Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2016. Том 57, № 5

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ С ДАННЫМИ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ НА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

С. Г. Пятков

Аннотация. Рассмотрен вопрос о корректности обратных задач об определении правой части специального вида (функции источников) в параболической системе уравнений. В качестве данных переопределения берутся значения решения и его нормальных производных на системе поверхностей, лежащих в пространственной области. В частности, в качестве таких поверхностей можно рассматривать сечения этой области. Приведены точные условия на данные задачи, гарантирующие корректность задачи.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.517

Ключевые слова: параболическая система, обратная задача, начально-краевая задача, корректность, безусловная разрешимость.

§ 1. Введение

Рассматривается вопрос об определении вместе с решением правой части специального вида в параболических уравнениях и системах. Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ класса C^{2m} и $Q = (0,T)\times G$. Параболическое уравнение имеет вид

$$u_t + A(t,x,D)u = g = \sum_{i=1}^{r} b_i(t,x)q_i(t,x') + f, \quad (t,x) \in Q, \tag{1}$$

где $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ и A — матричный эллиптический оператор порядка $2m$ с матричными коэффициентами размера $h \times h$ вида

$$A(t,x,D) = \sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(t,x)D^\alpha, \quad D = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_n}).$$

Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad B_j u|_S = \sum_{|\beta|\le m_j} b_{j\beta}(t,x)D^\beta u|_S = g_j(t,x), \quad m_j < 2m, \tag{2}$$

где $j = 1,2,\dots,m$, $S = (0,T)\times\Gamma$. Неизвестными в (1), (2) являются решение u и функции $q_i(t,x')$ ($i = 1,2,\dots,r$), входящие в правую часть (1). Условия переопределения для нахождения этих функций q_i имеют вид

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right|_{S_i} = \psi_{ik}(t,x'), \quad S_i = (0,T)\times\Gamma_i, \quad k = 0,1,\dots,r_i - 1, \tag{3}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15–41–00063).

где $\{\Gamma_i\}$ $(i=1,2,\dots,s)$ — множество гладких $(n-1)$-мерных поверхностей, лежащих в G и заданных уравнениями вида $x_n=\varphi^i(x')$ $(x'\in\Omega\subset\mathbb{R}^{n-1})$, $1\le r_i\le 2m$ для всех i и $r=h(r_1+r_2+\dots+r_s)$. Проблемы подобного вида возникают при описании процессов тепломассопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации и во многих других областях. Простейшие физические приложения — задачи об определении функции источников (например, загрязняющих веществ в жидкости, подземных водах, атмосфере и т. п.) — можно разделить на два класса: определение точечных источников и их местоположения (см. [1–5]) и описание функции источников, не являющихся точечными (см., например, [6–9]). В первом случае функция источников является распределением, во втором — произвольной достаточно гладкой функцией. В нашем случае правую часть в (1) можно трактовать как функцию источников специального вида или как приближение функции источников произвольного вида, где функции $b_i(x,t)$ — элементы произвольного базиса, а неизвестные функции q_i — коэффициенты Фурье по этому базису. Такой подход, в частности, используется в [10]. Большое количество различных приложений обратных задач, близких к нашим, приведено также в [11, 12]. Параболические коэффициентные обратные задачи с условиями переопределения вида (3), где условия переопределения задаются на плоскостях и все числа r_i равны 1, рассматривались в работах Ю. Я. Белова, Ю. Е. Аниконова и ряда других авторов (см. результаты и библиографию в [13, 14]). В одномерном случае обратные задачи об определении правой части и коэффициентов (в этом случае неизвестные функции зависят только от t) изучались М. Иванчовым и др. [15]. Отметим монографии [16–18], где можно найти описание постановок обратных задач и ряд результатов. Наиболее близкие результаты содержатся в [19–22]. Наши результаты являются обобщениями результатов из [22]. В этой работе рассматривалась задача вида (1)–(3), где в качестве условий переопределения взяты значения решения на некоторой системе поверхностей. Было показано, что задача не всегда безусловно разрешима и возникают условия на граничные операторы, когда это имеет место. Эти условия на граничные операторы являются фактически необходимыми и достаточными условиями, гарантирующими корректность. Возникает вопрос о наличии или отсутствии подобных условий на граничные операторы в случае, если будем задавать вместе с решением также и значения нормальных производных на этой системе поверхностей. Казалось бы, при задании полного набора нормальных производных задача должна быть безусловно разрешимой. Однако, как выясним ниже, это не так. В этой работе мы указываем условия на граничные операторы, когда задача (1)–(3) имеет единственное решение, и приводим альтернативные постановки (в смысле некоторого фактор-пространства), когда задача действительно безусловно разрешима. Небольшая часть результатов данной работы анонсирована в [23]. В следующем параграфе приведены условия на данные задачи и сформулирован основной результат (теорема 2). Его доказательство приводится в § 3. В § 4 на примере параболического уравнения второго порядка показано, что условия на граничные операторы, гарантирующие безусловную разрешимость задачи, не только достаточны, но и необходимы.

§ 2. Основные результаты

Пусть E — банахово пространство. Тогда $L_p(G;E)$ (G — область в $\mathbb{R}^n$) — пространство сильно измеримых функций, определенных на G со значениями в E, с конечной нормой $\|\|u(x)\|_E\|_{L_p(G)}$ [24]. Символ $C^k(\overline{G};E)$ обозначает пространство функций со значениями в E, имеющих в G все производные до порядка k включительно, непрерывные в G и допускающие непрерывное продолжение на замыкание $\overline{G}$. Определение пространств Соболева $W_p^s(G;E)$ см. в [24, 25]. Если $E=\mathbb{C}^n$, то последнее пространство обозначаем просто через $W_p^s(G)$. Аналогично вместо $C^k(\overline{G};E)$ используем обозначение $W_p^s(G)$ или $C^k(\overline{G})$. Включение $u\in W_p^s(G)$ (или $u\in C^k(\overline{G})$) для данной вектор-функции или матрицы означает, что каждая из компонент вектора (элементов матрицы) принадлежит пространству $W_p^s(G)$ (или $C^k(\overline{G})$). Под нормой вектора (матрицы) понимаем сумму норм координат (элементов). Для данного интервала $J=(0,T)$ и цилиндра $Q=G\times J$ положим $W_p^{s,r}(Q)=W_p^s(J;L_p(G))\cap L_p\big(J;W_p^r(G)\big)$, соответственно $W_p^{s,r}(S)=W_p^s(J;L_p(\Gamma))\cap L_p\big(J;W_p^r(\Gamma)\big)$. Определение включения $\Gamma\in C^{2m}$ может быть найдено, например, в [26]. Фактически оно означает, что в каждой точке определена касательная плоскость и в некоторой окрестности любой точки на Γ уравнение границы имеет вид $y_n=\varphi(y_1,\dots,y_{n-1})$, где y — локальная система координат в данной точке, в которой ось y_n направлена по нормали к Γ, а оси y_i $(i\le n-1)$ лежат в касательной плоскости, и функция φ принадлежит классу C^{2m} в этой окрестности.

