Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2016. Том 57, № 5

УДК 519.2

О ТЕОРЕМАХ СРАВНЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ С ВЕРОЯТНОСТЬЮ 1 ОДНОМЕРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. С. Асылгареев, Ф. С. Насыров

Аннотация. Доказаны теоремы сравнения для скалярных стохастических дифференциальных уравнений для случая неодинаковых коэффициентов диффузии. Приведены условия устойчивости с вероятностью 1 относительно тривиального решения скалярных стохастических дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами. Полученные результаты остаются справедливыми для детерминированных аналогов стохастических дифференциальных уравнений с симметричными интегралами.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.502

Ключевые слова: уравнение с симметричными интегралами, стохастическое дифференциальное уравнение, устойчивость с вероятностью 1, теоремы сравнения.

Введение

Пусть заданы два скалярных уравнения с симметричными интегралами:

$$d\xi_t^{(1)} = \sigma^{(1)}\big(t, \xi_t^{(1)}\big) * dX(t) + b^{(1)}\big(t, \xi_t^{(1)}\big)\,dt, \quad \xi_t^{(1)}|_{t=t_0} = \xi_0^{(1)}, \tag{1}$$

$$d\xi_t^{(2)} = \sigma^{(2)}\big(t, \xi_t^{(2)}\big) * dX(t) + b^{(2)}\big(t, \xi_t^{(2)}\big)\,dt, \quad \xi_t^{(2)}|_{t=t_0} = \xi_0^{(2)}, \tag{2}$$

где $X(t)$, $t \in R^+$, — произвольная непрерывная функция, при этом функция $X(t)$ не предполагается дифференцируемой. Такие уравнения являются детерминированными аналогами стохастических дифференциальных уравнений с интегралом Стратоновича, поэтому доказанные для них утверждения верны с вероятностью 1 и для стохастических дифференциальных уравнений (в дальнейшем СДУ).

Одной из целей данной работы является доказательство теорем сравнения для уравнений (1), (2). Впервые теорему сравнения установил А. В. Скороход [1] для уравнений вида $d\xi(t) = b(t, \xi(t))\,dt + \sigma(t, \xi(t))\,dW(t)$, где $W(t)$ — стандартный винеровский процесс, наиболее общий вид этой теоремы дан в [2]. Результат, полученный в [1], развит в [3, 4]. В [5] приведены теоремы сравнения для СДУ с многомерным винеровским процессом и для стохастических дифференциальных уравнений с частными производными (СДУЧП). Более ранние результаты по теоремам сравнения СДУЧП приведены в [6]. Однако все эти результаты доказаны для случая $\sigma^{(1)}(t,u) = \sigma^{(2)}(t,u)$ для всех (t,u). Случай, когда это предположение не выполняется, рассмотрен в [7] для уравнений Ито специального вида. Существенным отличием теорем сравнения, представленных в данной работе, является тот факт, что они доказаны, во-первых, для уравнений более общего вида, чем в [7], и, во-вторых, коэффициенты уравнений могут быть случайными. Предварительные результаты, положенные в основу данной работы, были представлены на Международном молодежном научном форуме «ЛОМОНОСОВ-2015» [8]. Изложенный подход основан на том, что структура решения детерминированного аналога стохастического дифференциального уравнения известна.

Применение теорем сравнения к СДУ вида

$$d\xi_t = \sigma(t,\xi_t) * dW(t) + b(t,\xi_t)\,dt, \quad \xi_t|_{t=t_0} = \xi_0, \tag{3}$$
$$\sigma(t,0)=0, \quad b(t,0)=0,$$

позволило получить условия устойчивости СДУ с вероятностью 1. Обычно для СДУ с неслучайными $\sigma(t,u)$ и $b(t,u)$ рассматривается устойчивость в более слабых смыслах: по вероятности и p-устойчивость. Возмущенное решение ξ_t уравнения (3) с начальным условием $\xi_0 = x_0$ *устойчиво по вероятности*, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\xi_0\to 0} P\{\sup_{t>0} |\xi_t| > \varepsilon\} = 0.$$

Возмущенное решение ξ_t уравнения (3) с начальным условием $\xi_0 = x_0$ *p-устойчиво,* если $\sup\limits_{|x|\le\delta,\quad t\ge 0} E|\xi_t|^p \to 0$ при $\delta \to 0$. Для уравнения (3) вводится оператор Ляпунова

