через конечное число шагов либо получим семейство $\{\mathscr{G}_s(x),\, s \in [a_{j-1}, a_j],\, a_{j-1}, a_j \in J(\Gamma)\}$ такое, что $\mathscr{G}_{a_{j-1}}(x)$ меняет знак, а $\mathscr{G}_{a_j}(x) > 0$ на Γ, либо окажется, что $\mathscr{G}_{a_j}(x)$ меняет знак на ветви, состоящей из одного граничного ребра. В первом случае, как и выше, найдется значение $s^* \in (a_{j-1}, a_j)$ такое, что функция $\mathscr{G}_{s^*}(x)$ имеет внутри Γ единственный нуль, принадлежащий некоторому граничному ребру графа, и отрицательна вблизи соответствующей граничной вершины. Во втором случае из свойств 2 и 5 получаем, что $\mathscr{G}_{a_j}(x)$ обладает нужным свойством. Лемма доказана.

Теорема 2.2. *Если все функции $w_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, положительны на всем графе Γ, то все функции $y_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, положительны на Γ.*

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно и для некоторой вершины $a \in \partial\Gamma$ функция $y_a(x)$ принимает неположительное значение на Γ. Тогда ввиду леммы 2.4 найдется точка $s_0 \in \Gamma$ такая, что срезка $g_{s_0}(\cdot) = G(\cdot, s_0)$ функции Грина краевой задачи (1), (5) меняет знак на граничном ребре γ_{b_0} с началом $b_0 \in \partial\Gamma$ и концом $b_1 \in J(\Gamma)$, причем $\sigma g_{s_0}(b_0 + 0) < 0$ и ввиду леммы 2.2 $g_{s_0}(b_1) > 0$.

Обозначим через $G_\alpha(x,s)$ функцию Грина краевой задачи, получающейся заменой в задаче (7) краевого условия $u(b_0) = 0$ более общим условием $u(b_0) + \alpha D^3 u(b_0) = 0$, в котором $\alpha \geq 0$. Тогда (см. [7] или [5, гл. 6]) при $\alpha > 0$ будет $G_\alpha(b_0, x) \equiv \alpha\, w_{b_0}(x) > 0$, поэтому $G_\alpha(b_0, s_0) > 0$. Поскольку $G_\alpha(x, s_0) \to g_{s_0}(x)$ при $\alpha \downarrow 0$ в норме $C(\Gamma)$, при достаточно малых значениях $\alpha > 0$ срезка $G_\alpha(x, s_0)$ должна принимать отрицательные значения на ребре γ_{b_0}, при этом должны выполняться неравенства $G_\alpha(b_0, s_0) > 0$ и $G_\alpha(b_1, s_0) > 0$, что противоречит утверждению леммы 2.2. Следовательно, предположение о том, что какая-то из функций $y_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, принимает на Γ неположительные значения, неверно. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Имеются примеры, показывающие, что условие положительности всех функций $w_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, в теореме 2.2 существенно, а также что из положительности всех функций $y_a(x)$ еще не следует положительность всех функций $w_a(x)$.

3. Сильная неосцилляция. В данном пункте вводится понятие сильной неосцилляции и формулируется принцип максимума для уравнения (1).

Лемма 3.1. *Если все функции $w_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, положительны на всем графе Γ, то каждая из них достигает своего наибольшего значения лишь в соответствующей вершине $a \in \partial\Gamma$.*

Доказательство. Предположим, что для некоторой $b \in \partial\Gamma$ функция $w_b(x)$ достигает своего наибольшего значения в некоторой внутренней точке $\xi \in \Gamma$ и выполнено неравенство

$$w_b(\xi) = \max_{x \in \Gamma \cup \partial\Gamma} w_b(x) \geq w_b(b) = 1.$$

Тогда функция $u(x) = w_b(\xi) - w_b(x)$ равна нулю в точке $\xi \in \Gamma$ и $w_b(\xi)$ на $\partial\Gamma \setminus b$. Так как функции $\{y_a(x), w_a(x)\}_{a \in \partial\Gamma}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1), а $u(x)$ удовлетворяет в каждой вершине $a \in \partial\Gamma$ однородному условию $\vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) = 0$, имеем

$$u(x) = (w_b(\xi) - 1)w_b(x) + w_b(\xi) \sum_{a \in \partial\Gamma \setminus b} w_a(x).$$

Поскольку все функции $w_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, строго больше нуля на Γ, в любой точке $x \in \Gamma$, в том числе и в точке ξ, должно выполняться неравенство $u(x) > 0$. Но $u(\xi) = 0$ и приходим к противоречию, доказывающему невозможность неравенства $w_b(x) \geq 1$ при $x \in \Gamma$. Лемма доказана.