Далее считаем выполненным

Условие (A). *Существуют область $\Omega\subset\mathbb{R}^{n-1}$ с границей класса C^{2m} такая, что $G\subset\Omega\times\mathbb{R}$, $\Gamma_i=\{x\in\mathbb{R}^n:\ x_n=\varphi^i(x'),\ x'\in\Omega\}$, $\varphi^i(x')\in C^{2m}(\overline{\Omega})$ при всех $i=1,2,\dots,s$, и постоянная $\delta>0$ такая, что*

$$U_{\delta i}=\{(x',\varphi^i(x')+\eta):x'\in\Omega,\ |\eta|<\delta\}\subset G,\quad U_{\delta i}\cap U_{\delta j}=\varnothing,$$

при $i\ne j$, $i,j=1,2,\dots,s$.

Условие (A) фактически использовалось во всех работах, посвященных рассматриваемым обратным задачам. В качестве поверхностей Γ_i обычно берутся сечения области плоскостями. В случае $n=1$ приведенные ниже результаты также справедливы, поверхности Γ_i — просто точки x_i, а условие (A) превращается в следующее условие: точки $\{x_i\}_{i=1}^s$ суть внутренние точки области G. Тогда $U_{\delta i}\subset G$ — δ-окрестность точки x_i.

Далее считаем параметр δ из условия (A) фиксированным. Пусть $Q^\tau=(0,\tau)\times G$, $Q_0=(0,T)\times\Omega$, $Q_0^\tau=(0,\tau)\times\Omega$, $S_0=(0,T)\times\partial\Omega$, $Q_{\delta i}^\tau=(0,\tau)\times U_{\delta i}$, $Q_{\delta i}=(0,T)\times U_{\delta i}$, $S_{\delta i}=(0,T)\times(S\cap\partial U_{\delta i})$, $S^\tau=\partial G\times(0,\tau)$. Фиксируем также параметр $p>n+2m$.

Условия согласования и гладкости данных могут быть записаны в виде

$$\exists\Phi(t,x)\in W_p^{1,2m}(Q):\Phi|_{t=0}=u_0(x),\ B_l\Phi|_S=g_l\quad(l=1,\dots,m),\tag{4}$$

$$\partial_{x_n}^j\Phi\in W_p^{1,2m}(Q_{\delta i}),\quad \partial_{x_n}^j f\in L_p(Q_{\delta i}),\quad f\in L_p(Q),\quad \partial_{x_n}^{j-1}\Phi|_{S_i}=\psi_{i\,j-1}(t,x'),\tag{5}$$

где $i=1,\dots,s,\ j=1,2,\dots,r_i$. Для простоты будем использовать не самые точные условия на коэффициенты, считая, что

$$\begin{gathered}a_\alpha(t,x)\in L_\infty(Q)\ (|\alpha|<2m),\quad a_\alpha\in C(\overline{Q})\ (|\alpha|=2m),\\ b_{j\beta}\in C^{1-\frac{m_j}{2m},2m-m_j}(\overline{S}),\quad b_j(t,x)\in L_\infty(Q);\end{gathered}\tag{6}$$

$$\begin{gathered}\partial_{x_n}^k a_\alpha(t,x)\in L_\infty(Q_{\delta i})\ (|\alpha|\le 2m),\quad \partial_{x_n}^k b_j(t,x)\in L_\infty(Q_{\delta i}),\\ \partial_{x_n}^k b_{j\beta}(t,x)\in C^{1-\frac{m_j}{2m},2m-m_j}(\overline{S_{\delta i}})\quad(|\beta|\le m_j),\end{gathered}\tag{7}$$

где $j = 1, 2, \dots, m,\ k = 1, \dots, r_i,\ i = 1, 2, \dots, s$.

Рассмотрим матрицу $B(t, x')$ размера $r \times r$, строки которой с номерами от $\sum\limits_{l=0}^{j-1} r_l h + 1$ $(r_0 = 0)$ до $\sum\limits_{l=0}^{j} r_l h$ $(j = 1, \dots, s)$ занимает прямоугольная матрица, строки с номерами от $(kh+1, (k+1)h)$ $(k = 0, 1, \dots, r_j - 1)$ суть вектор-столбцы

$$\big(\partial^k_{x_n} b_1(t, x', \varphi^j(x')\big), \partial^k_{x_n} b_2(t, x', \varphi^j(x')), \dots, \partial^k_{x_n} b_r(t, x', \varphi^j(x')).$$

Потребуем существование постоянной $\delta_0 > 0$ такой, что

$$|\det B(t, x')| \geq \delta_0 \quad \forall x' \in \Omega,\ t \in [0, T]. \tag{8}$$

Рассмотрим оператор

$$A_0(t, x, D) = \sum_{|\alpha| = 2m} a_{i\alpha}(t, x) D^\alpha$$

и предположим, что оператор $\partial_t + A_0$ параболичен, т. е. найдется постоянная $\delta_1 > 0$ такая, что любой корень p многочлена $\det(A_0(t, x, i\xi) + pE) = 0$ (E — единичная матрица) удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{Re} p \leq -\delta_1 |\xi|^{2m} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ \forall (x, t) \in Q. \tag{9}$$

Условие Лопатинского запишется в следующем виде: для любой точки $(t_0, x_0) \in \overline{S}$ для операторов A_0, B_{j0} $\big(B_{j0} = \sum\limits_{|\beta| = m_j} b_{j\beta} D^\beta\big)$ в локальной системе координат y предполагается, что система

$$(\lambda E + A_0(i\xi', \partial_{y_n}))v(z) = 0, \quad B_{j0}(i\xi', \partial_{y_n})v(0) = h_j \tag{10}$$

$(\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}),\ y_n \in \mathbb{R}^+,\ j = 1, 2, \dots, m)$ имеет единственное решение из $C(\overline{\mathbb{R}^+})$, ограниченное на бесконечности для всех $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|\arg \lambda| \leq \pi/2$ и $h_j \in E$ таких, что $|\xi'| + |\lambda| \neq 0$.

