Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2017. Том 58, № 2

УДК 517.9

ОБ АСИМПТОТИКЕ ДВИЖЕНИЙ НЕЛИНЕЙНО–ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. Л. Хацкевич

Аннотация. Изучена нестационарная задача о движении нелинейно-вязкой жидкости в случае малой либо большой вязкости. Установлена сходимость решений к соответствующим предельным при стремлении вязкости к нулю либо к бесконечности.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.216

Ключевые слова: нелинейно-вязкая жидкость, математическая модель, эволюционная задача, асимптотика решений.

1. Введение

В работе рассматриваются течения нелинейно-вязкой жидкости, уравнения состояния которой описываются реологическим соотношением

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \phi(I_2)\varepsilon_{ij},$$

где σ_{ij}, δ_{ij}, ε_{ij} — компоненты тензоров напряжения, скоростей деформации и единичного вектора, ϕ — вязкость жидкости, зависящая от I_2 — второго инварианта тензора скоростей деформации, p — давление. Такая жидкость в гидромеханике называется *жидкостью Стокса.* Ее частным случаем при различных видах функции ϕ являются модели Оствальда, Эллиса, Прандтля и др.

В данной работе на функцию ϕ будут наложены ограничения, принятые в [1, гл. II, § 1]. Такую модель будем называть *моделью Литвинова.*

Исследование эволюционной модели Литвинова, описывающей движение нелинейно-вязкой жидкости, представлено в книге В. Г. Литвинова [1] и в статьях П. Е. Соболевского (см., например, [2] и приведенные там ссылки). Из последних работ в этом направлении отметим [3, 4]. Исследованные в настоящей работе вопросы поведения решений уравнений, описывающих движение нелинейно-вязкой жидкости при стремлении коэффициента вязкости к нулю либо к бесконечности, изучены до настоящего времени недостаточно. Вместе с тем существует большое количество работ по асимптотике решений уравнений Навье — Стокса в случае малой и большой вязкости (см., например, [5–7]). В настоящей работе некоторые результаты автора по асимптотике решений для эволюционной задачи Навье — Стокса (см. [8, 9]) развиваются на случай нестационарной задачи о движении нелинейно-вязкой жидкости.

В разд. 2 данной работы для нестационарной математической модели движения нелинейно-вязкой жидкости в приближении Стокса установлена равномерная сходимость соответствующих решений к решению вырожденной задачи при стремлении коэффициента вязкости к нулю. Это утверждение усиливает результат О. А. Ладыженской, представленный в [5, гл. IV, § 5] для классической задачи Стокса, и дает обоснование асимптотическим представлениям решений нестационарных линеаризованных задач Навье — Стокса в случае малой вязкости (см., например, [6]).

В разд. 3 для полной эволюционной модели, учитывающей инерциальные силы, рассмотрен случай большой вязкости. Доказана асимптотическая сходимость решений к соответствующим предельным решениям, учитывающим пограничный слой. Этот результат является развитием соответствующего результата автора из [9] для задачи Навье — Стокса. Он дает обоснование асимптотическим представлениям решений нестационарных задач для уравнений Навье — Стокса в случае большой вязкости (см., например, [10]).

Отметим, что характерной особенностью настоящей работы является получение эффективных оценок скорости сходимости (по вязкости) решений к предельному решению во всех рассматриваемых ситуациях.

Результаты настоящей работы представляются нам новыми и для ньютоновских жидкостей (в случае $\phi \equiv \mathrm{const}$).

Перейдем к точным формулировкам. Будем использовать термины и обозначения, принятые в [1, 5].

