Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2016. Том 57, № 5

УДК 512.542

СПЕКТРЫ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП $E_7(q)$

А. А. Бутурлакин

Аннотация. Дается описание спектров конечных простых и универсальных групп лиева типа E_7.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.505

Ключевые слова: спектр группы, порядок элемента, исключительные группы лиева типа.

Введение

Множество порядков элементов конечной группы G называется ее *спектром* и обозначается через $\omega(G)$. Множество $\omega(G)$ замкнуто относительно взятия делителей, т. е. если $n \in \omega(G)$ и d делит n, то $d \in \omega(G)$. Значит, множество $\omega(G)$ однозначно задается своим подмножеством $\mu(G)$ максимальных по делимости элементов, а также любым своим подмножеством $\nu(G)$ таким, что $\mu(G) \subseteq \nu(G) \subseteq \omega(G)$.

Пусть G — конечная группа лиева типа над полем характеристики p. Тогда множество $\omega(G)$ может быть представлено как объединение трех подмножеств: множества $\omega_p(G)$ порядков всех *унипотентных* элементов, т. е. элементов, порядок которых является степенью числа p, множества $\omega_{p'}(G)$ порядков всех *полупростых* элементов, т. е. элементов, порядок которых взаимно прост с p, и множества $\omega_m(G)$ всех остальных, «смешанных», порядков.

В [1] приводится формула, позволяющая вычислять максимальный порядок унипотентных элементов в любой конечной группе лиева типа (см. далее лемму 1.1). Из этого результата, в частности, следует, что множество $\omega_p(G)$ зависит только от характеристики и лиева типа группы G. В дальнейшем будем использовать обозначение $p(\Phi)$ для максимальной степени числа p, лежащей в спектре группы лиева типа Φ над полем характеристики p.

Спектры групп Ри и Сузуки хорошо известны (см., например, [2–4]). Описание спектров групп $G_2(q)$, ${}^3D_4(q)$ и $F_4(q)$ может быть получено из [5, 6] и содержится, например, в [7, 8]. Известны спектры простых групп $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$ (см. [9]). Отметим также, что спектры всех конечных простых классических групп известны (см., например, [10, 11]).

Основная цель данной работы — доказать следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть G — универсальная группа типа E_7 над полем характеристики p и порядка q. Положим $d = (2, q-1)$. Пусть множество $\nu(G)$ является объединением следующих множеств:*

1) $\{(q^2-q+1)(q^5+1), (q^2+q+1)(q^5-1), (q+1)(q^6-q^3+1), (q-1)(q^6+q^3+1), q^7+1, q^7-1, (q^3-1)(q^4-q^2+1), (q^3+1)(q^4-q^2+1), (q^2-q+1)(q^4-1), (q^2+q+1)(q^4-1), (q+1)(q^5-1), (q-1)(q^5+1), \frac{q^8-1}{(q-1)d}, \frac{q^8-1}{(q+1)d}, (q^4+1)(q^2-1), q^6-1\}$;

2) $p \cdot \left\{\frac{q^6-1}{d},\ q^5-1,\ q^5+1,\ \frac{(q^4+1)(q^2+1)}{d},\ \frac{(q^4+1)(q^2-1)}{d},\ \frac{(q^3+1)(q^2+1)(q-1)}{d},\ \frac{(q^3-1)(q^2+1)(q+1)}{d},\ q^4-q^2+1\right\}$;

3) $p(A_2) \cdot \left\{\frac{q^6-1}{(q-1)d},\ \frac{q^6-1}{(q+1)d},\ \frac{q^5-1}{d},\ \frac{q^5+1}{d},\ q^4-1,\ (q^3+1)(q-1),\ (q^3-1)(q+1)\right\}$;

4) $p(A_3) \cdot \left\{\frac{q^4-1}{d},\ \frac{(q^3+1)(q-1)}{d},\ \frac{(q^3-1)(q+1)}{d}\right\}$;

5) $p(D_4) \cdot \{q^3-1, q^3+1, (q^2+1)(q+1), (q^2+1)(q-1), q^2-1\}$;

6) $p(D_5) \cdot \left\{\frac{q^2-1}{d}\right\}$;

7) $p(E_6) \cdot \{q-1, q+1\}$;

8) $p(E_7) \cdot \{d\}$.

Тогда $\mu(G) \subseteq \nu(G) \subseteq \omega(G)$.

Теорема 2. *Пусть $\overline{G}$ — простая группа типа E_7 над полем характеристики p и порядка q. Положим $d = (2, q-1)$. Пусть множество $\nu(\overline{G})$ является объединением следующих множеств:*

1) $\left\{\frac{(q^2-q+1)(q^5+1)}{d},\ \frac{(q^2+q+1)(q^5-1)}{d},\ \frac{(q+1)(q^6-q^3+1)}{d},\ \frac{(q-1)(q^6+q^3+1)}{d},\ \frac{q^7+1}{d},\ \frac{q^7-1}{d},\ \frac{(q^3-1)(q^4-q^2+1)}{d},\ \frac{(q^3+1)(q^4-q^2+1)}{d},\ (q^2-q+1)(q^4-1),\ (q^2+q+1)(q^4-1),\ (q+1)(q^5-1),\ (q-1)(q^5+1),\ \frac{q^8-1}{(q-1)(4,q-1)},\ \frac{q^8-1}{(q+1)(4,q+1)},\ (q^4+1)(q^2-1),\ q^6-1\right\}$;

2) $p \cdot \left\{\frac{q^6-1}{d},\ q^5-1,\ q^5+1,\ \frac{(q^4+1)(q^2+1)}{d},\ \frac{(q^4+1)(q^2-1)}{d},\ \frac{(q^3+1)(q^2+1)(q-1)}{d},\ \frac{(q^3-1)(q^2+1)(q+1)}{d},\ q^4-q^2+1\right\}$;

3) $p(A_2) \cdot \left\{\frac{q^6-1}{(q-1)d},\ \frac{q^6-1}{(q+1)d},\ \frac{q^5-1}{d},\ \frac{q^5+1}{d},\ q^4-1,\ (q^3+1)(q-1),\ (q^3-1)(q+1)\right\}$;

4) $p(A_3) \cdot \left\{\frac{q^4-1}{d},\ \frac{(q^3+1)(q-1)}{d},\ \frac{(q^3-1)(q+1)}{d}\right\}$;

5) $p(D_4) \cdot \left\{\frac{q^3-1}{d},\ \frac{q^3+1}{d},\ \frac{(q^2+1)(q+1)}{d},\ \frac{(q^2+1)(q-1)}{d},\ q^2-1\right\}$;

6) $p(D_5) \cdot \left\{\frac{q^2-1}{d}\right\}$;

7) $p(D_6) \cdot \{q-1, q+1\}$;

8) $p(E_6) \cdot \left\{\frac{q-1}{d},\ \frac{q+1}{d}\right\}$;

9) $\{p(E_7)\}$.