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \left(b^{(1)}(t,u) + \frac{\partial\sigma^{(1)}(t,u)}{\partial u}\sigma^{(1)}(t,u)\right)\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2}(\sigma^{(1)})^2(t,u)\frac{\partial^2}{\partial u^2}.$$

Условия устойчивости по вероятности и p-устойчивости даны в [9, 10] и основаны на построении функции Ляпунова $V(t,x)$, оператор Ляпунова для которой удовлетворяет некоторым неравенствам. Возмущенное решение ξ_t уравнения (3) с начальным условием $\xi_0 = x_0$ *устойчиво с вероятностью* 1, если для п. в. ω для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon,\omega) > 0$ такое, что из неравенства $|x_0| < \delta$ вытекает, что $|\xi_t| < \varepsilon$ при всех $t > 0$. Авторам неизвестны соответствующие теоремы для устойчивости с вероятностью 1 СДУ.

Основная часть

1. Настоящая работа основана на идеях из [11]. Поскольку применяемый ниже метод, по существу, потраекторный и остается справедливым для потраекторных аналогов СДУ, приведем необходимые понятия, применяемые ниже (см. подробнее [11]).

Пусть $\mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$, $\mathbb{R}^+ = [0,+\infty)$. Рассмотрим разбиения T_n, $n\in\mathbb{N}$, отрезка $[0,t]$: $T_n = \{t_k^{(n)}\}$, $0 = t_0^{(n)} \le t_1^{(n)} \le \ldots \le t_k^{(n)} \le \cdots \le t_{m_n}^{(n)} = t$, $n\in\mathbb{N}$, такие, что $T_n \subset T_{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$, и $\lambda_n = \max_k |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}| \to 0$ при $n\to\infty$. Через $X^{(n)}(s)$, $s\in[0,t]$, обозначим ломаную, построенную по функции $X(s)$ и отвечающую разбиению T_n. Положим

$$\Delta t_k^{(n)} = t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}, \quad [\Delta t_k^{(n)}] = [t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}], \quad \Delta X_k^{(n)} = X(t_k^{(n)}) - X(t_{k-1}^{(n)}).$$

Симметричным интегралом называется

$$\int\limits_0^t f(s,X(s)) * dX(s) = \lim_{n\to\infty}\sum_k \frac{1}{\Delta t_k^{(n)}} \int\limits_{[\Delta t_k^{(n)}]} f(s,X^{(n)}(s))\,ds\Delta X_k^{(n)},$$

если предел в правой части равенства существует и не зависит от выбора последовательности разбиения T_n, $n \in \mathbb{N}$.

Следующее условие (S) является достаточным условием существования симметричного интеграла.

Будем говорить, что пара функций $X(s)$, $s \in \mathbb{R}^+$, и $f(s,u)$, $s \in \mathbb{R}^+$, $u \in \mathbb{R}$, *удовлетворят условию* (S) *на* $[0,t]$, если

(а) функция $X(s)$, $s \in [0,t]$, непрерывна;

(б) при п. в. u функция $f(s,u)$, $s \in [0,t]$, имеет ограниченное изменение и непрерывна справа по $s \in [0,t]$;

(в) при п. в. u справедливо равенство

$$\int_0^t \mathbf{1}(X(s)=u)|f|(ds,u) = 0,$$

где при каждом u функция $|f|(s,u)$ есть полное изменение функции $f(\tau,u)$ по переменной τ на отрезке $[0,s]$;

(г) полное изменение $|f|(t,u)$ функции $f(s,u)$ по переменной s на отрезке $[0,s]$ локально суммируемо по u.

Если функция $F(s,u)$ имеет непрерывные частные производные $F'_s(s,u)$, $F'_u(s,u)$, а функции $(X(s), F'_u(s,u))$ удовлетворяют условию (S) на $[0,t]$, то справедливо равенство [11, гл. 2, § 7, теорема 7.2]

$$F(t,X(t)) - F(0,X(0)) = \int_0^t F'_u(s,X(s)) * dX(s) + \int_0^t F'_s(s,X(s))\,ds.$$

Из последней формулы, в частности, следует, что симметричный интеграл в случае типичной траектории винеровского процесса, т. е. когда $X(t) = W(t)$, в рамках формулы Ито с вероятностью 1 совпадает со стохастическим интегралом Стратоновича.