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с дважды непрерывно дифференцируемой границей $\partial\Omega$, $T > 0$ — заданное число. Движение нелинейно-вязкой несжимаемой жидкости в $Q_T := \Omega \times (0, T)$ описывается уравнениями (см. [1, гл. IV, § 6])

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_k \frac{\partial u}{\partial x_k} - \nu \operatorname{div}\{2\phi(I_2)\varepsilon(u)\} + \nabla p_* = f(x,t), \quad \operatorname{div} u = 0 \quad (x \in \Omega,\ t \in (0,T)); \tag{1}$$

$$u(x,t) = 0 \ (t \in (0,T),\ x \in \partial\Omega), \quad u(x,0) = a(x) \ (x \in \overline{\Omega}), \quad \int\limits_{\Omega} p_*(x)\,dx = 0. \tag{2}$$

Здесь $u = (u_1, u_2)$ и p_* — искомые скорость жидкости и давление соответственно. Функции a и f — начальное условие на скорость жидкости и вектор плотности внешних сил задачи. Через ε обозначен тензор скоростей деформации жидкости:

$$\varepsilon = \{\varepsilon_{i,j}\}_{i,j=1,2}, \quad \varepsilon_{i,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad I_2^2 = \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{i,j}^2.$$

Заданная скалярная функция $\phi(\cdot)$ и параметр $\nu > 0$ характеризуют вязкость. В [1, 2] при изучении задачи (1), (2) использовались следующие условия на функцию $\phi(s)$:

$$0 < m \le \phi(s) \le M < \infty \quad (\forall s \in [0, \infty)), \tag{3a}$$

$$-s\dot\phi(s) \le \phi(s) \text{ при } \dot\phi(s) < 0, \quad |s\dot\phi(s)| \le c < \infty. \tag{3b}$$

Условия (3) имеют ясный физический смысл. Условие (3a) связано с существованием у реальных жидкостей предельных «ньютоновских» вязкостей, (3b) есть выражение закона о том, что сдвиговые напряжения растут вместе с ростом скоростей деформаций (см. [1, гл. 2, § 2]). Здесь и ниже точка над символом обозначает дифференцирование по s.

Полагая $\psi(s) = \phi(s) - m$ в уравнении движения (1), можно выделить оператор Лапласа Δu. Такое представление использовалось в [2].

Решением (сильным) задачи (1), (2) называют пару функций $u(x,t)$, $p_*(x,t)$, имеющих все входящие в уравнение (обобщенные) производные из $L_2(Q_T)$ и удовлетворяющие уравнению (1) и краевым условиям (2). В предположениях, что $\partial\Omega$ класса $C^{(2)}$, $f \in L_2(Q_T, R^2)$, $a \in \mathring{W}_2^1(\Omega, R^2)$ и $\operatorname{div} a = 0$, в [2] доказано существование сильного решения задачи (1), (2), причем единственного.

Введем обозначения, необходимые для определения слабого решения. Пусть $L_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ — пространство квадратично суммируемых векторных функций $u : \Omega \to \mathbb{R}^2$ со скалярным произведением и нормой соответственно

$$(u,v) = \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{2} u_k v_k \, dx, \quad \|u\| = (u,u)^{1/2}.$$

Обозначим через H замыкание пространства гладких финитных соленоидальных векторных полей (см., например, [5]) по норме $\|\,\|$, а через V — по норме $\|\,\|_1$, порождаемой скалярным произведением

$$(u,v)_1 = \sum_{k,j=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx.$$

Значение функционала $f \in V^*$ на элементе $v \in V$ будем обозначать через $\langle f, v\rangle$. Как известно, справедливо непрерывное вложение $V \subset H \subset V^*$, так что $\langle f, v\rangle = (f,v)$ для $f \in H$, $v \in V$.

Ниже в работе ограничимся для простоты случаем, когда неоднородность f в правой части уравнения (1) принадлежит пространству $L_2([0,T], H)$. Зададим формы b и g соотношениями

$$b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_{\Omega} u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_i \, dx \quad (u,v,w \in V), \tag{4}$$

$$g(u,v) = 2 \sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \phi(I_2(u)) \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) \, dx \quad (u,v \in V). \tag{5}$$