Следствие 3.1. *Если все функции $w_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, положительны на всем графе Γ, то для каждой из них выполнено неравенство $\sigma w_a'(a + 0) < 0$.*

Следствие 3.2. *Если все функции $w_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, положительны на всем графе Γ, то для каждой из них выполнены неравенства $w_a''(a) \leq 0$ и $w_a''(b) \geq 0$ при $b \in \partial\Gamma \setminus a$.*

Прежде чем ввести понятие сильно неоциллирующего уравнения, напомним (см. [8]), что уравнение четвертого порядка $Lu = 0$ называется *слабо неосциллирующим* на Γ, если при $\beta(\cdot) \equiv 0$ каждая из функций $y_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, положительна на Γ. Вообще, знаковые свойства функций $y_a(x)$ и $w_a(x)$ зависят от значений коэффициентов $\vartheta(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ краевых условий (в случае $J(\Gamma) = \varnothing$ такая зависимость отсутствует!). Слабая неосцилляция уравнения на графе обеспечивает положительность решений $y_a(x)$ при любых допустимых значениях коэффициентов краевых условий. Однако слабая неосцилляция не гарантирует положительности решений $w_a(x)$. Для этого от уравнения уже требуется свойство более сильное, чем слабая неосцилляция, которое так и называем свойством сильной неосцилляции.

Определение 3.1. Дифференциальное уравнение (1) назовем *сильно неосциллирующим*, если для любой вершины $a \in \partial\Gamma$ решение краевой задачи

$$\begin{gathered} Lu = 0, \quad x \in \Gamma, \\ u(a) = 1, \quad u''(a) = 0, \quad u(b) = 0, \quad u'(b) = 0, \ b \in \partial\Gamma \setminus a, \end{gathered} \tag{9}$$

не имеет нулей внутри Γ.

Обратим внимание, что в (9) одно из условий в вершине a содержит вторую производную.

Из замечания 2.1 следует, что не всякое слабо неосциллирующее уравнение четвертого порядка на графе сильно неосциллирующее. Обратное утверждение верно. Как показывает теорема 2.2, сильно неосциллирующее уравнение (1) всегда является и слабо неосциллирующим.

Если $J(\Gamma) = \varnothing$, то уравнение (1) одновременно слабо и сильно неосциллирующее. Стоит также упомянуть уравнение четвертого порядка на графе, порожденное уравнениями (2) на ребрах и условиями упруго–шарнирного сочленения (6), (4) во внутренних вершинах, изучавшееся в [5, гл. 8; 12]. Для решений такого уравнения выполняется принцип максимума, из которого следует, что решения краевых задач (9), $a \in \partial\Gamma$, положительны, а значит, уравнение всегда сильно неосциллирующее.

Рассмотрим две пары неотрицательных функций $\beta(\cdot)$, $\tilde\beta(\cdot)$ и $\vartheta(\cdot)$, $\tilde\vartheta(\cdot)$, определенных на $\partial\Gamma$ и удовлетворяющих условиям $\beta(\cdot) + \vartheta(\cdot) > 0$, $\tilde\beta(\cdot) + \tilde\vartheta(\cdot) > 0$. Каждая пара $\beta(\cdot)$, $\vartheta(\cdot)$ и $\tilde\beta(\cdot)$, $\tilde\vartheta(\cdot)$ определяет свою краевую задачу (7), решение которой при $A_a = 1$, $B_a = 0$ обозначим через $w_a(x)$ и $\widetilde{w}_a(x)$ соответственно.