Пусть дано уравнение

$$\xi(t) - \xi(0) = \int_0^t \sigma(s,\xi(s)) * dX(s) + \int_0^t b(s,\xi(s))\,ds. \tag{4}$$

Решением уравнения (4) будем называть любую функцию вида $\xi(s) = \phi(s,X(s))$, $s \in [0,T]$, удовлетворяющую следующим условиям:

(a) функции $(X(s), \sigma(s,\phi(s,u)))$ удовлетворяют условию (S) на $[0,T]$;

(b) функция $b(s,\phi(s,X(s)))$ суммируема на $[0,T]$;

(c) функция $\xi(s)$ обращает уравнение (4) в тождество.

Следующая теорема выявляет *структуру решения* СДУ и уравнений с симметричным интегралом. Эта теорема доказана для случая конечных временных интервалов, но она остается верной для неограниченных интервалов и приводится ниже в модифицированном виде.

Теорема A (см. [11, гл. 2, § 10, теорема 10.1]). *Пусть справедливы следующие предположения:*

(a) *непрерывная функция* $X(s)$, $s \in \mathbb{R}^+$, *нигде не дифференцируема;*

(b) *функции* $\sigma(s,\phi)$, $\sigma'_s(s,\phi)$, $\sigma'_\phi(s,\phi)$, $b(s,\phi)$ *совместно непрерывны на* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Если функция* $\xi(s) = \phi(s, X(s))$ *есть решение уравнения* (4) *такое, что функция* $\phi(s,u)$ *имеет совместно непрерывные частные производные* $\phi'_s(s,u)$, $\phi'_u(s,u)$, $\phi''_{su}(s,u)$, *то она удовлетворяет соотношениям*

$$\phi'_u(s,u) = \sigma(s, \phi(s,u)), \quad \phi'_s(s, X(s)) = b(s, \phi(s, X(s))). \tag{5}$$

2. *Пусть функция* $\phi(s,u)$ *имеет совместно непрерывные частные производные* $\phi'_s(s,u)$, $\phi'_u(s,u)$, $\phi''_{su}(s,u)$ *и является решением цепочки уравнений* (5) *с начальным условием* $\xi(0) = \phi(0, X(0))$. *Тогда функция* $\xi(s) = \phi(s, X(s))$ *есть решение уравнения* (4).

Замечание 1. Если рассматривается СДУ, т. е. $X(s) = W(s)$, имеющее единственное решение, то структура этого решения совпадает со структурой решения детерминированного аналога данного СДУ.

В случае, когда функция $\sigma^{-1}(t,u)$ локально суммируема, выполняется соотношение

$$\int\limits_{\xi(0)}^{\xi(t)} \frac{1}{\sigma(t,\psi)}\, d\psi = X(t) + C(t) \quad \forall t > 0, \tag{6}$$

где $C(t)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$C'(t) = \frac{b(t, \phi(t, X(t) + C(t))) - \phi'_t(t,v)|_{v = X(t)+C(t)}}{\sigma(t, \phi(t, X(t) + C(t)))}. \tag{7}$$

2. Вернемся к уравнениям (1), (2). Ввиду (6) решение уравнения (1) можно представить как функцию от решения уравнения (2), а именно справедлива

Теорема 1. *Пусть* $\xi_t^{(1)}$, $\xi_t^{(2)}$ *являются решениями уравнений* (1), (2) *соответственно и для них выполнены предположения теоремы* A, *а функции* $(\sigma^{(k)}(t,u))^{-1}$, $k = 1, 2$, *локально суммируемы. Тогда* $\xi_t^{(1)} = z(t, \xi_t^{(2)})$, *где*

$$z(t,u) = \phi\left(t, \int\limits_{\xi_0^{(2)}}^{u} \frac{1}{\sigma^{(2)}(t,\psi)}\, d\psi - C^{(2)}(t)\right), \tag{8}$$

при этом

$$z'_u(t,u) = \frac{\sigma^{(1)}(t, z(t,u))}{\sigma^{(2)}(t,u)} \tag{9}$$

во всех точках u, *в которых* $\sigma^{(2)}(t,u) \neq 0$.