Тогда $\mu(\overline{G}) \subseteq \nu(\overline{G}) \subseteq \omega(\overline{G})$.

Заметим, что циклическое строение максимальных торов, а значит, и полупростая часть спектра в универсальных группах $E_7(q)$ были определены в [12].

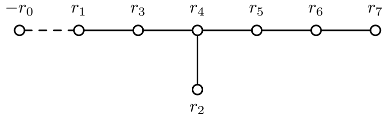
1. Предварительные сведения

Теоретические основы данной работы можно найти, например, в [13, гл. 1, 3; 14], а примеры использования соответствующих общих результатов для вычисления спектров исключительных групп лиева типа — в [9].

Пусть $\mathbb{G}$ — универсальная группа лиева типа E_7 над алгебраическим замыканием поля Галуа $GF(p)$ для некоторого простого числа p. Пусть σ — отображение Фробениуса группы $\mathbb{G}$, переводящее корневой элемент $x_r(t)$ в $x_r(t^q)$.

Обозначим через G группу неподвижных точек $\mathbb{G}_\sigma$ отображения σ, изоморфную универсальной группе $E_7(q)$.

Пусть r_1, r_2, …, r_7 — простые корни системы корней группы $\mathbb{G}$, пронумерованные в соответствии со следующей расширенной диаграммой Дынкина.



На этой диаграмме и далее в статье r_0 — корень максимальной высоты.

Центр универсальной группы $E_7(q)$ состоит из элементов $h_{r_2}(t)h_{r_5}(t)h_{r_7}(t)$, где $t^2 = 1$. Таким образом, порядок центра равен наибольшему общему делителю $(2, q-1)$.

Поскольку каждый полупростой элемент группы лиева типа содержится в некотором ее максимальном торе, для описания полупростой части спектра достаточно описать циклическое строение максимальных торов соответствующей группы. Обозначим через W группу Вейля группы $\mathbb{G}$, а через $\mathbb{T}$ — максимальный тор группы $\mathbb{G}$, порожденный элементами $h_{r_i}(t)$, где $1 \le i \le 7$. Для описания строения максимальных торов группы G нужно описать группы неподвижных точек вида $\mathbb{T}_{\sigma\circ w}$, где w пробегает полную систему представителей классов сопряженности группы W. При этом если M_w — матрица элемента w в базисе $r_1, r_2, \ldots, r_7$, то $qM_w - 1$ — матрица определяющих соотношений группы $\mathbb{T}_{\sigma\circ w}$, т. е. если $qM - 1_w = (m_{ij})$, то группа $\mathbb{T}_{\sigma\circ w}$ состоит в точности из элементов $\mathbb{T}$ вида $\prod\limits_j h_{r_j}(t_j)$, где $\prod\limits_j {t_j}^{m_{ij}} = 1$ для всех $1 \le i \le 7$. Таким образом, если представить матрицу $\mathbb{T}_{\sigma\circ w}$ в виде произведения RDL, где R, D, L — целочисленные матрицы, причем D диагональная, а у R и L определители равны 1, то элементы главной диагонали матрицы D будут определять порядки циклических сомножителей группы $\mathbb{T}_{\sigma\circ w}$, а матрица R задает порождающие этих сомножителей. Матрицы R и D позволяют определить структуру образа группы $\mathbb{T}_{\sigma\circ w}$ в простой группе $G/Z(G)$.

Лемма 1.1 [1, следствие 0.5]. *Пусть $\mathbb{G}$ — простая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем положительной характеристики p и σ — отображение Фробениуса группы $\mathbb{G}$. Тогда p-период группы $\mathbb{G}_\sigma$ равен минимальной степени числа p, большей, чем максимальная высота корня в системе корней группы $\mathbb{G}$.*

Таким образом, p-период группы лиева типа над полем характеристики p зависит только от ее корневой системы. В табл. 1 для каждой неразложимой системы корней Φ приведена максимальная высота корня $mh(\Phi)$.

Таблица 1

Φ	$mh(\Phi)$	Φ	$mh(\Phi)$	Φ	$mh(\Phi)$
A_n	n	D_n	$2n-3$	E_8	29
B_n	$2n-1$	E_6	11	F_4	11
C_n	$2n-1$	E_7	17	G_2	5

Произвольный элемент смешанного порядка g группы лиева типа может быть представлен в виде произведения $su = us$, где s — полупростой, а u — унипотентный элементы. При этом существует редуктивная подгруппа максимального ранга H такая, что H содержит u и s, причем s лежит в центре $Z(H)$. Тем самым для описания смешанной части спектра достаточно для каждой редуктивной подгруппы максимального ранга H вычислить произведения p-периода H и периода центра $Z(H)$. Такое произведение будем в дальнейшем обозначать через $\eta(H)$.

Пусть $\mathbb{H}$ — σ-инвариантная редуктивная подгруппа максимального ранга группы $\mathbb{G}$. Если Ψ — система корней подгруппы $\mathbb{H}$, то Ψ — аддитивно замкнутая подсистема системы E_7. В силу [14, следствие 3] в конечной группе G классы сопряженности редуктивных подгрупп максимального ранга с корневой системой Ψ находятся во взаимно однозначном соответствии с классами сопряженности группы $N_W(W_1)/W_1$, где W_1 — группа Вейля подгруппы $\mathbb{H}$. Аналогично максимальным торам если wW_1 — некоторый представитель класса сопряженности группы $N_W(W_1)/W_1$, то соответствующая подгруппа изоморфна $\mathbb{H}_{\sigma\circ w}$. Поскольку p-период редуктивной группы зависит только от ее системы корней, задача состоит в том, чтобы вычислить период центра. Для этого можно найти центр $Z(\mathbb{H})$ группы $\mathbb{H}$, а затем определить структуру группы $Z(\mathbb{H})_{\sigma\circ w}$ (структуру $Z(\mathbb{H})_{\sigma\circ w}$ можно определить теми же методами, что и структуру максимального тора).

