Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2016. Том 57, № 6

УДК 517.957

ОБ ОПЕРАТОРЕ ШРЕДИНГЕРА, СВЯЗАННОМ С СЕМЕЙСТВОМ ГАМИЛЬТОНОВО МИНИМАЛЬНЫХ ЛАГРАНЖЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В $\mathbb{C}P^2$

Б. Т. Сапарбаева

Аннотация. Изучается двумерный оператор Шредингера, связанный с одним семейством гамильтоново минимальных лагранжевых поверхностей в $\mathbb{C}P^2$.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.614

Ключевые слова: гамильтоново минимальные лагранжевы поверхности.

1. Введение

В статье изучается двумерный оператор Шредингера, связанный с семейством гамильтоново минимальных лагранжевых поверхностей в $\mathbb{C}P^2$, построенных в [1].

Подмногообразие $M \subset \mathbb{C}P^n$ (погруженное или вложенное), $\dim_{\mathbb{R}} M = n$, называется *лагранжевым,* если ограничение формы Фубини — Штуди на M равно нулю. Подмногообразие M называется *гамильтоново минимальным* (H-*минимальным*), если вариации объемы M вдоль всех гамильтоновых полей равны нулю. В [1] построены первые примеры H-минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}P^n$ (отличных от минимальных). Они строятся с помощью некоторой надстройки над пересечением квадрик в $\mathbb{R}^n$. Их топология изучалась в [2]. В двумерном случае эта конструкция дает H-минимальные лагранжевы торы (вложенные или погруженные) и бутылки Клейна (только погруженные) в $\mathbb{C}P^2$ (см. ниже). С другой стороны, в [3] показано, что с каждой лагранжевой поверхностью связан естественным образом двумерный оператор Шредингера. Цель этой работы — изучить оператор Шредингера для указанных поверхностей.

Будем задавать конформное лагранжево погружение области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ через композицию $r : \Omega \to S^5 \subset \mathbb{C}^3$, где $|r| = 1$, и проекцию расслоения Хопфа $\mathscr{H} : S^5 \to \mathbb{C}P^2$, где $r = (r_1, r_2, r_3)$, r_i — комплекснозначная функция. Имеет место (см. [3])

Лемма 1.1. *Компоненты r_j вектор-функции r удовлетворяют уравнению Шредингера*

$$Lr_j = \partial_x^2 r_j + \partial_y^2 r_j + i(\beta_x \partial_x r_j + \beta_y \partial_y r_j) + 4e^v r_j = 0, \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 14–11–00441).

где $2e^v(dx^2+dy^2)$ *— индуцированная метрика на поверхности, а* $\beta(x,y)$ *— лагранжев угол, определяемый равенством*

$$e^{i\beta} = dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3(\sigma),$$

z_1, z_2, z_3 *— координаты в* $\mathbb{C}^3$, x, y *— координаты на* Ω, σ *— репер, образованный векторами* r, $\frac{r_x}{|r_x|}$, $\frac{r_y}{|r_y|}$.

Напомним конструкцию построения H-минимальных лагранжевых поверхностей в $\mathbb{C}P^2$ из [1]. Возьмем двумерный конус $K \subset \mathbb{R}^3$, заданный уравнением

$$mu_1^2 + nu_2^2 + ku_3^2 = 0, \quad m,n,k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ (u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Рассмотрим пересечение $\widetilde{K}$ конуса K с единичной сферой $S^2 = \{(u_1,u_2,u_3) \mid u_1^2+u_2^2+u_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$. Через T^1 обозначим окружность в $\mathbb{C}^3$:

$$T^1 = \{(e^{\pi imy}, e^{\pi iny}, e^{\pi iky}),\ y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}^3.$$

Пусть $\Lambda = \{mp_1+np_2+kp_3,\ p_i \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$ — решетка, порожденная числами m,n,k, и $\Lambda^* = \{\lambda^* \in \mathbb{R} \mid \lambda\lambda^* \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$ — двойственная к Λ решетка. Обозначим через G фактор-группу $G = \Lambda^*/2\Lambda^* \simeq \mathbb{Z}_2$. Группа G свободно действует на $\widetilde{K} \times T^1$, а именно если $\gamma \in G$, то

$$\gamma(u_1,u_2,u_3,y) = (u_1\cos(\pi m\gamma), u_2\cos(\pi n\gamma), u_3\cos(\pi k\gamma), y+\gamma).$$

Отметим, что $\cos(\pi m\gamma)$, $\cos(\pi n\gamma)$, $\cos(\pi k\gamma)$ равны ±1. Фактор-многообразие $\widetilde{K} \times T^1/G$ диффеоморфно либо тору, либо бутылке Клейна.