Доказательство. Ввиду соотношения (6) для уравнения (2) имеем

$$X(t) = \int\limits_{\xi_0^{(2)}}^{\xi_t^{(2)}} \frac{1}{\sigma^{(2)}(t,\psi)}\, d\psi - C^{(2)}(t),$$

где $C^{(2)}(t)$ удовлетворяет уравнению (7) с $\sigma^{(2)}(t,u)$ и $b^{(2)}(t,u)$.

Следовательно, в силу теоремы A и последнего равенства $\xi_t^{(1)} = z\big(t, \xi_t^{(2)}\big)$. Пусть $\sigma^{(2)}(t,u) \neq 0$ в некоторой точке u, а значит, и в некоторой ее окрестности, тогда в силу соотношения (8) производная $z'_u(t,u)$ вычисляется по формуле (9). $\square$

Замечание 2. Если в качестве $X(t)$ рассматривается стандартный винеровский процесс $W(t)$, то функции $C^{(k)}(t)$, $k=1,2$, случайные, а $z(t,u)$ прогрессивно измеримая.

В дальнейшем всюду будем считать, что все предположения теоремы 1 выполнены, а функция $z(t,u)$ находится согласно теореме 1. Положим

$$\Delta(t,u)=z(t,u)-u,\quad M_2(t)=\max_{s\in[0,t]}\xi_s^{(2)},\quad m_2(t)=\min_{s\in[0,t]}\xi_s^{(2)}.$$

Теорема 2. *Пусть справедливы предположения теоремы* 1. *Если*

$$\inf\{\Delta(t,u),u\in[m_2(t),M_2(t)]\}\geq 0$$

для всех $t\geq 0$, то $\xi_t^{(1)}\geq\xi_t^{(2)}$ для всех $t\geq 0$.

Доказательство. Согласно предположению теоремы 2 при каждом $t\geq 0$ и любом $u\in[m_2(t),M_2(t)]$ справедливо неравенство $\Delta(t,u)\geq 0$. Отсюда в силу теоремы 1 следует, что $\xi_t^{(1)}\geq\xi_t^{(2)}$ для всех $t\geq 0$. □

Следствие 1. *Пусть в предположениях теоремы* 1 *для всех $t\geq 0$ выполняются следующие условия:*

(а) $\Delta(t,m_2(t))\geq 0$, $\Delta(t,M_2(t))\geq 0$;

(б) $\Delta(t,u)\geq 0$ *для любых* $u\in\{v:\sigma^{(1)}(t,z(t,v))=\sigma^{(2)}(t,v)\}$.

Тогда $\xi_t^{(1)}\geq\xi_t^{(2)}$ для всех $t\geq 0$.

Доказательство. Достаточно проверить, что при каждом $t\geq 0$ глобальный минимум функции $\Delta(t,u)$, $u\in[m_2(t),M_2(t)]$, неотрицателен, для этого ввиду предположения (а) достаточно убедиться, что во всех критических точках значение функции $\Delta(t,u)$ неотрицательно. Так как в силу (9) необходимое условие экстремума приводит к равенству

$$\sigma^{(1)}(t,z(t,u))=\sigma^{(2)}(t,u),$$

согласно предположению (б) имеем $\xi_t^{(1)}\geq\xi_t^{(2)}$. □

Выделим случай, когда $\sigma^{(1)}(t,u)=\sigma^{(2)}(t,u)$ для всех (t,u).

Теорема 3. *Пусть в предположениях теоремы* 1 *для всех (t,u) выполняются следующие условия:*

$$\xi_0^{(1)}\geq\xi_0^{(2)},\quad b^{(1)}(t,u)\geq b^{(2)}(t,u),\quad \sigma^{(1)}(t,u)=\sigma^{(2)}(t,u)\neq 0. \tag{10}$$

Тогда $\xi_t^{(1)}\geq\xi_t^{(2)}$ для всех $t\geq 0$.