Задача об обобщенном (слабом) решении для системы (1), (2) может быть сформулирована в следующем виде. *Для заданных функций $f \in L_2([0,T], H)$ и $a \in H$ ищется функция $u \in L_2([0,T], V)$ такая, что $u' \in L_2([0,T], V^*)$ и*

$$\langle u', v\rangle + \nu \cdot g(u,v) + b(u,u,v) = (f,v) \quad (\forall v \in V), \tag{6}$$

$$u|_{t=0} = a. \tag{7}$$

При рассмотрении обобщенных решений достаточно предполагать липшицевость границы области $\partial\Omega$ (см. [1, 11]). Отметим известное (см., например, [11]) свойство трилинейной формы b:

$$b(u,v,v) = 0 \quad (\forall u, v \in V). \tag{8}$$

Кроме того, в силу (3) и согласно [1, 2] найдутся такие положительные постоянные L и γ, что

$$\gamma \|u - v\|_1^2 \le g(u, u-v) - g(v, u-v) \le L\|u - v\|_1^2 \quad (\forall u, v \in V). \tag{9}$$

В [1, гл. IV, § 6] показано, что в случае липшицевости границы области для всех $a \in H$, $f \in L_2([0,T], H)$ при выполнении условий (3) задача (6), (7) имеет решение, причем единственное.

2. Нестационарная задача о движении нелинейно-вязкой жидкости в приближении Стокса. Случай малой вязкости

В этом разделе предполагается, что Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с липшицевой границей $\partial\Omega$. Уравнения движения и несжимаемости в рассматриваемом случае имеют вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \nu \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}[2\phi(I_2(u))\varepsilon_{ij}] = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2,\ x, t \in Q_T), \tag{10}$$

$$\operatorname{div} u = 0\ (x, t \in Q_T), \quad u|_{s_T} = 0\ (s_T = [0, T] \times \partial\Omega), \quad u|_{t=0} = a(x)\ (x \in \overline{\Omega}). \tag{11}$$

Обобщенная постановка задачи (10), (11) выглядит так. *Для заданных функций $f \in L_2([0, T], H)$ и $a \in H$ найти функцию*

$$u \in L_2([0, T], V), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L_2([0, T], V^*),$$

такую, что

$$\left\langle \frac{du}{dt}, h \right\rangle + \nu g(u, h) = (f, h) \quad (\forall h \in V), \tag{12}$$

$$u(0) = a. \tag{13}$$

В [1, гл. IV, § 2] доказана однозначная разрешимость задачи (12), (13) при выполнении условий (3).

Исследуем вопрос о поведении решений u^ν задачи (12), (13) при $\nu \to 0$. Для этого рассмотрим вырожденную задачу (см. [6, гл. IV, § 5]): *для заданных функций $f \in L_2([0, T], H)$ и $a \in H$ ищется функция $v \in L_2([0, T], H)$, $v' \in L_2([0, T], H)$ такая, что при почти всех $t \in [0, T]$ выполнены соотношения*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f - \operatorname{grad} p, \tag{14}$$

$$v|_{t=0} = a(x). \tag{15}$$

Заметим, что условие $v \in H$ в силу теорем 1.2–1.4 из [11, гл. 1, § 1] по существу означает, что $\operatorname{div} v = 0$ (в смысле теории распределений) и $v \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$ (в смысле теоремы о следах), где n — вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$.

Обозначим через P ортопроектор $L_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ на H. Тогда задача (14), (15) перепишется в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Pf, \quad v|_{t=0} = a(x) \quad (v \in H). \tag{16}$$

Поэтому [6, гл. IV, § 5] справедлива формула

$$v(x, t) = a(x) + \int_0^t Pf(x, \tau)\, d\tau. \tag{17}$$

Лемма 2.1. *Пусть $a \in V$, $Pf \in L_2([0, T], V)$ при п. в. $t \in [0, T]$. Тогда $v(t) \in V$ при $t \in [0, T]$, т. е.*

$$v(\cdot) \in W_2^1(\Omega, \mathbb{R}^2), \quad \operatorname{div} v(\cdot) = 0, \quad v(\cdot)|_{\partial\Omega} = 0.$$

Это утверждение вытекает из представления (17) с учетом того, что в условиях леммы интеграл, стоящий в правой части (17), при всех $t \in [0, T]$ принадлежит пространству V.