В [1] показано, что образ многообразия $\widetilde{K} \times T^1/G$ при композиции $\mathscr{H} \circ \omega$, где

$$\omega : \widetilde{K} \times S^1/G \to S^5, \quad \omega(u,\ y) = (u_1e^{\pi imy}, u_2e^{\pi iny}, u_3e^{\pi iky}),$$

является H-минимальной лагранжевой бутылкой Клейна либо тором.

Пусть $\Sigma = \mathscr{H} \circ \omega(\widetilde{K} \times T^1/G)$. Предположим без ограничения общности, что $m < n < 0 < k$. Основной результат этой работы составляет

Теорема 1.1. *Поверхность* Σ *является образом композиции* $\mathscr{H} \circ \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}P^2$, *где* $\psi : \mathbb{R}^2 \to S^5$, $\psi = (\psi_1,\psi_2,\psi_3)$,

$$\psi_1(x,y) = \sqrt{\frac{k}{k-m}}\,\mathrm{cn}(\nu x,\kappa)e^{i\pi my}, \quad \psi_2(x,y) = \sqrt{\frac{k}{k-n}}\,\mathrm{sn}(\nu x,\kappa)e^{i\pi ny},$$

$$\psi_3(x,y) = \sqrt{\frac{k(n-m)\,\mathrm{cn}^2(\nu x,\kappa) - n(k-m)}{(k-m)(k-n)}}\,e^{i\pi ky},$$

$\nu = \sqrt{m(n-k)}\pi$, $\kappa = \sqrt{\frac{k(m-n)}{m(k-n)}}$, $\mathrm{sn}(\nu x,\kappa)$, $\mathrm{cn}(\nu x,\kappa)$ *— эллиптические функции Якоби. Индуцированная метрика на* Σ *имеет вид* $ds^2 = 2e^v(dx^2+dy^2)$, *где*

$$2e^v = k\pi^2((m-n)\,\mathrm{sn}(\nu x,\kappa)^2 - m).$$

Функции ψ_i *удовлетворяют уравнению Шредингера* $L\psi_i = 0$, *где*

$$L = \partial_x^2 + \partial_y^2 + i(m+n+k)\pi\partial_y + 2k\pi^2((m-n)\,\mathrm{sn}^2(\nu x,\kappa) - m). \tag{2}$$

Оператор Шредингера (2) является суммой оператора $\partial_y^2 + i(m+n+k)\pi\partial_y$ с постоянными коэффициентами и конечнозонного оператора Ламе $L_2 = \partial_x^2 +$

$2k\pi^2((m-n)\,\mathrm{sn}^2(\nu x,\kappa)-m)$. Потенциал $u(x)=2k\pi^2((m-n)\,\mathrm{sn}^2(\nu x,\kappa)-m)$ оператора Ламе периодический: $u(x+\tau)=u(x)$, где $\tau=2K$,

$$K=\frac{1}{\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1-\kappa^2\sin(t)^2}.$$

Оператор L_2 коммутирует с оператором третьего порядка

$$L_3=\partial_x^3-(3k(m-n)\,\mathrm{sn}^2(\nu x,\kappa)+(mn+nk-2km))\pi^2\partial_x \\ -3k(m-n)\nu\,\mathrm{sn}(\nu x,\kappa)\,\mathrm{cn}(\nu x,\kappa)\,\mathrm{dn}(\nu x,\kappa),$$