Доказательство. Положим $\sigma(t,u)=\sigma^{(1)}(t,u)=\sigma^{(2)}(t,u)$. В силу теоремы A имеем $\xi_t^{(k)}=\phi(t,X(t)+C^{(k)}(t))$, а $C^{(k)}(t)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$C^{(k)'}(t)=B^{(k)}(t,C^{(k)}(t)),$$

где

$$B^{(k)}(t,y)=\frac{b^{(k)}(t,\phi(t,X(t)+y))-(\phi)'_t(t,z)|_{z=X(t)+y}}{\sigma(t,\phi(t,X(t)+y))},\quad k=1,2.$$

Тогда

$$B^{(1)}(t,y)-B^{(2)}(t,y)=\frac{b^{(1)}(t,\phi(t,X(t)+y))-b^{(2)}(t,\phi(t,X(t)+y))}{\sigma(t,\phi(t,X(t)+y))}.$$

Из условий (10) следует, что

$$\phi'_t(t, X(t) + C^{(1)}(t)) \geq \phi'_t(t, X(t) + C^{(2)}(t)). \quad (11)$$

Так как $\sigma(t,u) \neq 0$, возможны два случая.

Пусть $\sigma(t,u) > 0$ для всех (t,u). В этом случае

$$\phi'_u(t, X(t) + y) = \sigma(t, \phi(t, X(t) + y)) > 0, \quad (12)$$

а $B^{(1)}(t,y) \geq B^{(2)}(t,y)$, и так как $\phi(0, C^{(1)}(0)) \geq \phi(0, C^{(2)}(0))$, то $C^{(1)}(0) \geq C^{(2)}(0)$, следовательно, в силу теоремы сравнения для ОДУ [12, гл. 1, § 1.1.2, теорема 1.1.2] имеем $C^{(1)}(t) \geq C^{(2)}(t)$ для всех $t \geq 0$. Значит, ввиду условий (11), (12) верно неравенство $\phi(t, X(t) + C^{(1)}(t)) \geq \phi(t, X(t) + C^{(2)}(t))$, что, в свою очередь, влечет $\xi_t^{(1)} \geq \xi_t^{(2)}$ для всех $t \geq 0$.

Доказательство в случае, когда $\sigma(t,u) < 0$ для всех (t,u), проводится аналогично. □

Замечание 3. Пусть заданы стохастические варианты уравнений (1), (2), с винеровским процессом $X(t) = W(t)$, коэффициенты которых могут быть случайными. Тогда для п. в. решений этих уравнений верны утверждения, доказанные выше.

Пример 1. Рассмотрим два СДУ:

$$d\xi_t^{(1)} = 4\xi_t^{(1)} * dW_t + 3\xi_t^{(1)}\,dt,\ \xi_0^{(1)} = 1, \text{ и } d\xi_t^{(2)} = \frac{1}{1+t} * dW_t - \frac{\xi_t^{(2)}}{1+t}\,dt,\ \xi_0^{(2)} = 0.$$

Известно [13, гл. 5, § 5], что решение второго уравнения имеет вид $\xi_t^{(2)} = W_t/(1+t)$. Тогда $z(t,y) = \exp\{4(1+t)y + 3t\}$. Поскольку выполнены все предположения следствия 1 к теореме 2, $\xi_t^{(1)} \geq \xi_t^{(2)}$ для любого $t \geq 0$ с вероятностью 1.

3. Покажем, как условия устойчивости СДУ с вероятностью 1 могут быть получены через сравнение исследуемого процесса с другим, уже устойчивым.

Пример 2. Исследуем на устойчивость возмущенное движение стохастического дифференциального уравнения вида

$$d\eta_t = t\eta_t * dW_t - a(t)\eta_t\,dt, \quad t \geq 0, \quad (13)$$

где $a(t)$ — непрерывная функция. Решение уравнения имеет вид

$$\eta_t = \eta_0 \exp\left\{ tW_t - \int_0^t (a(s) + W_s)\,ds \right\}$$

и устойчиво с вероятностью 1, если

$$N(\omega) = \sup_{t \geq 0} \left(tW_t - \int_0^t (a(s) + W_s)\,ds \right) < \infty.$$

Пусть функция $\frac{1}{s}a(s)$ интегрируема на $[0,t]$. Тогда ввиду формулы интегрирования по частям

$$tW_t - \int_0^t [a(s) + W_s]\,ds = tW_t - \int_0^t \frac{a(s)s}{s}\,ds - \int_0^t W_s\,ds$$

$$= tW_t - t\int_0^t \frac{a(s)}{s}\,ds + \int_0^t \int_0^s \frac{a(\tau)}{\tau}\,d\tau ds - \int_0^t W_s\,ds = -tu(t) + \int_0^t u(s)\,ds,$$