Предположим, что Ψ является ортогональной суммой неразложимых подсистем $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_k$. Предположим, что $p(\Psi_1) = p(\Psi)$ и Ψ_1 не изоморфна Ψ_i при $i \neq 1$. Обозначим σ-инвариантную редуктивную подгруппу максимального ранга группы $\mathbb{H}$ с системой корней Ψ_1 через $\mathbb{H}_1$. Пусть $w \in N_W(W_1)$, тогда $\Psi_1 w = \Psi_1$. Таким образом, $(\mathbb{H}_1)_{\sigma\circ w} \leq \mathbb{H}_{\sigma\circ w}$, при этом, очевидно, центр группы $\mathbb{H}_{\sigma\circ w}$ содержится в центре группы $(\mathbb{H}_1)_{\sigma\circ w}$. Следовательно, $\eta(\mathbb{H}_{\sigma\circ w})$ делит $\eta((\mathbb{H}_1)_{\sigma\circ w})$, и группу $\mathbb{H}$ можно исключить из рассмотрения. Итак, для описания смешанной части спектра нужно рассматривать только такие группы $\mathbb{H}$, что все неразложимые компоненты их системы корней изоморфны. При этом группы $\mathbb{H}_{\sigma\circ w}$ нужно рассматривать только для тех элементов w, у которых ровно одна орбита при действии на неразложимых компонентах.

В табл. 2 указаны все аддитивно замкнутые подсистемы системы E_7 с изоморфными неразложимыми компонентами с точностью до эквивалентности относительно действия группы W, а также ортогональные дополнения к этим подсистемам (см. [15, табл. 1] или [16, табл. 10.2]).

Таблица 2

Ψ	$\Psi^\perp$	Ψ	$\Psi^\perp$	Ψ	$\Psi^\perp$	Ψ	$\Psi^\perp$	Ψ	$\Psi^\perp$
A_1	D_6	$(A_5)_2$	A_1	D_6	A_1	$(3A_1)_2$	$4A_1$	$7A_1$	$\varnothing$
A_2	A_5	A_6	$\varnothing$	E_6	$\varnothing$	$(4A_1)_1$	$3A_1$	$2A_2$	A_2
A_3	$A_3 + A_1$	A_7	$\varnothing$	E_7	$\varnothing$	$(4A_1)_2$	$3A_1$	$3A_2$	$\varnothing$
A_4	A_2	D_4	$3A_1$	$2A_1$	$D_4 + A_1$	$5A_1$	$2A_1$	$2A_3$	A_1
$(A_5)_1$	A_2	D_5	A_1	$(3A_1)_1$	D_4	$6A_1$	A_1		

Заметим, что существует два класса эквивалентности подсистем типа $4A_1$. Для одного из этих классов двойной переход к ортогональному дополнению дает исходную подсистему, для второго класса получается подсистема типа D_4.

Лемма 1.2. *Пусть H — редуктивная подгруппа максимального ранга группы G с системой корней типа $6A_1$ или $7A_1$. Тогда существует редуктивная подгруппа максимального ранга H_1 группы G с системой корней, отличной от $6A_1$ и $7A_1$, такая, что $\eta(H)$ делит $\eta(H_1)$.*

Доказательство. Пусть s — элемент центра группы H порядка, совпадающего с периодом центра. Положим $\mathbb{H}_1 = C_{\mathbb{G}}(s)$. В силу [6, предложение 2.3.4] система корней группы $\mathbb{H}_1$ отлична от $6A_1$ и $7A_1$. Очевидно, $H \subseteq \mathbb{H}_1$. Таким образом, $H \subseteq H_1 = (\mathbb{H}_1)_\sigma$, а значит, $\eta(H)$ делит $\eta(H_1)$.

Из леммы 1.2 следует, что системы $6A_1$ и $7A_1$ можно не рассматривать при описании спектра группы G.

В работе нам понадобятся описание полупростой части спектра спинорных групп (см. [17]) и группы ${}^3D_4(q)$, а также

Лемма 1.3. $\omega_{p'}(H\operatorname{Spin}_{2n}(q)) = \omega_{p'}(\operatorname{Spin}^+_{2n}(q))$.

Доказательство. Напомним, что группа $H\operatorname{Spin}_{2n}(q)$ определена для четного n и нечетного q. При этих условиях центр группы $\operatorname{Spin}^+_{2n}(q)$ изоморфен элементарной абелевой группе порядка 4. Фактор-группа по одной из центральных инволюций дает группу $\Omega^+_{2n}(q)$, фактор-группы по двум другим центральным инволюциям изоморфны (изоморфизм осуществляется графовым автоморфизмом τ порядка 2) и обозначаются через $H\operatorname{Spin}_{2n}(q)$. Пусть T — некоторый максимальный тор группы $\operatorname{Spin}^+_{2n}(q)$, C — максимальная по порядку циклическая 2-подгруппа группы T и z — центральная инволюция группы $\operatorname{Spin}^+_{2n}(q)$ такая, что $\operatorname{Spin}^+_{2n}(q)/\langle z\rangle \simeq H\operatorname{Spin}_{2n}(q)$. Предположим, что $z\in C$, тогда $z^\tau\notin C$. Таким образом, периоды торов T и $T/\langle z^\tau\rangle$ совпадают. Следовательно, если T — максимальный тор, период которого делится на два при факторизации по подгруппе $\langle z\rangle$, то существует изоморфный тор, период которого сохраняется. Тем самым имеем требуемое равенство.

Определим множества $\mu_p(G)$, $\mu_{p'}(G)$ и $\mu_m(G)$ как пересечения $\mu(G)$ с соответствующими подмножествами из $\omega(G)$.

Для целых чисел $m_1,\dots,m_s$ через $(m_1,\dots,m_s)$ и $[m_1,\dots,m_s]$ будем обозначать их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное соответственно. Через $m_1\times\dots\times m_s$ будем обозначать прямое произведение циклических групп порядков $m_1,\dots,m_s$.