Теорема 2.1. *Пусть $a \in V$, $Pf(t) \in L_2([0,T],V)$ и выполнены условия (3). Тогда решения u^ν задач (12), (13) при $\nu \to 0$ равномерно по $t \in [0,T]$ сходятся к решению v^0 задачи (14), (15) по норме $L_2(\Omega,\mathbb{R}^2)$ и справедлива оценка*

$$\max_{t\in[0,T]} \|u^\nu - v^0\| \le c_0\sqrt{\nu}, \tag{18}$$

где постоянная c_0 не зависит от $\nu > 0$ и задается равенством

$$c_0 = c(v^0) := \left(\frac{M^2}{m}\int\limits_{Q_T}\sum_{i,j=1}^{2}\varepsilon_{ij}^2(v^0)\,dxdt\right)^{1/2}.$$

Доказательство. Положим $\psi = u^\nu - v^0$. Подставляя $u^\nu = v^0 + \psi$ в (12) и используя (14), получим

$$\left\langle \frac{d\psi}{dt}, h\right\rangle + \nu g(u^\nu, h) = 0 \quad (\forall h \in V). \tag{19}$$

Согласно лемме 2.1 $\psi(t) \in V$ при любом $t \in [0,T]$. Поэтому из (19) при $h = \psi(t)$ следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\psi\|^2) + \frac{1}{2}\nu\int\limits_\Omega \phi(I_2(u^\nu))\sum_{i,j=1}^{2}\varepsilon_{ij}^2(\psi(t))\,dx = -\frac{1}{2}\nu\int\limits_\Omega \phi(I_2(u^\nu))\sum_{i,j=1}^{2}\varepsilon_{ij}(v^0)\varepsilon_{ij}(\psi(t))\,dx.$$

Тогда в силу свойства ($3a$) имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\psi\|^2) + \frac{1}{2}m\nu\sum_{i,j=1}^{2}\int\limits_\Omega \varepsilon_{ij}^2(\psi)\,dx \le \frac{1}{2}\nu M\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^{2}|\varepsilon_{ij}(v^0)||\varepsilon_{ij}(\psi)|\,dx$$
$$\le \frac{1}{2}\nu M\left(k\sum_{i,j=1}^{2}\int\limits_\Omega \varepsilon_{ij}^2(\psi)\,dx + \frac{1}{k}\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^{2}\varepsilon_{ij}^2(v^0)\,dx\right) \quad (\forall k > 0).$$

Выбирая $k = \frac{m}{M}$, найдем

$$\frac{d}{dt}(\|\psi\|^2) \le \nu\frac{M^2}{m}\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^{2}\varepsilon_{ij}^2(v^0)\,dx := \nu\xi(v^0).$$

Поскольку $\psi(0) = 0$, отсюда

$$\|\psi(t)\|^2 \le \nu\int\limits_0^t \xi(v^0)\,ds,$$

что влечет оценку (18).

Отметим, что при доказательстве оценки (18) использовано только условие ($3a$). Асимптотика порядка $\sqrt{\nu}$ указана в [6], где рассмотрено асимптотическое представление решения задачи о движении тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью при больших числах Рейнольдса в поле потенциальных сил. Фактически эта задача типа (10), (11) при $\phi \equiv \mathrm{const}$ и $f \equiv 0$.

Изучим вопрос о сходимости u^ν к v^0 без предположений леммы 2.1 (влекущих условие $v^0|_{\partial\Omega=0}$). Для этого потребуются следующие утверждения.

Лемма 2.2. *Решения задачи* (12), (13) *непрерывно зависят от начальных условий и правых частей в норме пространства* $L_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$, *при этом справедлива оценка*

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leq \|a - \tilde{a}\| + \int\limits_0^t \|f(s) - \tilde{f}(s)\|\,ds. \tag{20}$$

Здесь u — *решение задачи* (12), (13), *а* $\tilde{u}$ — *решение той же задачи при* $a = \tilde{a}$ *и* $f = \tilde{f}$.