При выполнении условий (6), (9), (10) задача (1), (2) обладает свойством, описанным в следующем утверждении (см., например, теорему 10.4 в [26]).

Теорема 1. *Пусть G — ограниченная область с границей класса C^{2m} и $\tau \in (0, T]$. Тогда если $g \in L_p(Q^\tau)$, $g_j \in W_p^{k_j, 2mk_j}(S^\tau)$, то существует единственное решение $u \in W_p^{1,2m}(Q^\tau)$ задачи (1), (2), удовлетворяющее оценке*

$$\|u\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} \leq c\left[\|g\|_{L_p(Q^\tau)} + \sum_{j=1}^m \|g_j\|_{W_p^{k_j, 2mk_j}(S^\tau)} + \|u_0\|_{W_p^{2m - 2m/p}(G)}\right],$$

где c — постоянная, не зависящая от данных задачи g, g_j, u_0, решения u и от параметра $\tau \in (0, T]$ (в случае, если $g_j \equiv 0$, $j = 1, 2, \dots, m$) и $k_j = (2m - m_j - 1/p)/(2m)$.

Фиксируем $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ и перейдем в области $Q_{\delta_1 i}$ $(\delta_1 < \delta)$ к переменным $y' = x'$, $y_n = x_n - \varphi^i(x')$, $t = t$. При этой замене операторы A, B_j перейдут в некоторые операторы $A^i(t, y, D_y)$, $B^i_j(t, y, D_y)$. Обозначим через $A^i_{y'}$, $B^i_{jy'}$ части операторов A^i, B^i_j, не содержащие производных по переменной y_n, а через $A^i_{y''}$, $B^i_{jy''}$ — остатки. Аналогичный смысл имеют обозначения $A_{x'}$, $B_{jx'}$, $A_{x''}$, $B_{jx''}$. Опишем связь между производными в новых и старых переменных. Имеем

$$\partial_{x_j} = \partial_{y_j} - \varphi^i_{y_j}(y')\partial_{y_n}, \quad \partial_{x_n} = \partial_{y_n}, \quad \partial_{y_j} = \partial_{x_j} + \varphi^i_{x_j}(x')\partial_{x_n}, \quad j < n.$$

Тогда

$$A^i_{y'}(t,y,D_{y'}) = A_{x'}(t,y',y_n+\varphi^i(y'),D_{y'}),$$
$$B^i_{jy'}(t,y,D_{y'}) = B_{jx'}(t,y',y_n+\varphi^i(y'),D_{y'}).$$

Обозначим через $A^{ij}(t,y,D_y)$ оператор, полученный из оператора $A^i(t,y,D_y)$ дифференцированием всех его коэффициентов j раз по переменной y_n, т. е. $A^{ij}(t,y,D_y)=\partial^j_{y_n}A^i(t,y,D_y)$. Перейдя в уравнении (1) к переменным y в области $Q_{\delta_1 i}$ $(\delta_1<\delta)$, получим уравнение

$$u_t + A^i(t,y,D)u = g = \sum_{k=1}^{r}\tilde b_k(t,y)q_k(t,y') + f, \quad (t,y)\in \widetilde{Q}_{\delta_1 i}, \tag{11}$$

где $\widetilde{Q}_{\delta_1 i}=\Omega\times(-\delta_1,\delta_1)\times(0,T)$ и $\tilde b_k(t,y)=b_k(t,y',y_n+\varphi^i(y'))$. Дифференцируя (11) по переменной y_n, приходим к равенствам

$$u^{(l)}_t + \sum_{j=0}^{l} A^{ij}(t,y,D)u^{(l-j)}C^j_l = \sum_{i=1}^{r}\tilde b^{(l)}_i(t,y)q_i(t,y') + f^{(l)}, \tag{12}$$

где $(t,y)\in Q_{\delta_1 i}$, $l=0,1,\dots,r_i-1$, выражение $v^{(l)}$ совпадает с производной $v^{(l)}=\partial^l_{y_n}v$ и C^j_l — биномиальные коэффициенты. Рассмотрим вспомогательную систему

$$\psi^{il}_t + \sum_{j=0}^{l} A^{ij}_{y'}(t,y',0,D_{y'})\psi^{i\,l-j}C^j_l = 0, \quad (t,y')\in Q_0, \tag{13}$$

где $\psi^{il}(t,y')$ — набор вектор-функций длины h, определенных в области Q_0, $i=1,2,\dots,s$, $l=0,1,\dots,r_i-1$. Набор Ψ вектор-функций $\psi^{il}\in W^{1,2m}_p(Q_0)$, удовлетворяющих системе (13) и условию $\psi^{il}(0,y')=0$ и таких, что существует функция Φ, удовлетворяющая (4), (5), где $u_0=0$, $g_j\equiv 0$ $(j=1,\dots,m)$, и равенствам $\psi^{il}(t,x')=\partial^l_{x_n}\Phi(t,x',\varphi^i(x'))$ $(i=1,2,\dots,s,\ l=0,1,\dots,r_i-1)$, вместо последнего равенства в (5) назовем *допустимым.*

Будем говорить, что равенства (3) *выполняются в обобщенном смысле*, если найдется допустимый набор $\Psi=\{\psi^{kj}\}$ $(j=0,1,\dots,r_k-1,\ k=1,2,\dots,s)$ такой, что

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}\right|_{S_k} = \psi_{kj}(t,x') + \psi^{kj}(t,x'), \quad (t,x')\in Q_0.$$

Теорема 2. *Пусть условия* (A), (4)–(10) *выполнены. Тогда*

1. *Для любого $\delta_1<\delta$ найдется постоянная $c>0$ такая, что решение $(u,q_1,\dots,q_r)$ задачи* (1)–(3) *из класса*

$$H=\left\{u\in W^{1,2m}_p(Q) : \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\in W^{1,2m}_p(Q_{\delta_2 i})\ \forall\delta_2<\delta,\ q_j\in L_p(Q_0)\right\},$$