Лемма 3.2. *Пусть уравнение* (1) *слабо неосциллирующее и все функции* $w_a(x)$, $a \in \partial\Gamma$, *положительны на* Γ. *Если в некоторой вершине* $b \in \partial\Gamma$ *выполнено неравенство* $\frac{\beta(b)}{\vartheta(b)} \geq \frac{\tilde\beta(b)}{\tilde\vartheta(b)}$, *а при* $a \in \partial\Gamma \setminus b$ *выполнены неравенства* $\frac{\beta(a)}{\vartheta(a)} \leq \frac{\tilde\beta(a)}{\tilde\vartheta(a)}$ (*в случае* $\vartheta(a) = 0$ *полагаем* $\frac{\beta(a)}{\vartheta(a)} = \infty$, *аналогично при* $\tilde\vartheta(a) = 0$), *то* $w_b(x) \leq \widetilde{w}_b(x)$ *всюду на* Γ.

Доказательство. Рассмотрим функцию $u(x) = \widetilde{w}_b(x) - w_b(x)$. Она является решением однородного уравнения (1) и равна нулю на $\partial\Gamma$. Подставим $u(x)$ в краевые условия задачи (7) с коэффициентами $\tilde\beta(\cdot)$, $\tilde\vartheta(\cdot)$. В вершине $b \in \partial\Gamma$ имеем

$$\tilde\vartheta(b)u'(b) - \tilde\beta(b)u''(b) = -\tilde\vartheta(b)w_b'(b) + \tilde\beta(b)w_b''(b).$$

Если $\vartheta(b) = 0$, то $w_b''(b) = 0$. Кроме того, согласно следствию 3.1 выполнено неравенство $w_b'(b) \leq 0$. Поэтому

$$\tilde\vartheta(b)u'(b) - \tilde\beta(b)u''(b) \geq 0.$$

Если $\vartheta(b) \neq 0$, то $\tilde\vartheta(b) \neq 0$, стало быть,

$$\begin{aligned} \tilde\vartheta(b)u'(b) - \tilde\beta(b)u''(b) &= -\tilde\vartheta(b)w_b'(b) + \tilde\beta(b)w_b''(b) \\ &= -\tilde\vartheta(b)\left[w_b'(b) - \frac{\beta(b)}{\vartheta(b)}w_b''(b) + \left(\frac{\beta(b)}{\vartheta(b)} - \frac{\tilde\beta(b)}{\tilde\vartheta(b)}\right)w_b''(b)\right] \\ &= -\tilde\vartheta(b)\left(\frac{\beta(b)}{\vartheta(b)} - \frac{\tilde\beta(b)}{\tilde\vartheta(b)}\right)w_b''(b) \geq 0, \end{aligned}$$

где последнее неравенство следует из свойств коэффициентов и следствия 3.2.

Что касается остальных граничных вершин графа, то там рассуждения примерно такие же. Из положительности функции $w_b(x)$ на всем графе и краевых условий в вершине $a \in \partial\Gamma \setminus b$ следуют неравенства $w_b'(a) \geq 0$ и $w_b''(a) \geq 0$. Поэтому при $\tilde{\vartheta}(a) = 0$ будем иметь

$$\tilde{\vartheta}(a)u'(a) - \tilde{\beta}(a)u''(a) = -\tilde{\vartheta}(a)w_b'(a) + \tilde{\beta}(a)w_b''(a) = \tilde{\beta}(a)w_b''(a) \geq 0.$$

Если $\tilde{\vartheta}(a) \neq 0$, то $\vartheta(a) \neq 0$ и

$$\begin{aligned}\tilde{\vartheta}(a)u'(a) - \tilde{\beta}(a)u''(a) &= -\tilde{\vartheta}(a)\left[w_b'(a) - \frac{\beta(a)}{\vartheta(a)}w_b''(a) + \left(\frac{\beta(a)}{\vartheta(a)} - \frac{\tilde{\beta}(a)}{\tilde{\vartheta}(a)}\right)w_b''(a)\right] \\ &= -\tilde{\vartheta}(a)\left(\frac{\beta(a)}{\vartheta(a)} - \frac{\tilde{\beta}(a)}{\tilde{\vartheta}(a)}\right)w_b''(a) \geq 0,\end{aligned}$$

где последнее неравенство вытекает из свойств коэффициентов и следствия 3.2.