2. Полупростые порядки

Напомним, что G — универсальная группа типа E_7 над полем порядка q. В этом разделе докажем

Предложение 2.1. *Пусть $\overline{G} = G/Z(G)$ — простая группа типа E_7 над полем порядка q. Положим $d=(2,q-1)$ и*

$$\nu_{p'}(\overline{G}) = \Big\{\frac{(q^2-q+1)(q^5+1)}{d}, \frac{(q^2+q+1)(q^5-1)}{d}, \frac{(q+1)(q^6-q^3+1)}{d},$$
$$\frac{(q-1)(q^6+q^3+1)}{d}, \frac{q^7+1}{d}, \frac{q^7-1}{d}, \frac{(q^3-1)(q^4-q^2+1)}{d}, \frac{(q^3+1)(q^4-q^2+1)}{d},$$
$$(q^2-q+1)(q^4-1), (q^2+q+1)(q^4-1), (q+1)(q^5-1), (q-1)(q^5+1),$$
$$\frac{q^8-1}{(q-1)(4,q-1)}, \frac{q^8-1}{(q+1)(4,q+1)}, (q^4+1)(q^2-1), q^6-1\Big\}.$$

Тогда $\mu_{p'}(\overline{G}) \subseteq \nu_{p'}(\overline{G}) \subseteq \omega(\overline{G})$.

Доказательство. Сначала покажем, что все числа из $\nu_{p'}(\overline{G})$ являются периодами некоторых максимальных торов группы $\overline{G}$. Положим $Z=Z(G)$. Первые восемь чисел в формулировке имеют вид $\frac{m}{d}$, где m — порядок некоторого циклического максимального тора группы G. Таким образом, эти числа, очевидно, являются периодами максимальных торов группы $\overline{G}$. Пусть T — некоторый максимальный тор группы G. Тогда периоды торов T и T/Z совпадают тогда и только тогда, когда существует максимальная по порядку циклическая 2-подгруппа C такая, что $C\cap Z=1$. По [12, табл. 2, 3] группа G содержит торы, изоморфные следующим группам: $(q-1)\times(q^2-q+1)(q^4-1)$,

$(q+1)\times(q^2+q+1)(q^4-1)$, $(q-1)\times(q+1)(q^5-1)$, $(q+1)\times(q-1)(q^5+1)$, $(q+1)\times(q^6-1)$, $(q^4+1)(q^2-1)\times(q-1)$, $(q^4+1)\times(q^2+1)(q-1)$, $(q^4+1)\times(q^2+1)(q+1)$. Для всех этих торов, за исключением двух последних, период при переходе к простой группе сохраняется, периоды последних двух торов делятся на $\left(2,\frac{q+1}{d}\right)$ и $\left(2,\frac{q-1}{d}\right)$ соответственно. Для доказательства этого факта мы использовали систему компьютерных вычислений MAGMA [18]. Ввиду большого объема данных ограничимся примером. Покажем, что период тора $(q+1)\times(q^6-1)$ сохраняется при факторизации по Z. Отождествим W с ее матричным представлением в базисе $r_1,\ \dots,\ r_7$. Пусть

$$M=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1\\ -1 & -1 & -2 & -3 & -2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $M\in W$ и $qM-1=RDL$, где $D=\operatorname{diag}(1,1,1,1,1,q+1,q^6-1)$, L — матрицы над кольцом целочисленных многочленов от q с определителем 1, а

$$R=\begin{pmatrix} E & A\\ B & C\end{pmatrix},$$

где E — единичная матрица размера 4×4, A — нулевая 4×4-матрица,

$$B=\begin{pmatrix} -q^2+q-1 & q-1 & -q^2+q-1 & q-1\\ -q^4-q^3-q^2-2 & q^3+q^2-2 & -q^4-q^3-q^2-q-3 & q^3+q^2-3\\ q^5-q^4+q^3-q^2+q-2 & -q^4+q^3+q-2 & q^5-q^4+q^3+q-3 & -q^4+q^3+q-4 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1\\ -q^2-2q-3 & -q^2-2q-3 & -q^2-2q-2\\ q^3+q-3 & q^3+q-2 & q^3-1 \end{pmatrix}.$$

Положим

$$h(s)=\prod_{i=1,\dots,7} h_{r_i}(s^{a_{7i}}),$$

где a_{7i} обозначает i-й элемент седьмой строки матрицы R, а $s^{q^6-1}=1$. Тогда соответствующая группа $\overline{T}_{\sigma\circ w}$ содержит циклическую подгруппу C порядка q^6-1, состоящую из элементов $h(s)$. Если $C\cap Z=Z$, то $Z=\langle h(s)\rangle$, где $s^2=1$. Непосредственная проверка показывает, что не так.

Осталось доказать, что период произвольного максимального тора делит некоторый элемент из $\nu_{p'}(\overline{G})$. Из [12, табл. 2, 3] непосредственной проверкой получаем, что либо период максимального тора универсальной группы G делит одно из чисел в $\nu_{p'}(\overline{G})$, либо тор циклический, либо один из торов $(q^4+1)\times(q^2+1)(q-1)$, $(q^4+1)\times(q^2+1)(q+1)$. Таким образом, предложение доказано.

3. Смешанные порядки

В табл. 3 через Δ обозначена фундаментальная система корней подсистемы Ψ, при этом $r_8=(0,1,1,2,2,1,0)$, $r_9=(0,-1,-1,-2,-2,-2,-1)$, $r_{10}=(0,-1,-1,-2,-1,0,0)$ (здесь указаны коэффициенты разложения по фундаментальным корням). В третьем столбце указаны необходимые и достаточные условия того, что элемент $\prod\limits_{i=1,\dots,7} h_{r_i}(t_i)$ лежит в центре редуктивной подгруппы максимального ранга группы $\mathbb{G}$, содержащей тор $\mathbb{T}$ и имеющей систему корней Ψ.

Обозначим через $\upsilon(\Psi)$ и $\nu(\Psi)$ множество всех $\eta(H)$ и $\eta(H/Z)$, где H пробегает все редуктивные группы максимального ранга группы G с системой корней Ψ. Положим $d = (2, q-1)$.