где $i=1,2,\dots,s$, $k=1,2,\dots,r_i-1$, $j=1,2,\dots,r$, удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{W^{1,2m}_p(Q)} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{r_j}\left\|\frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right\|_{W^{1,2m}_p(Q_{\delta_1 j})} + \sum_{j=1}^{r}\|q_j\|_{L_p(Q_0)}$$
$$\le c\left(\|\Phi\|_{W^{1,2m}_p(Q)} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{r_j}\left\|\frac{\partial^k\Phi}{\partial x_n^k}\right\|_{W^{1,2m}_p(Q_{\delta j})} + \|f\|_{L_p(Q)} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{r_j}\left\|\frac{\partial^k f}{\partial x_n^k}\right\|_{L_p(Q_{\delta j})}\right).$$

2. *Существует единственное решение* $(u, q_1, \dots, q_r)$ *задачи* (1)–(3), *где равенство* (3) *понимается в обобщенном смысле, из класса* H.

3. *Пусть* $\Psi = \{\psi_{ij}\}$ — *некоторый нетривиальный допустимый набор. Тогда в классе* H *решения* $(u, q_1, \dots, q_r)$ *задачи* (1)–(3), *где* $u_0 \equiv 0, f \equiv 0$, $g_j \equiv 0$, *не существует.*

4. *Запишем операторы*

$$B^i_j(t, y, D_y) = \sum_{l=0}^{m_j} B^i_{jl}(t, y, D_{y'})\partial^l_{y_n}$$

и предположим, что

$$\partial^k_{y_n} B^i_{jl}(t, y', 0, D_{y'}) = 0 \quad \text{на } S_0$$

при $i = 1, 2, \dots, s$, $j = 1, \dots, m$, $k = 0, 1, \dots, r_j - 1$, $k + 1 \leq l \leq m_j$. *Тогда не существует нетривиального допустимого набора и существует единственное решение* $(u, q_1, \dots, q_s)$ *задачи* (1)–(3), *где равенство* (3) *понимается в обычном смысле, из класса* H.

Равенство $\partial^k_{y_n} B^i_{jl}(t, y', 0, D_{y'}) = 0$ в формулировке п. 4 означает, что k-е производные по переменной y_n от коэффициентов оператора $B^i_{jl}(t, y', y_n, D_{y'})$ обращаются в нуль в точке $y_n = 0$.

Замечание 1. В коэффициентной обратной задаче, где наряду с правой частью определяются также и коэффициенты уравнения, аналог утверждений 1, 4 теоремы 2 остается справедливым: имеет место оценка устойчивости (вместо оценки из утверждения 1), а теорема существования становится локальной по времени.

§ 3. Доказательство основных результатов

Следующее вспомогательное утверждение (см. лемму 2.1 в [22]) вытекает из леммы 3.3 в [26] и интерполяционных неравенств.

Лемма 1. *Если* $u \in W^{1,2m}_p(Q^\tau)$ $(\tau > 0,\ p > n + 2m)$, *то производная вида* $D^\alpha_x u$ *при* $|\alpha| \leq 2m - 1$, *быть может, после изменения на множестве меры нуль принадлежит* $C(\overline{Q^\tau})$, *и если* $u(0, x) = 0$, *то для всех* α *с* $|\alpha| < 2m$ *справедлива оценка*

$$\|D^\alpha u\|_{C(\overline{Q^\tau})} \leq c\|u\|_{W^{1,2m}_p(Q^\tau)}\tau^\beta,$$

где $\beta \in (0, 1]$, c — *некоторые положительные постоянные, не зависящие от* u *и* $\tau \in (0, T]$.

Доказательство теоремы 2. Вначале докажем утверждение 2 теоремы. Сделаем замену $u = v + \Phi$, где Φ — функция из условия (4). Имеем

$$v_t + A(t, x, D)v = g + \sum_{i=1}^r b_i(t, x)q_i(t, x'), \quad (t, x) \in Q, \tag{14}$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad B_j v|_S = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m), \tag{15}$$

$$\frac{\partial^k v}{\partial x^k_n}|_{S_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s,\ k = 0, 1, \dots, r_i - 1, \tag{16}$$

где $g = f - \Phi_t - A(x, t, D)\Phi$. Фиксируя функции $q_j \in L_p(Q^\tau)$ и находя решение v задачи (14), (15) на интервале $(0, \tau)$, получим отображение $v = v(\vec{q})$ $(\vec{q} = (q_1, \dots, q_r))$. Положим

$$\|\vec{q}\|_{L_p(Q^\tau)} = \sum_{i=1}^r \|q_i\|_{L_p(Q^\tau)}$$

и предположим, что $\|\vec{q}\|_{L_p(Q^\tau)} \le R_0$. Постоянную R_0 определим ниже. Используя теорему 1, приходим к представлению для функции $v = v(\vec{q})$ вида

$$v = (\partial_t + A)^{-1} g + (\partial_t + A)^{-1} \sum_{i=1}^{r} b_i(t,x) q_i(t,x') = R_1(g) + R_2(\vec{q}). \tag{17}$$

Имеем оценку

$$\|v\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} \le c\|g\|_{L_p(Q^\tau)} + c_0\|\vec{q}\|_{L_p(Q^\tau)} \le c\|g\|_{L_p(Q^\tau)} + c_0 R_0 = c_1. \tag{18}$$

Здесь и далее через c_i обозначаем постоянные, не зависящие от конкретных данных задачи f, g_j, u_0, ψ_j. В силу условий гладкости на коэффициенты полученное решение обладает большей гладкостью в областях $Q^\tau_{\delta k}$, точнее, существуют обобщенные производные $\partial^i_{x_n} v \in W_p^{1,2m}\big(Q^\tau_{\delta_1 k}\big)$ для всех $\delta_1 < \delta$ и $k = 1,2,\dots,s$, $i \le r_k$. Более того, при фиксированном $\delta_1 < \delta$ справедлива оценка

$$\begin{multline}\|v\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} + \sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{r_k}\big\|\partial^i_{x_n} v\big\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau_{\delta_1 k})} \\ \le c_7\left(\|g\|_{L_p(Q^\tau)} + \sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{r_k}\big\|\partial^i_{x_n} g\big\|_{L_p(Q^\tau_{\delta k})} + c_8\|\vec{q}\|_{L_p(Q^\tau_0)}\right) = c_9(R_0). \tag{19}\end{multline}$$