$\mathrm{dn}(\nu x,\kappa)$ — эллиптическая функция Якоби. Коммутирование операторов проверяется явным вычислением. Спектральная кривая Γ операторов L_2, L_3 задается уравнением $Q(z,w)=0$, где

$$Q(z,w)=w^2-z^3-2(mn+nk+km)\pi^2z^2 \\ -(m^2n^2+n^2k^2+k^2m^2+3mnk(m+n+k))\pi^4z-mnk(m+n)(n+k)(k+m)\pi^6.$$

Операторы L_2, L_3 удовлетворяют уравнению $Q(L_2,L_3)=0$. Спектральная кривая параметризует совместные собственные числа операторов L_2 и L_3 (см., например, [4]), а именно если $L_2f(x)=zf(x)$, $L_3f(x)=wf(x)$, то $(z,w)\in\Gamma$.

Напомним, что собственная функция $g(x,y)$ периодического оператора называется *блоховской*, если

$$g(x+\tau)=\mu_1g(x,y),\quad g(x,y+\tau')=\mu_2g(x,y),$$

где τ,τ' — периоды. Спектральная кривая Γ параметризует блоховские функции оператора L на нулевом уровне энергии, а именно если $f(x)$ — блоховская функция оператора L_2,

$$L_2f(x)=zf(x),$$

то функция $g(x,y)=f(x)e^{i\alpha y}$, где α — корень уравнения

$$\alpha^2+(m+n+k)\pi\alpha-z=0,$$

блоховская для оператора Шредингера

$$Lg(x,y)=0.$$

Конечнозонные на одном уровне энергии операторы Шредингера изучались в [5]. Отметим, что другие примеры H-минимальных лагранжевых поверхностей в $\mathbb{C}P^2$ построены в [6,7] (см. также [8]). Отметим также, что если $m+n+k=0$, то поверхность минимальна. Оказывается, что в этом случае метрика на Σ экстремальна для первого собственного значения оператора Лапласа — Бельтрами (см. [9,10]).

2. Доказательство теоремы 1

Напомним, что любую лагранжеву поверхность можно строить (локально) с помощью композиции горизонтального отображения (см. [1])

$$r:\Omega\to S^5$$

и проекции Хопфа $\mathscr{H}:S^5\to\mathbb{C}P^2$, где $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, причем r удовлетворяет уравнениям

$$\langle r,r_x\rangle=\langle r,r_y\rangle=\langle r_x,r_y\rangle=0,\quad |r_x|^2=|r_y|^2=2e^v, \tag{3}$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ — эрмитово произведение. Индуцированная метрика на поверхности имеет вид $ds^2 = 2e^v(dx^2+dy^2)$, т. е. (x,y) — изотермические координаты. Из (3) вытекает, что матрица

$$\widetilde{R} = \begin{pmatrix} r \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{v}{2}} r_x \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{v}{2}} r_y \end{pmatrix} \in U(3)$$

унитарна. Следовательно, $\det\widetilde{R} = e^{i\beta(x,y)}$, где $\beta(x,y)$ — лагранжев угол поверхности. Если β — гармоническая функция на поверхности, то поверхность H-минимальна, а если β постоянна, то поверхность минимальна (см. [11]). Через лагранжев угол можно выразить вектор средней кривизны поверхности $H = J\nabla\beta$, где J — комплексная структура на $\mathbb{C}P^2$. Таким образом,

$$R = \begin{pmatrix} r \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{v}{2} - i\frac{\beta}{2}} r_x \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{v}{2} - i\frac{\beta}{2}} r_y \end{pmatrix} \in SU(3).$$

Матрица R удовлетворяет уравнениям

$$R_x = AR, \quad R_y = BR, \tag{4}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}e^{\frac{v}{2}+i\frac{\beta}{2}} & 0 \\ -\sqrt{2}e^{\frac{v}{2}-i\frac{\beta}{2}} & if & -\frac{1}{2}v_y + i\big(h+\frac{1}{2}\beta_y\big) \\ 0 & \frac{1}{2}v_y + i\big(h+\frac{1}{2}\beta_y\big) & if \end{pmatrix} \in su(3),$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2}e^{\frac{v}{2}+i\frac{\beta}{2}} \\ 0 & ih & \frac{1}{2}v_x + i\big(-f+\frac{1}{2}\beta_x\big) \\ -\sqrt{2}e^{\frac{v}{2}-i\frac{\beta}{2}} & -\frac{1}{2}v_x + i\big(-f+\frac{1}{2}\beta_x\big) & ih \end{pmatrix} \in su(3),$$

$f(x,y)$, $h(x,y)$ — некоторые вещественные функции. Из (4) вытекает, что r удовлетворяет уравнению Шредингера (1).