Предложение 3.1. *Имеют место следующие равенства:*
1) $\upsilon(A_1) = p(A_1) \cdot \omega_{p'}(\mathrm{Spin}_{12}^+(q))$;
2) $\upsilon(A_2) = p(A_2) \cdot (\omega_{p'}(SL_6(q)) \cup \omega_{p'}(SU_6(q)))$;
3) $\upsilon(A_3) = p(A_3) \cdot (\omega_{p'}(SL_4(q) \times SL_2(q)) \cup \omega_{p'}(SU_4(q) \times SL_2(q)))$;
4) $\upsilon(2A_1) = p(A_1) \cdot (\omega_{p'}(\mathrm{Spin}_8^+(q) \times SL_2(q)) \cup \omega_{p'}(\mathrm{Spin}_8^-(q) \times SL_2(q)))$;
5) $\upsilon((3A_1)_1) = p(A_1) \cdot (\omega_{p'}(\mathrm{Spin}_8^+(q) \times d) \cup \omega_{p'}(\mathrm{Spin}_8^-(q) \times d) \cup \omega_{p'}({}^3D_4(q) \times d))$;
6) $\upsilon((3A_1)_2) = p(A_1) \cdot (\omega_{p'}(SL_2(q)^4) \cup \omega_{p'}(SL_2(q^2) \times SL_2(q)^2) \cup \omega_{p'}(SL_2(q^3) \times SL_2(q)))$;
7) $\upsilon((4A_1)_1) = p(A_1) \cdot (\omega_{p'}(SL_2(q)^3 \times d) \cup \omega_{p'}(SL_2(q^2) \times SL_2(q) \times d) \cup \omega_{p'}(SL_2(q^3) \times d))$;
8) $\upsilon((4A_1)_2) = p(A_1) \cdot (\omega_{p'}(SL_2(q)^3 \times d) \cup \omega_{p'}(SL_2(q^2) \times SL_2(q) \times d) \cup \omega_{p'}(SL_2(q^3) \times d))$;
9) $\upsilon(5A_1) = p(A_1) \cdot (\omega_{p'}(SL_2(q)^2 \times d^2) \cup \omega_{p'}(SL_2(q^2) \times d^2))$.

Доказательство. Для каждой из указанных в предложении подсистем Ψ редуктивная подгруппа максимального ранга $\mathbb{H}$ группы $\mathbb{G}$ представляется в виде прямого произведения подгрупп $\mathbb{M}$ и $\mathbb{S}$, где $\mathbb{M}$ — подгруппа, порожденная корневыми подгруппами, соответствующими корням из Ψ, а $\mathbb{S}$ — тор, порожденный элементами $h_r(t)$, где r пробегает ортогональное дополнение $\Psi^\perp$ к подсистеме Ψ в системе E_7. Обозначим через $\mathbb{K}$ подгруппу группы $\mathbb{G}$, порожденную корневыми подгруппами, соответствующими корням из $\Psi^\perp$. Во всех случаях фундаментальная подсистема системы $\Psi^\perp$ может быть выбрана как подмножество фундаментальной системы группы $\mathbb{G}$. Таким образом, из [19, предложение 2.6.2(d)] следует, что $\mathbb{K}$ — универсальная группа. Поскольку подсистема $\Psi^\perp$ инвариантна относительно действия $N_W(W_1)$, произвольный элемент $w \in N_W(W_1)$ индуцирует на группе $\mathbb{K}$ некоторый автоморфизм, являющийся композицией графового автоморфизма и автоморфизма, индуцированного элементом группы Вейля системы $\Psi^\perp$. Стало быть, группа $\mathbb{H}_{\sigma\circ w}$ изоморфна $\mathbb{M}_{\sigma\circ w} \times \mathbb{S}_{\sigma\circ w}$, где $\mathbb{S}_{\sigma\circ w}$ — максимальный тор группы $\mathbb{K}_{\sigma\circ\tau}$ для некоторого графового автоморфизма группы $\mathbb{K}$. Тем самым для доказательства предложения необходимо определить, какие автоморфизмы подсистем $\Psi^\perp$ содержатся в группе W. Группы автоморфизмов подсистем $\Psi^\perp$ определили с помощью системы вычислений MAGMA. В частности, получили, что группа автоморфизмов подсистемы $\Psi^\perp$, индуцированных группой W, отлична от полной группы автоморфизмов только в случаях $\Psi^\perp = D_6$, $2A_1$, $(3A_1)_2$. Пусть $\Psi = k\Psi_1$ для неприводимой подсистемы Ψ_1 и w — элемент группы $N_W(W_1)$, переставляющий подсистемы Ψ_1 по циклу. Пусть $\mathbb{K}_1$ — подсистемная подгруппа группы $\mathbb{K}$, соответствующая Ψ_1. Пусть $x \in \mathbb{K}$, тогда $x = x_1 x_2 \dots x_k$, где $x_i \in \mathbb{K}_1^{w^{i-1}}$. Имеем $x \in \mathbb{K}$ тогда и только тогда, когда $x_i^\sigma = x_{i+1}$, где $x_{k+1} = x_1$. Отсюда следует, что $x_1^{\sigma^k} = x_1$ и группа $\mathbb{K}_{\sigma\circ w}$ изоморфна $(\mathbb{K}_1)_{\sigma^k}$, что завершает доказательство предложения.

Следствие 3.2. *Имеют место следующие равенства:*
1) $\nu(A_1) = p(A_1) \cdot \omega_{p'}(\mathrm{Spin}_{12}^+(q))$;
2) $\nu(A_2) = p(A_2) \cdot (\omega_{p'}(SL_6(q)/Z) \cup \omega_{p'}(SU_6(q)/Z))$;
3) $\nu(A_3) = p(A_3) \cdot (\omega_{p'}((SL_4(q) \times SL_2(q))) \cup \omega_{p'}((SU_4(q) \times SL_2(q))))$;
4) $\nu(2A_1) = p(A_1) \cdot (\omega_{p'}(\mathrm{Spin}_8^+(q) \times SL_2(q)) \cup \omega_{p'}(\mathrm{Spin}_8^-(q) \times SL_2(q)))$;
5) $\nu((3A_1)_1) = p(A_1) \cdot (\omega_{p'}(\mathrm{Spin}_8^+(q)) \cup \omega_{p'}(\mathrm{Spin}_8^-(q)) \cup \omega_{p'}({}^3D_4(q)))$;

6) $\nu((3A_1)_2) = p(A_1)\cdot(\omega_{p'}(SL_2(q)^4)\cup\omega_{p'}(SL_2(q^2)\times SL_2(q)^2)\cup\omega_{p'}(PSL_2(q^3)\times SL_2(q)))$;

7) $\nu((4A_1)_1) = p(A_1)\cdot(\omega_{p'}(SL_2(q)^3)\cup\omega_{p'}(SL_2(q^2)\times SL_2(q))\cup\omega_{p'}(SL_2(q^3)))$;

8) $\nu((4A_1)_2) = p(A_1)\cdot(\omega_{p'}(SL_2(q)^3\times d)\cup\omega_{p'}(SL_2(q^2)\times SL_2(q)\times d)\cup\omega_{p'}(PSL_2(q^3)\times d))$;

9) $\nu(5A_1) = p(A_1)\cdot(\omega_{p'}(SL_2(q)^2\times d)\cup\omega_{p'}(SL_2(q^2)\times d))$.