Доказательство этого факта проводится при помощи метода конечных разностей с использованием леммы 4.6 в [26, гл. 2]. Оно совершенно аналогично доказательству соответствующего факта в доказательстве теоремы 1.1 в [22], поэтому мы его опустим. Докажем разрешимость задачи. Пусть v, $\vec{q}$ — решение задачи (14)–(16). Перейдя в области $Q^\tau_{\delta_1 i}$ ($\delta_1 < \delta$) к переменным $y' = x'$, $y_n = x_n - \varphi^i(x')$, получим, что эта область перейдет в область $\widetilde{Q}^\tau_{\delta_1 i} = \Omega \times (-\delta_1, \delta_1) \times (0,\tau)$, а уравнение (14) преобразуется к виду

$$v_t + A^i(t,y,D)v = \sum_{k=1}^{r} \tilde{b}_k(t,y) q_k(t,y') + g, \quad (t,y) \in \widetilde{Q}^\tau_{\delta_1 i}. \tag{20}$$

Дифференцируя его по переменной y_n, приходим к равенствам

$$v_t^{(l)} + \sum_{j=0}^{l} A^{ij}(t,y,D) v^{(l-j)} C_l^j = \sum_{i=1}^{r} \tilde{b}_i^{(l)}(t,y) q_i(t,y') + g^{(l)}, \tag{21}$$

где $l = 0,1,\dots,r_i - 1$ и $v^{(l)} = \partial^l_{y_n} v$. Полагая $y_n = 0$, с учетом равенств $A^{ij}_{y'} v|_{y_n=0} = 0$ ($i = 1,2,\dots,s$, $j = 0,\dots,r_i - 1$) получаем

$$\sum_{j=0}^{l} A^{ij}_{y''}(t,y',0,D_{y'}) v^{(l-j)} C_l^j - g^{(l)}(t,y',0) = \sum_{i=1}^{r} \tilde{b}_i^{(l)}(t,y',0) q_i(t,y'), \tag{22}$$

где $l = 0,1,\dots,r_i - 1$. Правая часть в равенстве (22) может быть записана в виде $B(t,y')\vec{q}$, где $\vec{q} = (q_1,q_2,\dots,q_r)$. Левая часть есть сумма векторов $\vec{g}_0(t,y') + H(\vec{q})$. Элементы вектора $\vec{g}_0$ с номерами от $\sum\limits_{l=0}^{j-1} r_l h + 1$ ($r_0 = 0$) до $\sum\limits_{l=0}^{j} r_l h$ ($j = 1,\dots,s$) дают составной вектор, координаты которого с номерами от $kh+1$ до $(k+1)h$ ($k = 0,1,\dots,r_j - 1$) занимает вектор $-g^{(l)}(t,y',0) + \sum\limits_{j=0}^{l} A^{ij}_{y''}(t,y',0,D_{y'}) v_1^{(l-j)} C_l^j$

с $v_1 = R_1(g)$. Аналогично элементы вектора $H(\vec{q})$ с номерами от $\sum\limits_{l=0}^{j-1} r_l h + 1$ ($r_0 = 0$) до $\sum\limits_{l=0}^{j} r_l h$ ($j = 1, \ldots, s$) дают составной вектор, координаты которого с номерами от $kh+1$ до $(k+1)h$ ($k = 0, 1, \ldots, r_j - 1$) занимает вектор $\sum\limits_{j=0}^{l} A^{ij}_{y''}(t, y', 0, D_{y'}) v_2^{(l-j)} C_l^j$ с $v_2 = R_2(\vec{q})$. В итоге получим систему

$$\vec{q}(t, y') = B^{-1} H(\vec{q})(t, y') + B^{-1} \vec{g}_0 = R(\vec{q}) + g_1. \tag{23}$$

Это и есть система для величин q_i. Определим величину R_0, положив $R_0 = 2\|g_1\|_{L_p(Q_0)}$. Покажем существование такого числа $\tau_1 \le T$, что линейный оператор $R(q) = B^{-1} H(\vec{q})(t, y')$, $R : L_p(Q^{\tau_1}) \to L_p(Q^{\tau_1})$, сжимающий. По доказанному решение $v_2 = R_2(\vec{q}) \in W_p^{1,2m}(Q^\tau)$ задачи (15), (16) удовлетворяет оценкам (19), (18), где $g \equiv 0$. Таким образом,

$$\|v_2\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} + \sum_{k=1}^{s} \sum_{i=1}^{r_k} \big\|\partial^i_{x_n} v_2\big\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau_{\delta_1 k})} \le c_8 \|\vec{q}\|_{L_p(Q_0^\tau)}. \tag{24}$$

Каждая из производных, входящих в выражение $A^{ij}_{y''} v^{(l-j)} v_2|_{y''=0}$, представима в виде $D^\alpha \partial^l_{y_n} v_2$ с $l \le r_i$ и $|\alpha| \le 2m-1$. Следовательно, по лемме 1 она непрерывна на $\widetilde{Q}^\tau_{\delta_1 i}$ (после, может быть, изменения на множестве меры 0), и, более того, справедлива оценка

$$\begin{aligned} \big\|D^\alpha \partial^l_{y_n} v_2(t, y', 0)\big\|_{L_p(Q_0^\tau)} &\le \tau^{1/p} \big\|D^\alpha \partial^l_{y_n} v_2(t, y)\big\|_{C(\overline{\widetilde{Q}^\tau_{\delta_1 i}})} \\ &\le c\tau^{\beta+1/p} \big\|\partial^l_{y_n} v_2(t, y)\big\|_{W_p^{1,2m}(\widetilde{Q}^\tau_{\delta_1 i})}. \end{aligned}$$

Используя (24) и условия на коэффициенты, заключаем, что для некоторого $\beta > 0$ справедлива оценка

$$\|R(\vec{q})(t, y')\|_{L_p(Q_0^\tau)} \le \tau^{\beta+1/p} c_9 \|\vec{q}\|_{L_p(Q_0^\tau)}, \tag{25}$$