Таким образом, всюду на $\partial\Gamma$ выполнены условия

$$u(a) = 0, \quad \tilde{\vartheta}(a)u'(a) - \tilde{\beta}(a)u''(a) \geq 0, \quad a \in \partial\Gamma,$$

из которых следует, что функция $u(x)$ равна линейной комбинации с неотрицательными коэффициентами решений краевых задач (7), $a \in \partial\Gamma$, с коэффициентами $\tilde{\beta}(\cdot)$, $\tilde{\vartheta}(\cdot)$ и правыми частями $A_a = 0$, $B_a = 1$. Поскольку уравнение (1) слабо неосциллирующее, решения этих краевых задач положительны (см. [8]), а значит, $u(x) \geq 0$ на Γ или $w_a(x) \leq \widetilde{w}_a(x)$ на Γ. Лемма доказана.

Следствие 3.3. *Пусть уравнение* (1) *сильно неосциллирующее на* Γ. *Тогда при любых допустимых значениях коэффициентов* $\beta(\cdot)$, $\vartheta(\cdot)$ *решения всех краевых задач* (7), $a \in \partial\Gamma$, *положительны на всем графе* Γ.

Для доказательства следствия нужно лишь заметить, что в краевых задачах (9) коэффициенты граничных условий удовлетворяют равенствам $\frac{\beta(a)}{\vartheta(a)} = \infty$ и $\frac{\beta(b)}{\vartheta(b)} = 0$, $b \in \partial\Gamma \setminus a$.

Выше отмечалось, что для решений однородного уравнения четвертого порядка на графе, порожденного уравнениями (2) и условиями шарнирного сочленения (6), (4) во внутренних вершинах, имеет место принцип максимума (см. [5, гл. 8]). Требовать выполнения принципа максимума для уравнения четвертого порядка без дополнительных условий не приходится даже на отрезке, поскольку размерность пространства его решений равна четырем. Так, в [13, 14] для уравнения четвертого порядка на отрезке принцип максимума установлен в классе решений, удовлетворяющих на границе условиям $u'(\cdot)u''(\cdot) \geq 0$ (производные считаются внутрь отрезка). С аналогичными условиями на границе графа формулируется принцип максимума для уравнения с условиями упруго-шарнирного соединения в узловых вершинах графа [5, гл. 8]. Для рассматриваемого уравнения ситуация сложнее. Даже уменьшив вдвое размерность пространства решений, не добьемся выполнения принципа максимума. Поэтому на уравнение приходится накладывать дополнительные условия.

Теорема 3.1 (принцип максимума). *Пусть уравнение* (1) *сильно неосциллирующее на графе* Γ. *Тогда любое непостоянное решение однородного уравнения* (1), *удовлетворяющее на* $\partial\Gamma$ *краевым условиям*

$$u'(a)u''(a) \geq 0, \quad a \in \partial\Gamma, \tag{10}$$

достигает своих наибольшего и наименьшего значений только на границе графа.

Доказательство. Понятно, что достаточно доказать только утверждение теоремы, касающееся наименьшего значения. Пусть $u(x)$ — решение однородного уравнения (1), удовлетворяющее на $\partial\Gamma$ условиям (10). Пусть также $u(a_0) = \min\limits_{a\in\partial\Gamma} u(a)$, $a_0 \in \partial\Gamma$. Тогда функция $z(x) = u(x) - u(a_0)$ неотрицательна на $\partial\Gamma$, удовлетворяет на $\partial\Gamma$ условиям (10) и равна нулю в точке $a_0 \in \partial\Gamma$. Поставим в соответствие каждому вектору $(-z'(b), z''(b))$, $b \in \partial\Gamma$, ненулевой вектор $(\vartheta(b), \beta(b))$ с неотрицательными координатами такой, что $(-z'(b), z''(b)) \perp (\vartheta(b), \beta(b))$. Обозначим через $w_a(x)$ решение краевой задачи (7), в которой $A_a = 1$, $B_a = 0$, а значения коэффициентов граничных условий определяются соответствующими векторами $(\vartheta(\cdot), \beta(\cdot))$. Так как уравнение (1) сильно неосциллирующее, из следствия 3.3 следует, что при любой $a \in \partial\Gamma$ функция $w_a(x)$ положительна на Γ. В силу невырожденности краевой задачи (1), (5) будет $z(x) = \sum\limits_{a\in\partial\Gamma} z(a)w_a(x)$, причем $z(a) \geq 0$ для каждой $a \in \partial\Gamma$. Следовательно, $z(x) = u(x) - u(a_0) \geq 0$ для всех $x \in \Gamma$, т. е. $u(a_0) = \min\limits_{x\in\Gamma\cup\partial\Gamma} u(x)$. При этом если $u(x) \not\equiv u(a_0)$, то всюду на Γ выполнено строгое неравенство $u(x) > u(a_0)$. Теорема доказана.