Доказательство. Будем использовать обозначения, введенные в доказательстве предложения 3.1. В пп. 1 и 2 центр редуктивной подгруппы содержится в подгруппе $\mathbb{K}_{\sigma\circ\tau}$, а значит, $\mathbb{K}_{\sigma\circ\tau}$ содержит и центр группы G. Это доказывает п. 2, и п. 1 следует из леммы 1.3.

В остальных случаях полезно следующее простое замечание. Пусть A, B — некоторые конечные группы и N — нормальная подгруппа группы $A\times B$ такая, что $A\cap N = B\cap N = 1$. Тогда спектр группы $A\times B$ совпадает со спектром ее фактор-группы по N. Например, в п. 3 группа $\mathbb{K}$ порождается элементами $x_{\pm r_2}(t)$, $x_{\pm r_5}(t)$, $x_{\pm r_6}(t)$, $x_{\pm r_7}(t)$. Таким образом, группа $\mathbb{K}_{\sigma\circ\tau}$ есть прямое произведение подгрупп, каждая из которых пересекается с центром по единице. В п. 4 прямой множитель $SL_2(q)$ порождается $x_{\pm r_2}(t)$. В п. 5 центр группы $\mathbb{M}_{\sigma\circ w}$ состоит из элементов $h_{r_7}(t)$, где $t^2=1$. В п. 6 в случаях $K_{\sigma\circ\tau}\simeq SL_2(q)^4$ или $SL_2(q^2)\times SL_2(q)^2$ спектр не может измениться при факторизации, поскольку каждый из прямых сомножителей содержит не более двух корневых подгрупп, соответствующих фундаментальным корням. Случай $K_{\sigma\circ\tau}\simeq SL_2(q^3)\times SL_2(q)$ соответствует элементу группы W, переставляющему по циклу корни r_2, r_5, r_7 и оставляющему корень r_3 на месте. Таким образом, множитель $SL_2(q^3)$ содержит центр группы G. Аналогично п. 5 в п. 7 центр группы $\mathbb{M}_{\sigma\circ w}$ состоит из элементов $h_{r_2}(t)$, где $t^2=1$. П. 8 аналогичен п. 6. Наконец, в п. 9 центр группы $\mathbb{M}_{\sigma\circ w}$ состоит из элементов $h_{r_2}(t)h_{r_7}(s)$, где $t^2=s^2=1$. Следствие доказано.

Для множества натуральных чисел A обозначим через $\omega(A)$ множество, состоящее из всех делителей элементов A. Для двух множеств натуральных чисел A и B запись $A\sim B$ будет означать, что $\omega(A)=\omega(B)$.

Предложение 3.3.

1) $\upsilon(A_4)\sim p(A_4)\cdot\{q^2-1, q^3-1, q^3+1\}$, $\nu(A_4)\sim p(A_4)\cdot\{q^2-1, \frac{q^3-1}{d}, \frac{q^3+1}{d}\}$;

2) $\upsilon((A_5)_1)\sim p(A_5)\cdot\{q^2-1, d(q^2-q+1), d(q^2+q+1)\}$,
$\nu((A_5)_1)\sim p(A_5)\cdot\{q^2-1, q^2-q+1, q^2+q+1\}$;

3) $\upsilon((A_5)_2)\sim p(A_5)\cdot\{\frac{q^2-1}{d}\}$, $\nu((A_5)_2)\sim p(A_5)\cdot\{\frac{q^2-1}{d}\}$;

4) $\upsilon(A_6)\sim p(A_6)\cdot\{q-1, q+1\}$, $\nu(A_6)\sim p(A_6)\cdot\{\frac{q-1}{d}, \frac{q+1}{d}\}$;

5) $\upsilon(A_7)\sim p(A_7)\cdot\{d^2\}$, $\nu(A_7)\sim p(A_7)\cdot\{d\}$;

6) $\upsilon(D_4)\sim p(D_4)\cdot\{q^3-1, q^3+1, (q^2+1)(q+1), (q^2+1)(q-1), q^2-1\}$,
$\nu(D_4)\sim p(D_4)\cdot\{\frac{q^3-1}{d}, \frac{q^3+1}{d}, \frac{(q^2+1)(q+1)}{d}, \frac{(q^2+1)(q-1)}{d}, q^2-1\}$;

7) $\upsilon(D_5)\sim p(D_5)\cdot\{\frac{q^2-1}{d}\}$, $\nu(D_5)\sim p(D_5)\cdot\{\frac{q^2-1}{d}\}$;

8) $\upsilon(D_6)\sim p(D_6)\cdot\{q-1, q+1\}$, $\nu(D_6)\sim p(D_6)\cdot\{q-1, q+1\}$;

9) $\upsilon(E_6)\sim p(E_6)\cdot\{q-1, q+1\}$, $\nu(E_6)\sim p(E_6)\cdot\{\frac{q-1}{d}, \frac{q+1}{d}\}$;

10) $\upsilon(2A_2)\sim p(A_2)\cdot\{q^2-1, (q-1)(q^2-q+1), (q+1)(q^2+q+1)\}$,
$\nu(2A_2)\sim p(A_2)\cdot\{q^2-1, \frac{(q-1)(q^2-q+1)}{d}, \frac{(q+1)(q^2+q+1)}{d}\}$;

11) $\upsilon(3A_2)\sim p(A_2)\cdot\{(q-1)(3,q-1), (q+1)(3,q+1)\}$,
$\nu(3A_2)\sim p(A_2)\cdot\{\frac{(q-1)(3,q-1)}{d}, \frac{(q+1)(3,q+1)}{d}\}$;

12) $\upsilon(2A_3)\sim p(A_3)\cdot\{\frac{(q-1)(4,q-1)}{d}, \frac{(q+1)(4,q+1)}{d}\}$,

$\nu(2A_3) \sim p(A_3) \cdot \left\{\frac{(q-1)(4,q-1)}{d}, \frac{(q+1)(4,q+1)}{d}\right\}$.