где

$$u(t) = \int\limits_0^t \frac{a(s)}{s}\, ds - W_t.$$

Для устойчивости с вероятностью 1 возмущенного решения уравнения (13) необходимо убедиться, что для достаточно больших t, т. е., например, при $t \geq t_0(\omega)$,

$$u(t) \geq \frac{1}{t}\int\limits_0^t u(s)\, ds - \frac{M_1(\omega)}{t}, \tag{14}$$

где $M_1(\omega)$ — некоторая неотрицательная случайная величина. Действительно, пусть

$$M_2(\omega) = \sup_{t\in[0,t_0(\omega)]}\left(tW_t - \int\limits_0^t (a(s) + W_s)\, ds\right),$$

тогда $N(\omega) \leq M_1(\omega) + M_2(\omega)$.

Пусть, например, $a(t) = t^{\frac{1}{2}+\alpha}$, где $\alpha > 0$, тогда $u(t) = \left(\frac{1}{2}+\alpha\right)^{-1} t^{\frac{1}{2}+\alpha} - W_t$. Подставляя данную функцию $u(t)$ в неравенство (14), получим, что необходимо убедиться в справедливости неравенства

$$\frac{2}{3+2\alpha} t^{\frac{1}{2}+\alpha} + \frac{M_1(\omega)}{t} \geq W_t - \frac{1}{t}\int\limits_0^t W_s\, ds. \tag{15}$$

Заметим, что найдется t_1 такое, что при $t \geq t_1$

$$2\sqrt{2t\ln\ln t} + \frac{2}{t}\int\limits_0^t \sqrt{2s\ln\ln s}\, ds \leq \frac{2t^{\frac{1}{2}+\alpha}}{3+2\alpha}.$$

В силу закона повторного логарифма для винеровского процесса для п. в. ω существует такое $t_2(\omega)$, что $|W_t| \leq 2\sqrt{2t\ln\ln t}$ при всех $t > t_2(\omega)$, поэтому при $t \geq t_0(\omega) = \max(t_1, t_2(\omega))$

$$\left| W_t - \frac{1}{t}\int\limits_{t_2(\omega)}^t W_s\, ds \right| \leq 2\sqrt{2t\ln\ln t} + \frac{2}{t}\int\limits_{t_2(\omega)}^t \sqrt{2s\ln\ln s}\, ds + \frac{M_1(\omega)}{t},$$

где

$$M_1(\omega) = \int\limits_0^{t_0(\omega)} |W_s|\, ds.$$

Следовательно, справедливо неравенство (15). Значит, возмущенное решение уравнения (13) при $a(t) = t^{\frac{1}{2}+\alpha}$ устойчиво с вероятностью 1.

Теорема 4. *Пусть неравенство* $|\xi_t| \leq K\cdot|\eta_t|$ *справедливо с вероятностью* 1 *для всех* $t \geq 0$, *где* ξ_t — *возмущенное решение* СДУ (3), *а* η_t — *решение устойчивого с вероятностью* 1 СДУ (*например, уравнения* (13)), $K = \mathrm{const} > 0$. *Тогда возмущенное решение уравнения* (3) *устойчиво с вероятностью* 1.

Доказательство следует из определения устойчивости с вероятностью 1.

Следствие 1. *Пусть* ξ_t *— возмущенное решение уравнения* (3), *а* η_t *— устойчивое с вероятностью* 1 *возмущенное неотрицательное решение уравнения* (13) *и для них выполнены предположения теоремы* 1, *значит,* $\xi_t = z(t, \eta_t)$, *причем для всех* $t \geq 0$ *справедливо следующее условие:*

$$\sup_{|u|\leq\delta, t\geq 0} \left| \frac{1}{tu}\sigma\left(t, \phi\left(t, \frac{1}{t}\left(\ln(|u|) - \ln(|\eta_0|) + \int\limits_0^t (a(s) + W(s))\, ds\right)\right)\right)\right| \leq K,$$

где K *— некоторая положительная константа. Тогда возмущенное решение уравнения* (3) *устойчиво с вероятностью* 1.