4. Дифференциальные неравенства. Свойство сильной неосцилляции вместе с принципом максимума позволяют получить некоторые свойства решений дифференциальных неравенств четвертого порядка на графе. Формулируемые далее свойства перекликаются со свойствами решений дифференциального неравенства на отрезке [14]. Прежде чем сформулировать соответствующие результаты, поясним, что мы понимаем под решением дифференциального неравенства на графе.

Решением дифференциального неравенства на графе $Lu \geq 0$, $x \in \Gamma$, назовем всякое решение уравнения $Lu = f(x)$, $x \in \Gamma$, правая часть $f(x)$ которого неотрицательна на всем графе Γ, а на $\mathring{\Gamma}$ совпадает с некоторой функцией из пространства $C[\Gamma]$.

Теорема 4.1. *Пусть уравнение* (1) *сильно неосциллирующее на* Γ. *Тогда любое нетривиальное решение неравенства* $Lu \geq 0$, $x \in \Gamma$, *удовлетворяющее на границе графа условиям*

$$u(a) \geq 0, \quad u'(a)u''(a) \geq 0, \quad a \in \partial\Gamma,$$

строго положительно внутри Γ.

Доказательство. Пусть функция $u(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы. Так как в любой граничной вершине $a \in \partial\Gamma$ выполнено неравенство $u'(a)u''(a) \geq 0$, существует пара функций $\vartheta, \beta : \partial\Gamma \to [0, +\infty)$ таких, что $\vartheta(a) + \beta(a) \neq 0$, $a \in \partial\Gamma$, и функция $u(x)$ удовлетворяет в каждой граничной вершине $a \in \partial\Gamma$ условию $\vartheta(a)u'(a) - \beta(a)u''(a) = 0$. Поэтому функция $u(x)$ допускает представление в виде суммы $u(x) = y(x) + w(x)$, где $y(x)$ является решением задачи

$$Ly \geq 0,\ x \in \Gamma, \quad y(a) = 0, \quad \vartheta(a)y'(a) - \beta(a)y''(a) = 0,\ a \in \partial\Gamma, \tag{11}$$

а $w(x)$ — некоторое решение задачи

$$Lw = 0,\ x \in \Gamma, \quad w(a) \geq 0, \quad \vartheta(a)w'(a) - \beta(a)w''(a) = 0,\ a \in \partial\Gamma.$$

Так как уравнение (1) сильно неосциллирующее, функция Грина $G(x,s)$ задачи (11) строго положительна на $\Gamma\times\Gamma$ (следствие 3.3 и теорема 2.2). Поэтому (см. [7])

$$y(x) = \int\limits_{\Gamma} G(x,s)Ly(s)\,ds + \sum_{c\in J(\Gamma)} Ly(c)G(x,c) \geq 0, \quad x\in\Gamma,$$

причем если левая часть неравенства в (11) не равна тождественно нулю, то $y(x)>0$ на всем графе Γ. Что касается функции $w(x)$, то она неотрицательна на Γ в силу принципа максимума. Здесь тоже если хотя бы одно из граничных неравенств строгое, то $w(x)>0$ на всем графе Γ. Поскольку $u(x)\not\equiv 0$ на Γ, хотя бы одна из функций $y(x)$ или $w(x)$ не равна тождественно нулю, следовательно, $u(x)>0$ на всем графе Γ. Теорема доказана.

Следующее утверждение является аналогом результата работы [14], в которой изучалось дифференциальное неравенство на отрезке.

Теорема 4.2. *Пусть уравнение* (1) *сильно неосциллирующее на* Γ. *Тогда любое нетривиальное решение неравенства* $Lu\geq 0$, $x\in\Gamma$, *удовлетворяющее на границе графа условиям*

$$u(a)\geq 0, \quad u'(a)\geq 0, \quad a\in\partial\Gamma,$$

строго положительно внутри Γ.