Найдем вектор-функцию $\psi : \mathbb{R}^2 \to S^5$, которая удовлетворяет уравнениям (3) в случае поверхности Σ. Это позволит найти искомый оператор Шредингера. Будем искать $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ в виде

$$\psi_1(x,y) = \varphi_1(x)e^{i\pi m y}, \quad \psi_2(x,y) = \varphi_2(x)e^{i\pi n y}, \quad \psi_3(x,y) = \varphi_3(x)e^{i\pi k y},$$

где $\varphi_j(x)$ — вещественные функции. Потребуем, чтобы $\varphi_j(x)$ удовлетворяли уравнениям

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 1, \quad m\varphi_1^2 + n\varphi_2^2 + k\varphi_3^2 = 0. \tag{5}$$

Тогда $\langle\psi,\psi_x\rangle = \langle\psi,\psi_y\rangle = \langle\psi_x,\psi_y\rangle = 0$.

Из условия конформности метрики $|\psi_x|^2 = |\psi_y|^2 = 2e^v$ получаем

$$(\varphi_1')^2 + (\varphi_2')^2 + (\varphi_3')^2 = 2e^v, \tag{6}$$

$$\pi^2\big(m^2\varphi_1^2 + n^2\varphi_2^2 + k^2\varphi_3^2\big) = 2e^v. \tag{7}$$

Из (5) и (7) вытекает

$$\varphi_1^2 = \frac{2e^v + kn\pi^2}{(k-m)(n-m)\pi^2}, \quad \varphi_2^2 = \frac{2e^v + km\pi^2}{(k-n)(m-n)\pi^2}, \quad \varphi_3^2 = \frac{2e^v + mn\pi^2}{(m-k)(n-k)\pi^2}.$$

Из последних равенств следует, что

$$\varphi_1'^2 = \frac{e^{2v}v'^2}{(k-m)(n-m)(2e^v + kn\pi^2)\pi^2}, \quad \varphi_2'^2 = \frac{e^{2v}v'^2}{(k-n)(m-n)(2e^v + km\pi^2)\pi^2},$$

$$\varphi_3'^2 = \frac{e^{2v}v'^2}{(m-k)(n-k)(2e^v + mn\pi^2)\pi^2}.$$

Подставим формулы для $(\varphi_j')^2$ в (6). Получим уравнение на v:

$$(2e^v + km\pi^2)(2e^v + kn\pi^2)(2e^v + mn\pi^2) + e^{2v}v'^2 = 0. \tag{8}$$

Напомним, что эллиптическая функция Якоби $\operatorname{sn}(x,\kappa)$ определяется следующим образом (см. [12]):

$$\operatorname{sn}(x,\kappa) = \sin\phi(x,\kappa),$$

где $\phi(x,\kappa)$ — обратная функция к

$$x(\phi) = \int_0^\phi \frac{dt}{\sqrt{1-\kappa^2\sin(t)^2}}, \quad 0 < \kappa < 1.$$

Из тождества

$$\operatorname{sn}'(x,\kappa)^2 = (1-\operatorname{sn}(x,\kappa)^2)(1-\kappa^2\operatorname{sn}(x,\kappa)^2)$$

вытекает, что уравнение (8) имеет решение вида

$$2e^v = k\pi^2\left((m-n)\ \operatorname{sn}^2\left(\sqrt{m(n-k)}\pi x, \sqrt{\frac{k(m-n)}{m(k-n)}}\right) - m\right).$$