Доказательство. Это утверждение получено с помощью вычислений в MAGMA. Опишем схему этих вычислений. Для каждого множества корней Δ из табл. 3 определяется группа $N_W(\Delta)$. Затем из каждого класса сопряженности группы $N_W(\Delta)$ выбирается представитель w и составляется матрица $M = qw - 1$ (напомним, что в случае, когда подсистема, порожденная корнями из Δ, имеет вид $k\Psi_1$ для некоторой подсистемы Ψ_1, элемент w должен действовать на $k\Psi_1$, переставляя прямые слагаемые по циклу). При этом столбцы матрицы M задают соотношения группы $\mathbb{T}_{\sigma\circ w}$. Имеем $Z(\mathbb{H}_{\sigma\circ w}) = Z(\mathbb{H})_{\sigma\circ w} = \mathbb{T}_{\sigma\circ w} \cap Z(\mathbb{H})$. Таким образом, для нахождения центра группы $\mathbb{H}_{\sigma\circ w}$ необходимо к соотношениям, задаваемым столбцами матрицы M, добавить соотношения из третьего столбца табл. 3.

Таблица 3

Ψ	Δ	Центр
A_1	$-r_0$	$t_1 = 1$
A_2	$-r_0, r_1$	$t_1 = t_3 = 1$
A_3	$-r_0, r_1, r_3$	$t_1 = t_3 = t_4 = 1$
A_4	$-r_0, r_1, r_3, r_4$	$t_1 = t_3 = t_4 = 1,\ t_2 = t_5^{-1}$
$(A_5)_1$	$-r_0, r_1, r_2, r_3, r_4$	$t_1 = t_3 = t_4 = 1,\ t_2 = t_5^{-1},\ t_2^2 = 1$
$(A_5)_2$	$-r_0, r_1, r_3, r_4, r_5$	$t_1 = t_3 = t_4 = 1,\ t_2 = t_5^{-1},\ t_6 = t_5^2$
A_6	$-r_0, r_1, r_3, r_4, r_5, r_6$	$t_1 = t_3 = t_4 = 1,\ t_2 = t_5^{-1},\ t_6 = t_5^2,\ t_7 = t_5^3$
A_7	$-r_0, r_1, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7$	$t_1 = t_3 = t_4 = 1,\ t_2 = t_5^{-1},\ t_6 = t_5^2,\ t_7 = t_5^3,\ t_7^4 = 1$
D_4	$-r_0, r_1, r_3, r_8$	$t_1 = t_3 = t_4 = 1,\ t_7 = t_5$
D_5	$-r_0, r_1, r_3, r_4, r_8$	$t_1 = t_3 = t_4 = 1,\ t_2 = t_5^{-1},\ t_7 = t_5$
D_6	$-r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$	$t_1 = t_3 = t_4 = t_6 = 1,\ t_2 = t_5^{-1},\ t_2^2 = 1$
E_6	$r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$	$t_3 = t_1^2,\ t_4 = t_2^2 = t_1^3,\ t_5 = t_1t_2,\ t_6 = t_1^2,\ t_7 = t_2$
$2A_1$	$-r_0, r_9$	$t_1 = t_6 = 1$
$(3A_1)_1$	$-r_0, r_7, r_9$	$t_1 = t_6 = 1,\ t_7^2 = 1$
$(3A_1)_2$	$-r_0, r_9, r_{10}$	$t_1 = t_4 = t_6 = 1$
$(4A_1)_1$	$-r_0, r_2, r_9, r_{10}$	$t_1 = t_4 = t_6 = 1,\ t_2^2 = 1$
$(4A_1)_2$	$-r_0, r_3, r_9, r_{10}$	$t_1 = t_4 = t_6 = 1,\ t_3^2 = 1$
$5A_1$	$-r_0, r_2, r_7, r_9, r_{10}$	$t_1 = t_4 = t_6 = 1,\ t_2^2 = t_7^2 = 1$
$2A_2$	$-r_0, r_1, r_6, r_7$	$t_1 = t_3 = 1,\ t_6 = t_7^2,\ t_5 = t_7^3$
$3A_2$	$-r_0, r_1, r_2, r_4, r_6, r_7$	$t_1 = t_3 = 1,\ t_6 = t_7^2,\ t_5 = t_7^3,\ t_4 = t_2^2,\ t_2^3 = t_7^3$
$2A_3$	$-r_0, r_1, r_3, r_5, r_6, r_7$	$t_1 = t_3 = t_4 = 1,\ t_6 = t_7^2,\ t_5 = t_7^3,\ t_7^4 = 1$

Пусть некоторое соотношение из третьего столбца табл. 3 имеет вид $t_i = t_1^{a_1} \dots t_{i-1}^{a_{i-1}} t_{i+1}^{a_{i+1}} \dots t_7^{a_7}$ для некоторого i (например, в случае, $\Psi = A_4$ имеем $t_2 = t_5^{-1}$). Умножим матрицу M слева на соответствующую этой замене матрицу и вычеркнем i-ю строку из результирующей матрицы. Заметим, что i-й столбец получившейся матрицы можно также вычеркнуть, поскольку соотношение, задаваемое этим столбцом, следует из остальных соотношений. Действительно, пусть $h_{r_1}(t_1)\dots h_{r_7}(t_7)$ — элемент центра редуктивной подгруппы $\mathbb{H}_{\sigma\circ w}$. Имеем

$$(h_{r_1}(t_1)\dots h_{r_7}(t_7))^{\sigma\circ w} = h_{r_1w}\big(t_1^q\big)\dots h_{r_7w}\big(t_7^q\big) = h_{r_1}(t_1)\dots h_{r_7}(t_7).$$

Пусть $h_{r_1w}\big(t_1^q\big)\dots h_{r_7w}\big(t_7^q\big) = h_{r_1}(\tilde t_1)\dots h_{r_7}(\tilde t_7)$, где $\tilde t_i$ — произведение степеней $t_1, \dots, t_7$. В силу выбора элемента имеем $\tilde t_i = \tilde t_1^{a_1}\dots\tilde t_{i-1}^{a_{i-1}}\tilde t_{i+1}^{a_{i+1}}\dots\tilde t_7^{a_7}$. Тогда равенство $\tilde t_i = t_i$ является следствием равенств $\tilde t_j = t_j$ для $j \neq i$ и равенства $t_i = t_1^{a_1}\dots t_{i-1}^{a_{i-1}}t_{i+1}^{a_{i+1}}\dots t_7^{a_7}$.