Доказательство. Ввиду теоремы 1 и общего вида решения уравнения (13) имеем

$$\xi_t = z(t, \eta_t) = \phi\left(t, \frac{1}{t}\left(\ln|\eta_t| - \ln|\eta_0| + \int\limits_0^t (a(s) + W(s))\, ds\right)\right) = \phi\left(t, W(t)\right),$$

где $\phi(t, u)$ — функция, с помощью которой строится решение уравнения (3). В силу теоремы 4 для устойчивости с вероятностью 1 ξ_t достаточно, чтобы $|\xi_t| \leq K\eta_t$ для всех $t \geq 0$, где $K = \mathrm{const} > 0$.

С учетом формулы (9)

$$z'_u(t, u) = \frac{1}{tu}\sigma\left(t, \phi\left(t, \frac{1}{t}\left(\ln|u| - \ln|\eta_0| + \int\limits_0^t (a(s) + W_s)\, ds\right)\right)\right).$$

Тогда согласно предположению следствия 1 имеем $|z'_u(t, u)| \leq K$. Последнее неравенство означает, что $|\xi_t| \leq K\eta_t$ для почти всех $t \geq 0$. □

Следствие 2. *Пусть* ξ_t *— возмущенное решение уравнения*

$$d\xi_t = t\xi_t * dW(t) + b(t, \xi_t)\, dt,$$

где функция $b(t, y)$ *нечетна по переменной* y *для всех* $t \geq 0$, *а* η_t *— устойчивое с вероятностью* 1 *возмущенное неотрицательное решение уравнения* (13) *и для них выполнены предположения теоремы* 1. *Тогда если для всех* $t \geq 0$ *выполнены следующие условия:*

(a) $|\xi_0| \leq \eta_0$,

(b) $b(t, y) \leq -a(t)y$ *для* $y < 0$,

то возмущенное решение ξ_t *устойчиво с вероятностью* 1.

Доказательство. В силу теоремы 4 требуется проверить выполнение условия

$$|\xi_t| \leq K \cdot \eta_t. \tag{16}$$

Для проверки соотношения (16) согласно теореме 3 и условию (a) достаточно убедиться в справедливости двух неравенств:

$$b(t, y) \leq -a(t)y, \quad y > 0, \tag{17}$$

$$b(t, y) \geq a(t)y, \quad y < 0. \tag{18}$$

Неравенство (17) выполнено в силу условия (b), которое ввиду нечетности функции $b(t, y)$ влечет справедливость неравенства (18). □

Авторы искренне признательны рецензенту за ценные замечания, способствовавшие существенному улучшению работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скороход А. В.* Исследования по теории случайных процессов. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1961.
2. *Ватанабе С., Икеда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986.
3. *Гальчук Л. И.* Теорема сравнения для стохастических уравнений с интегралами по мартингалам и случайным мерам // Теория вероятностей и ее прил. 1982. Т. 27, № 3. С. 425–433.
4. *Yamada, Toshio.* On a comparison theorem for solutions of stochastic differential equations and its applications // J. Math. Kyoto Univ. 1973. V. 13, N 3. P. 497–512.
5. *Geib C., Manthey R.* Comparison theorems for stochastic differential equations in finite and infinite dimensions // Stochastic Processes Appl. 1994. V. 53, N 1. P. 23–35.
6. *Kotelenez P.* Comparison methods for a class of function-valued stochastic partial differential equations // Probab. Theory Related Fields. 1992. V. 93, N 1. P. 1–19.
7. *O'Brien G. L.* A new comparison theorem for solutions of stochastic differential equations // Stochastics. 1980. V. 3, N 4. P. 245–249.
8. *Асылгареев А. С.* О теоремах сравнения и потраекторной устойчивости одномерных стохастических дифференциальных уравнений // Матер. Междунар. молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2015». М.: МАКС Пресс, 2015.
9. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.
10. *Кушнер Г. Дж.* Стохастическая устойчивость и управление. М.: Мир, 1969.
11. *Насыров Ф. С.* Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ. М.: Физматлит, 2011.
12. *Денисов А. М., Разгулин А.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: МАКС Пресс, 2009. Ч. 2.
13. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, 2003.

Статья поступила 7 июня 2015 г.

Асылгареев Артур Салаватович   Насыров Фарит Сагитович
Уфимский гос. авиационный технический университет,
кафедра математики,
ул. К. Маркса, 12, Уфа 450000
asylgareevarthur@gmail.com, farsagit@yandex.ru