Тогда

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{k}{k-m}}\operatorname{cn}(\nu x,\kappa), \quad \varphi_2 = \sqrt{\frac{k}{k-n}}\operatorname{sn}(\nu x,\kappa),$$

$$\varphi_3 = \sqrt{\frac{k(n-m)\operatorname{cn}^2(\nu x,\kappa) - n(k-m)}{(k-m)(k-n)}},$$

где $\nu = \sqrt{m(n-k)}\pi$, $\kappa = \sqrt{\frac{k(m-n)}{m(k-n)}}$, $\operatorname{cn}(x,\kappa) = \cos\phi(x,\kappa)$. Функции φ_j удовлетворяют уравнениям (5)–(7), а ψ_j — уравнениям (3). Прямыми вычислениями получаем, что $\det\widetilde{R} = e^{i\beta(x,y)}$ для $\widetilde{R} = \begin{pmatrix} \psi \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v}{2}}\psi_x \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v}{2}}\psi_y \end{pmatrix} \in U(3)$, где

$$\beta(x,y) = (m+n+k)\pi y + \frac{\pi}{2}.$$

Матрицы A и B из (4) принимают вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}e^{\frac{v}{2}+i\frac{\beta}{2}} & 0 \\ -\sqrt{2}e^{\frac{v}{2}-i\frac{\beta}{2}} & 0 & \frac{1}{2}ie^{-v}mnk\pi^3 \\ 0 & \frac{1}{2}ie^{-v}mnk\pi^3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2}e^{\frac{v}{2}+i\frac{\beta}{2}} \\ 0 & -\frac{1}{2}ie^{-v}(mnk\pi^3 + e^v\beta_y) & \frac{v'}{2} \\ -\sqrt{2}e^{\frac{v}{2}-i\frac{\beta}{2}} & -\frac{v'}{2} & \frac{1}{2}ie^{-v}(mnk\pi^3 + e^v\beta_y) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, функция ψ удовлетворяет уравнению Шредингера $L\psi = 0$, где

$$L = \partial_x^2 + \partial_y^2 + i(m+n+k)\pi\partial_y + 2k\pi^2((m-n)\operatorname{sn}^2(\nu x,\kappa) - m).$$

Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Миронов А. Е.* О новых примерах гамильтоново-минимальных и минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}P^n$ // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 1. С. 89–102.
2. *Миронов А. Е., Панов Т. Е.* Пересечения квадрик, момент-угол-многообразия и гамильтоново-минимальные лагранжевы вложения // Функцион. анализ и его прил. 2013. Т. 47, № 1. С. 47–61.
3. *Миронов А. Е.* Иерархия уравнений Веселова — Новикова и интегрируемые деформации минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^2$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2004. Т. 1. С. 38–46.
4. *Кричевер И. М.* Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии // Функцион. анализ и его прил. 1977. Т. 11, № 1. С. 15–31.
5. *Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П.* Уравнение Шредингера в периодическом поле и римановы поверхности // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229, № 1. С. 15–18.
6. *Миронов А. Е.* О гамильтоново минимальных лагранжевых торах в $\mathbb{C}P^2$ // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 6. С. 1324–1328.
7. *Hui Ma.* Hamiltonian stationary Lagrangian surfaces in $\mathbb{C}P^2$ // Ann. Global Anal. Geom. 2005. V. 27, N 1. P. 1–16.
8. *Hunter R., McIntosh I.* The classification of Hamiltonian stationary Lagrangian tori in $\mathbb{C}P^2$ by their spectral data // Manuscripta Math. 2011. V. 135, N 3–4. P. 437–468.
9. *Penskoi A. V.* Generalize Lawson tori and Klein bottles // J. Geom. Anal. 2015. V. 25, N 4. P. 2645–2666.
10. *Karpukhin M.* Spectral properties of a family of minimal tori of revolution in five-dimensional sphere // Canad. Math. Bull. 2015. V. 58, N 2. P. 285–296.
11. *Oh Y.* Volume minimization of Lagrangian submanifolds under Hamiltonian deformations // Math. Z. 1993. Bd 212, Heft 1. S. 175–192.
12. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.

Статья поступила 7 апреля 2016 г.

Сапарбаева Баян Талгатовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
saparbayevabt@gmail.com