где постоянная c_9 не зависит от τ. Выберем параметр τ_1 так, что $c_9 \tau^{\beta+1/p} \le 1/2$ при всех $\tau \le \tau_1$. В этом случае справедливо неравенство $\|R(\vec{q})\|_{L_p(Q_0^{\tau_1})} \le \frac{1}{2}\|\vec{q}\|_{L_p(Q_0^{\tau_1})}$, которое гарантирует существование единственного решения $\vec{q} \in L_p(Q_0^{\tau_1})$ уравнения (23). Построено решение уравнения (23) на $[0, \tau_1]$, а надо построить его на всем промежутке $[0, T]$. Процедура продолжения решения на весь промежуток $[0, T]$ стандартная. Повторяем рассуждения на промежутках $[\tau_1, \tau_2]$ (подходящим образом выбирая τ_2), $[\tau_2, \tau_3]$ и т. д. и замечаем, что промежуток разрешимости не стремится к нулю в силу линейности задачи. Таким образом, за конечное число шагов покажем существование на всем промежутке $[0, T]$. Пусть v — решение задачи (14), (15) и $u = \Phi + v$. Покажем, что выполнены условия (3) в обобщенном смысле. По построению v — решение задачи (14), (15). Перейдя в области $Q_{\delta_1 i}$ ($\delta_1 < \delta$) к переменным $y' = x'$, $y_n = x_n - \varphi^j(x')$, $t = t$, дифференцируя (14) по переменной y_n и полагая $y_n = 0$, вместо (21) приходим к равенствам

$$\begin{aligned} \psi_t^{il} + \sum_{j=0}^{l} A^{ij}_{y'}(t, y', 0, D_{y'}) \psi^{i\,l-j} C_l^j + A^{ij}_{y''} v^{(l-j)} C_l^j \\ = \sum_{i=1}^{r} \tilde{b}_i^{(l)}(t, y', 0) q_i(t, y') + g^{(l)}(t, y', 0), \end{aligned}$$

где $\psi^{il}(t,y') = \partial^l_{x_n} v(t,y',0)$, $i = 1,2,\dots,s$, $l = 0,1,\dots,r_i-1$. Вычитая из них равенства (22), получим

$$\psi^{il}_t + \sum_{j=0}^{l} A^{ij}_{y'}(t,y',0,D_{y'})\psi^{i\,l-j} = 0, \quad i = 1,\dots,s,\ l = 0,\dots,r_i-1. \tag{26}$$

Таким образом, набор $\Psi = \{\psi^{il}\}$ допустимый, в определении допустимого набора в качестве соответствующей функции Φ можно взять функцию v. Кроме того,

$$\partial^l_{x_n} u|_{S_i} = \partial^l_{x_n}\Phi|_{S_i} + \partial^l_{x_n} v|_{S_i} = \psi_{il} + \psi^{il}. \tag{27}$$

Это равенство означает, что условия переопределения (3) выполняются в обобщенном смысле.

Покажем выполнение утверждения 4 теоремы. Пусть $\partial^k_{y_n} B^i_{jl}(t,y',0,D_{y'}) = 0$ на S_0 при $i = 1,2,\dots,s$, $j = 1,\dots,m$, $k = 0,1,\dots,r_j-1$, $k+1 \le l \le m_j$ и $\Psi = \{\psi^{il}\}$ — допустимый набор. Найдется функция v, удовлетворяющая однородным начальным и краевым условиям из класса, указанного в формулировке теоремы, такая, что

$$\psi^{il}(t,y') = \partial^l_{x_n} v(t,y',0), \quad i = 1,2,\dots,s,\ l = 0,1,\dots,r_i-1.$$

Функции ψ^{il} удовлетворяют системе (26). Возьмем $l = 0$ и фиксируем i. Тогда система преобразуется к виду

$$\psi^{i0}_t + A^i_{y'}(t,y',0,D_{y'})\psi^{i0} = 0, \tag{28}$$

причем при $\delta_1 < \delta$ и $y_n = 0$ имеем

$$B^i_j v|_{S_0} = B^i_{j0} v|_{S_0} = B^i_{j0}\psi^{i0} = 0, \quad \psi^{i0}(0,y') = 0, \tag{29}$$

Получим, что функции ψ^{i0} — решения параболической системы (28) в Q_0, удовлетворяющие однородным начальным и краевым условиям (29). Легко проверить, используя определения, что условия параболичности и условия Лопатинского для этой системы выполнены. Следовательно, $\psi^{i0} \equiv 0$ для всех i. Взяв в (26) $l = 1$ и воспользовавшись последними равенствами, получим систему (28) уже для функций ψ^{i1}. Дифференцируя равенство $B^i_j v|_S = 0$ по переменной y_n и полагая $y_n = 0$, придем к равенству

$$B^i_{j0}\psi^{i1} + \partial_{y_n} B^i_{j1}\psi^{i1} = 0 \quad \text{на } S_0.$$

Таким образом, $\psi^{i1} \equiv 0$ при всех i. По индукции $\psi^{ij} = 0$ для всех допустимых значениях параметров. Тем самым любой допустимый набор Ψ тривиален. Равенства (27) влекут, что (3) выполнены в обычном смысле.

Чтобы доказать утверждение 3, рассмотрим решение $(u,q_1,\dots,q_r)$ задачи (1)–(3), где $u_0 \equiv 0$, $f \equiv 0, g_j \equiv 0$ $(j = 1,2,\dots,m)$ из класса H. Предположим, что $\Psi = \{\psi_{ij}\}$ — нетривиальный допустимый набор. Функции $\psi^{il}(t,y') = \partial^l_{x_n} u(t,y',0)$, $i = 1,2,\dots,s$, $l = 0,1,\dots,r_i-1$, удовлетворяют системе

$$\psi^{il}_t + \sum_{j=0}^{l} A^{ij}_{y'}(t,y',0,D_{y'})\psi^{i\,l-j}C^j_l + A^{ij}_{y''}u^{(l-j)}C^j_l$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \tilde b^{(l)}_i(t,y',0)q_i(t,y') + g^{(l)}(t,y',0). \tag{30}$$