Таким образом, после умножения матрицы M на матрицы, соответствующие соотношениям из табл. 3, и вычеркивания строк и столбцов получаем квадратную матрицу, которую необходимо представить в виде RDL, где D диагональная, а R и L унимодулярные. Приведем в качестве примера вычисления для системы A_4.

Для системы A_4 есть два случая, когда центр группы $\mathbb{H}_{\sigma\circ w}$ циклический и имеет порядок q^3-1 или q^3+1. В остальных случаях период центра группы $\mathbb{H}_{\sigma\circ w}$ делит q^2-1. Таким образом, верно первое утверждение п. 1, и для доказательства второго требуется показать, что существует редуктивная подгруппа с центром периода q^2-1 такая, что период центра не меняется при переходе к простой группе. Пусть

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

После преобразований и исключения параметров t_1, t_3, t_4 и t_5 из матрицы $qw-1$ получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} q-1 & -q & -q \\ 0 & -1 & -q \\ 0 & -q & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -q-1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q-1 & 0 \\ 0 & 0 & q^2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -q \\ -1 & 1 & -q \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, элементы центра в этом случае задаются двумя параметрами s_1 и s_2, причем $s_1^{q-1} = 1$ и $s_2^{q^2-1} = 1$. Более точно, имеем $t_2 = s_1^{-1}s_2^{-q-1} = t_5^{-1}$, $t_6 = s_1s_2$, $t_7 = s_2$. Таким образом, группа $\mathbb{T}_{\sigma\circ w}$ содержит циклическую подгруппу порядка q^2-1, состоящую из элементов вида $h_{r_2}\big(s_2^{-q-1}\big)h_{r_5}\big(s_2^{q+1}\big)h_{r_6}(s_2)h_{r_7}(s_2)$, которая тривиально пересекается с центром группы G. Предложение доказано.

Теорема 1 непосредственно следует из предложений 3.1, 3.3, описания максимальных торов в спинорных группах (см. [17, теорема 1]), в группах ${}^3D_4(q)$ (см. [20, предложение 1.2]) и в линейных и унитарных группах (см. [21]).

Теорема 2 вытекает из следствия 3.2 и предложения 3.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Testerman D. M.* A_1-type overgroups of elements of order p in semisimple algebraic groups and the associated finite groups // J. Algebra. 1995. V. 177, N 1. P. 34–76.
2. *Suzuki M.* On a class of doubly transitive groups // Ann. Math. (2). 1962. V. 75. P. 105–145.
3. *Brandl R., Shi W. J.* A characterization of finite simple groups with abelian Sylow 2-subgroups // Ric. Mat. 1993. V. 42, N 1. P. 193–198.
4. *Deng H. W., Shi W. J.* The characterization of Ree groups ${}^2F_4(q)$ by their element orders // J. Algebra. 1999. V. 217, N 1. P. 180–187.

5. *Kantor W. M., Seress Á.* Prime power graphs for groups of Lie type // J. Algebra. 2002. V. 247, N 2. P. 370–434.
6. *Deriziotis D. I.* Conjugacy classes of centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type. Essen: Univ. Essen Fachbereich Math., 1984. (Vorlesungen Fachbereich Math. Univ. Essen; V. 11).
7. *Васильев А. В., Старолетов А. М.* Распознаваемость групп $G_2(q)$ по спектру // Алгебра и логика. 2013. Т. 52, № 1. С. 3–21.
8. *Grechkoseeva M. A., Zvezdina M. A.* On spectra of automorphic extensions of finite simple groups $F_4(q)$ and ${}^3D_4(q)$ // J. Algebra Appl. 2016. V. 15, N 4. 1650168.
9. *Бутурлакин А. А.* Спектры конечных простых групп $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$ // Алгебра и логика. 2013. Т. 52, № 3. С. 284–304.
10. *Бутурлакин А. А.* Спектры конечных линейных и унитарных групп // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 2. С. 157–173.
11. *Бутурлакин А. А.* Спектры конечных симплектических и ортогональных групп // Мат. тр. 2010. Т. 13, № 2. С. 33–83.
12. *Deriziotis D. I., Fakiolas A. P.* The maximal tori in the finite Chevalley groups of type E_6, E_7 and E_8 // Commun. Algebra. 1991. V. 19, N 3. P. 889–903.
13. *Carter R. W.* Finite groups of Lie type. Conjugacy classes and complex characters. Chichester; New York, etc.: John Wiley & Sons, 1985.
14. *Carter R. W.* Centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 1978. V. 37. P. 491–507.
15. *Deriziotis D. I.* The centralizers of semisimple elements of the Chevalley groups E_7 and E_8 // Tokyo J. Math. 1983. V. 6, N 1. P. 191–216.
16. *Oshima T.* A classification of subsystems of a root system // arXiv:math/0611904.
17. *Заварницин А. В.* Строение максимальных торов в спинорных группах // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 3. С. 537–548.
18. *Bosma W., Cannon J., Playoust C.* The Magma algebra system. I. The user language // J. Symb. Comput. 1997. V. 24, N 3–4. P. 235–265.
19. *Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.* The classification of the finite simple groups. N. 3. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. (Math. Surv. Monogr.; V. 40.3).
20. *Deriziotis D. I., Michler G. O.* Character table and blocks of finite simple triality groups ${}^3D_4(q)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. V. 303. P. 39–70.
21. *Бутурлакин А. А., Гречкосеева М. А.* Циклическое строение максимальных торов в конечных классических группах // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 2. С. 129–156.

Статья поступила 10 ноября 2015 г.

Бутурлакин Александр Александрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
buturlakin@math.nsc.ru