Доказательство. Пусть функция $u(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы. Нетрудно видеть, что функция $u(x)$ допускает представление в виде суммы $u(x)=y(x)+w(x)+z(x)$, где $y(x)$ — некоторое решение задачи

$$Ly\geq 0,\ x\in\Gamma, \quad y(a)=0, \quad y'(a)=0, \quad a\in\partial\Gamma,$$

$w(x)$ — некоторое решение задачи

$$Lw=0,\ x\in\Gamma, \quad w(a)\geq 0, \quad w'(a)=0, \quad a\in\partial\Gamma,$$

а $z(x)$ — некоторое решение задачи

$$Lz=0,\ x\in\Gamma, \quad z(a)=0, \quad z'(a)\geq 0, \quad a\in\partial\Gamma. \tag{12}$$

Как и в предыдущей теореме, функции $y(x)$ и $w(x)$ неотрицательны на Γ, причем если хотя бы одно из неравенств, входящих в определение этих функций строгое, то и $y(x)+w(x)>0$ на всем графе Γ. Неотрицательность функции $z(x)$ следует из результата [8]: если уравнение (1) слабо неосциллирцющее, то любое решение задачи (12) неотрицательно на Γ, причем если хотя бы одно из граничных неравенств строгое, то $z(x)>0$ на всем графе Γ. Поскольку $u(x)\not\equiv 0$ на Γ, хотя бы одна из функций $y(x)$, $w(x)$ или $z(x)$ не равна тождественно нулю, следовательно, $u(x)>0$ на всем графе Γ. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левин А. Ю.* Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)}+p_1(t)x^{(n-1)}+\dots+p_n(t)x=0$ // Успехи мат. наук. 1969. Т. 24, № 2. С. 43–96.
2. *Дерр В. Я.* Неосцилляция решений линейных дифференциальных уравнений // Вестн. Удмурт. ун-та. 2009. Вып. 1. С. 46–89.
3. *Покорный Ю. В.* О неклассической задаче Валле-Пуссена // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 6. С. 1018–1027.
4. *Тептин А. Л.* К вопросу об осцилляционности спектра многоточечной краевой задачи // Изв. вузов. Математика. 1999. № 4. С. 44–53.

5. *Дифференциальные уравнения на геометрических графах* / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев и др. М.: Физматлит, 2007.
6. *Покорный Ю. В.* О неосцилляции обыкновенных дифференциальных уравнений и неравенств на пространственных сетях // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 5. С. 661–672.
7. *Кулаев Р. Ч.* Необходимое и достаточное условия положительности функции Грина краевой задачи для уравнения четвертого порядка на графе // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 3. С. 302–316.
8. *Кулаев Р. Ч.* К вопросу о неосцилляции уравнения на графе // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 11. С. 1563–1564.
9. *Завгородний М. Г.* Вариационные принципы построения моделей стержневых систем // Математическое моделирование информационных и технологических систем. Воронеж: Воронеж. гос. технол. академия, 2000. Вып. 4. С. 59–62.
10. *Кулаев Р. Ч.* О разрешимости краевой задачи для уравнения четвертого порядка на графе // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 1. С. 27–34.
11. *Боровских А. В., Мустафокулов Р. О., Лазарев К. П., Покорный Ю. В.* Об одном классе дифференциальных уравнений четвертого порядка на пространственной сети // Докл. АН. 1995. Т. 345, № 6. С. 730–732.
12. *Borovskikh A. V., Lazarev K. P.* Fourth-order differential equations on geometric graphs // J. Math. Sci. 2004. V. 119, N 6. P. 719–738.
13. *Dunninger D. R.* Maximum principles for fourth order ordinary differential inequalities // J. Math. Anal. Appl. 1981. V. 82. P. 399–405.
14. *Bochenek J.* On a maximum principle for fourth order ordinary differential inequalities // Univ. Iagellonicae Acta Math. 1988. V. 27. P. 163–168.

Статья поступила 11 апреля 2015 г.

Кулаев Руслан Черменович
Южный математический институт ВНЦ РАН,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027;
Северо-Осетинский гос. университет им. К. Л. Хетагурова,
ул. Ватутина, 46, Владикавказ 362025
kulaev@smath.ru