Функция u — решение задачи (14), (15), где $g=0$. В силу допустимости набора первые два слагаемых в этой системе обращаются в нуль. Получим систему

$$\sum_{j=0}^{l} A^{ij}_{y''} u^{(l-j)} C^j_l = \sum_{i=1}^{r} \tilde{b}^{(l)}_i(t,y',0) q_i(t,y'), \tag{31}$$

которая совпадает с системой (22) с $g=0$. По доказанному локально по времени система имеет единственное решение, которое будет нулевым, поскольку нулевой вектор есть решение системы. Повторяя рассуждения, покажем, что $\vec{q}\equiv 0$. Тогда функция u есть решение задачи (1), (2) с однородными данными и, значит, $u\equiv 0$. Но тогда и $\psi^{ij}\equiv 0$ для всех i,j, что противоречит нетривиальности набора Ψ. Следовательно, задача (14), (15) не имеет решения. Докажем утверждение 1. Оценка для вектор-функции $\vec{q}$ на временном промежутке $[0,\tau_1]$ вытекает из равенства (23) и оценки для оператора R. Последующие оценки для $\vec{q}$ получаются повторением рассуждений на соответствующих временных промежутках. Далее оценка для решения u вытекает из теоремы 1. Теорема доказана.

Замечание 2. Легко увидеть, что утверждение теоремы 2 остается справедливым при тех же условиях на коэффициенты уравнения, область G и данные задачи и для неограниченных областей G, если справедливо утверждение теоремы 1. Вопрос о справедливости этого утверждения для эллиптических операторов второго порядка, например, обсуждается в теореме 9.1 в [26, гл. 4]. Для произвольных параболических систем условия на данные и на границу области могут быть найдены в [27].

§ 4. Примеры

Возьмем в качестве оператора A эллиптический оператор второго порядка

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) u_{x_i} + a_0(x,t)u,$$

где

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \delta_0|\xi|^2 \quad \forall \xi\in\mathbb{R}^n,\ \forall (x,t)\in Q = G\times(0,T)$$

и δ_0 — положительная постоянная. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область с границей класса C^2, $G\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей класса C^2 такая, что $\Omega\times(-1,1)\subset G$, $G\subset\Omega\times(-2,2)$. Рассмотрим задачу

$$u_t + Au = f + q(t,x')b(t,x),\ (x,t)\in Q, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad Bu|_S = g, \tag{32}$$

где $Bu=u$ или $Bu=\sum\limits_{i=1}^{n} l_i(x,t)u_{x_i} + \sigma u$. Предположим, что система поверхностей в (3) состоит из одной поверхности Γ_1: $x_n=\varphi(x')$, $x'\in\Omega$, а условия переопределения на S_1 имеют вид

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right|_{S_1} = \psi_k(t,x'), \quad S_1=(0,T)\times\Gamma_1, \quad k=0,1, \tag{33}$$

причем $\varphi(x')\in C^2(\overline{\Omega})$ и $|\varphi(x')|<\delta_1<1/2$ для всех $x'\in\overline{\Omega}$. Легко увидеть, что если $Bu=u$, то любой допустимый набор Ψ состоит только из нуля и справедливы утверждения 1, 4 теоремы 2. Рассмотрим второй случай, когда рассматриваются условия типа Робина. Перейдем к системе координат y: $y_n = x_n - \varphi(x')$, $y' = x'$. Вычисляя оператор B в новых переменных y, найдем, что

$$Bu = \sum_{i=1}^{n-1} l_i u_{y_i} + \left(l_n - \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_{y_i} l_i\right) u_{y_n} + \sigma u$$

и, значит, при $y_n = 0$

$$B_{y'} u = \sum_{i=1}^{n-1} l_i u_{y_i}(y', 0, t) + \sigma u(y', 0, t),$$

$$B_{y''} u = \left(l_n - \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_{y_i} l_i\right) u_{y_n}(y', 0, t).$$

Таким образом, условие, использованное в утверждении 4 теоремы 2, в переменных x записывается в виде

$$\tilde{l}_n = \left(l_n - \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_{x_i} l_i\right)(x', \varphi(x'), t) = 0 \quad \text{на } S_0 = \partial\Omega \times (0, T)$$

или в виде

$$(\vec{l}(x', \varphi(x'), t), \vec{n}) = 0 \quad \forall (x', t) \in S_0, \tag{34}$$

где $\vec{l} = (l_1, \dots, l_n)$, $\vec{n}$ — единичная нормаль к S_1 в данной точке и скобки обозначают скалярное произведение. По теореме 2 при выполнении условия (34) и соответствующих условиях гладкости и согласования на данные задача (32), (33) безусловно разрешима. Покажем, что при нарушении условия (34) это неверно. Запишем определение допустимого набора в данной конкретной ситуации. Набор $\Psi = \{\psi_0, \psi_1\}$ допустим, если

$$\psi_{0t} + A_{y'}(y', 0, t, D_{y'})\psi_0 = 0, \ (y', t) \in Q_0, \quad \psi_0|_{t=0} = 0, \ (y', t) \in Q_0, \tag{35}$$

$$\psi_{1t} + A_{y'}(y', 0, t, D_{y'})\psi_1 + \partial_{y_n} A_{y'}(y', 0, t, D_{y'})\psi_0 = 0, \quad \psi_1|_{t=0} = 0, \tag{36}$$

и существует функция Φ, удовлетворяющая условиям гладкости (4), (5), где $m = 1$, однородным начальным и краевым условиям и такая, что

$$\psi_0(x', t) = \Phi(x', \varphi(x'), t), \quad \psi_1(x', t) = \Phi_{x_n}(x', \varphi(x'), t), \quad B\Phi|_S = 0. \tag{37}$$

Отметим, что

$$A_{y'}(y', y_n, t, D_{y'})v = -\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} v_{y_i y_j} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i u_{y_i} + a_0 u,$$

где все коэффициенты взяты в точке $(y', y_n + \varphi(y'), t)$. Далее считаем, что условия (6), (7) и условие Лопатинского (10) выполнены применительно к задаче (32), (33) с условиями типа Робина, записанными выше. Отметим, что условия Лопатинского выполнены, если, например, коэффициенты l_i вещественны и вектор $\vec{l}$ не является касательным к S во всех точках S.

Лемма 2. *Пусть найдется функция* $\psi(x',t) \in W_p^{1-1/2p,2-1/p}(S_0)$ *такая, что* $\psi(x',0) = 0$ *и функция* $\tilde{l}_n(x',\varphi(x'),t)\psi(x',t)|_{S_0}$ *не равна нулю на множестве положительной меры (на* S_0*). Тогда множество нетривиальных допустимых наборов непусто.*

Доказательство. Задача

$$\psi_{0t} + A_{y'}(y',0,t,D_{y'})\psi_0 = 0, \quad \psi_0|_{t=0} = 0, \quad B_{y'}\psi_0|_{S_0} = -\tilde{l}_n\psi|_{S_0}, \tag{38}$$

имеет единственное решение из класса $\psi_0 \in W_p^{1,2}(Q_0)$. Далее находим решение $\psi_1 \in W_p^{1,2}(Q_0)$ задачи (36) такое, что $\psi_1|_{S_0} = \psi|_{S_0}$. Построенные функции нетривиальны. Перейдем к системе координат y: $y' = x'$, $y_n = x_n - \varphi(x')$. Область Q перейдет в некоторую другую область $\widetilde{Q}$, содержащуюся в цилиндре $\Omega\times(-\infty,\infty)$, при этом область $Q_{\delta_0} = \{(x,t) : x' \in \Omega, |x_n - \varphi(x')| < \delta_0\}$ перейдет в область $\widetilde{Q}_{\delta_0} = \Omega\times(-\delta_0,\delta_0)\times(0,T)$. Чтобы показать, что построенный набор $\Psi = \{\psi_0,\psi_1\}$ допустим, необходимо построить функцию Φ, удовлетворяющую (37) и такую, что $\partial_{y_n}^k\Phi \in W_p^{1,2}(\widetilde{Q})$ $(k = 0,1,2)$. Такая функция может быть построена комбинированием стандартных теорем продолжения для функций из класса Соболева и теоремы продолжения для цилиндрических областей (теорема 7.3 в [25]). Конструкция не очень сложная, и мы на ней не останавливаемся.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Badia A. El, Ha-Duong T., Hamdi A.* Identification of a point source in a linear advection-dispersion-reaction equation: application to a pollution source problem // Inverse Probl. 2005. V. 21, N 3. P. 1–17.
2. *Badia A. El, Hamdi A.* Inverse source problem in an advection-dispersion-reaction system: application to water pollution // Inverse Probl. 2007. V. 23, N 5. P. 2103–2120.
3. *Deng X., Zhao Y., Zou J.* On linear finite elements for simultaneously recovering source location and intensity // Int. J. Numer. Anal. Modeling. 2013. V. 10, N 3. P. 588–602.
4. *Панасенко А. Е., Старченко А. В.* Численное решение некоторых обратных задач с различными типами источников атмосферного загрязнения // Вестн. Томск. ун-та. Математика, механика. 2008. № 2. С. 47–55.
5. *Ling L., Takeuchi T.* Point sources identification problems for heat equations // Commun. Comput. Phys. 2009. V. 5, N 5. P. 897–913.
6. *Криксин Ю. А., Плющев С. Н., Самарская Е. А., Тишкин В. Ф.* Обратная задача восстановления плотности источника для уравнения конвекции-диффузии // Мат. модел. 1995. Т. 7, № 11. С. 95–108.
7. *Калинина Е. А.* Численное исследование обратной задачи восстановления плотности источника двумерного нестационарного уравнения конвекции-диффузии // Дальневост. мат. журн. 2004. Т. 5, № 1. С. 89–99.
8. *Farcas A., Lesnic D.* The boundary-element method for the determination of a heat source dependent on one variable // J. Engineering Math. 2006. V. 54, N 4. P. 375–388.
9. *Babeshko O. M., Evdokimova O. V., Evdokimov S. M.* On taking into account the types of sources and settling zones of pollutants // Dokl. Math. 2000. V. 61, N 2. P. 283–285.
10. *Ozisik M. N., Orlando H. A. B.* Inverse heat transfer. New York: Taylor & Francis, 2000.
11. *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Ненарокомов А. В.* Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена. М.: Янус-К, 2009.
12. *Alifanov O. M.* Inverse heat transfer problems. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1994.
13. *Belov Ya. Ya.* Inverse problems for partial differential equations. Utrecht: VSP, 2002.
14. *Фроленков И. В., Кригер Е. Н.* О задаче идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении // J. Sib. Federal Univ. Math. & Phys. 2010. V. 3, N 4. P. 556–564.
15. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. Lviv: WNTL Publ., 2003. (Math. Stud. Monogr. Ser.; V. 10).
16. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations. Berlin: Springer-Verl., 2006. (Appl. Math. Sci.; V. 127).

17. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
18. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, Inc., 1999.
19. *Pyatkov S. G., Tsybikov B. N.* On some classes of inverse problems for parabolic and elliptic equations // J. Evol. Equat. 2011. V. 11, N 1. P. 155–186.
20. *Pyatkov S. G.* On some classes of inverse problems for parabolic equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2011. V. 18, N 8. P. 917–934.
21. *Пятков С. Г., Цыбиков Б. Н.* О некоторых классах обратных эволюционных задач для параболических уравнений // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 1. С. 141–153.
22. *Pyatkov S. G., Samkov M. L.* On some classes of coefficient inverse problems for parabolic systems of equations // Sib. Adv. Math. 2012. V. 22, N 4. P. 287–302.
23. *Пятков С. Г.* О некоторых классах эволюционных обратных задачах: Тр. Междунар. конф. «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы». Стерлитамак, 2013. Уфа: Изд-во БашГУ, 2013. С. 52–57.
24. *Triebel H.* Interpolation theory. Function spaces. Differential operators. Berlin: VEB Deutscher Verl. der Wissenschaften, 1978.
25. *Grisvard P.* Equations differentielles abstraites // Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. IV. Sér. 1969. V. 2, N 3. P. 311–395.
26. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
27. *Солонников В. А.* О краевых задачах для параболических систем общего вида // Тр. МИАН. 1965. Т. 83. С. 3–163.

Статья поступила 2 октября 2015 г.

Пятков Сергей Григорьевич
Югорский гос. университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
s_pyatkov@ugrasu.ru, pyatkov@math.nsc.ru