Доказательство. По определению u и $\tilde{u}$ имеем

$$\left\langle \frac{d}{dt}(u - \tilde{u}), h \right\rangle + \nu g(u, h) - \nu g(\tilde{u}, h) = (f - \tilde{f}, h) \quad (\forall h \in V).$$

Полагая $h = u - \tilde{u}$ и используя монотонность формы g (см. (9)), получим неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u - \tilde{u}\|^2) + \gamma\|u - \tilde{u}\|_1^2 \leq \|f - \tilde{f}\|\|u - \tilde{u}\|. \tag{21}$$

Из (21) для абсолютно непрерывной функции $\|u(t) - \tilde{u}(t)\| := \eta(t)$ при п. в. $t \in [0, T]$ следует

$$\eta(t) \cdot \frac{d\eta}{dt} \leq \|f - \tilde{f}\|\eta(t).$$

Рассматривая отдельно случай $\eta(t) = 0$ и $\frac{d\eta}{dt} \leq \|f - \tilde{f}\|$ (при $\eta(t) \neq 0$), аналогично [5, с. 113] получим (20).

Замечание 2.1. Из (20) следует непрерывная зависимость решений задачи (12), (13) от a и f в норме пространства $L_2([0, T], H)$.

Лемма 2.3. *Решения вырожденной задачи* (14), (15) *непрерывно зависят от правых частей и начальных условий в норме пространства* $L_2(\Omega, R^2)$, *и справедлива оценка*

$$\|v(t) - \tilde{v}(t)\| \leq \|a - \tilde{a}\| + \int\limits_0^T \|f(s) - \tilde{f}(s)\|\,ds. \tag{22}$$

Здесь v — *решение задачи* (14), (15), *а* $\tilde{v}$ — *решение той же задачи при* $a = \tilde{a}$ *и* $f = \tilde{f}$.

Действительно, по определению v и $\tilde{v}$ имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|v - \tilde{v}\|^2) = (f - \tilde{f}, v - \tilde{v}),$$

отсюда следует оценка

$$\|v(t) - \tilde{v}(t)\| \leq \|a - \tilde{a}\| + \int\limits_0^t \|f(s) - \tilde{f}(s)\|\,ds,$$

а из нее — (22).

Рассмотрим автономный случай, когда массовая сила f не зависит от времени.

Теорема 2.2. *Пусть $a \in V$, $f \in H$ и выполнены условия* (3) *на функцию* ϕ. *Тогда семейство u^ν решений задач* (12), (13) *при $\nu \to 0$ равномерно на $t \in [0, T]$ сходится к решению v^0 задачи* (14), (15) *по норме $L_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$.*

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ и функцию $f^\delta \in V$ так, что

$$\|f - f^\delta\| < \frac{\varepsilon}{3T}.$$

Зафиксируем это δ. Пусть v^δ — решение вырожденной задачи (14), (15), соответствующее f^δ. Подберем $\nu > 0$ так, что

$$\left(\nu \frac{M^2}{m} \int\limits_{Q_T} \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij}^2(v^\delta)\, dx dt\right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда в силу оценок (18), (20), (22) для любого $t \in [0, T]$ имеем

$$\|u^\nu - v^0\| \le \|u^\nu - u^{\nu,\delta}\| + \|u^{\nu,\delta} - v^\delta\| + \|v^\delta - v^0\| < \varepsilon.$$

Здесь $u^{\nu,\delta}$ — решение задачи (12), (13), где в качестве f берется f^δ.

Последнее соотношение влечет высказанное предложение.

Несмотря на кажущуюся простоту, результат теоремы 2.2 нетривиален. Так, например, в [5, гл. IV, § 5] для случая ньютоновской жидкости установлена лишь слабая сходимость u^ν к v^0 в пространстве $L_2(Q_T)$.

Замечание 2.2. Результат теоремы 2.2 остается в силе, когда неоднородность f принадлежит $L_2([0, T], H)$.

Действительно, такая функция с любой степенью точности и равномерно по $t \in [0, T]$ может быть аппроксимирована измеримой простой функцией, принимающей не более чем счетное число значений h_n из H (см., например, [12, гл. V, § 4]). В свою очередь, каждое h_n ($n = 1, 2, \dots$) можно сколь угодно точно аппроксимировать элементами из V. Таким образом, для заданного $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta > 0$ и функцию $f^\delta \in L_2([0, T], V)$ так, что

$$\sup_{t \in [0,T]} \|f - f^\delta\| < \frac{\varepsilon}{3T}.$$

Это влечет высказанное предложение.

Аналогично доказывается утверждение, когда $a \in H$. В этом случае и его следует приближенно заменить элементами $a^\delta \in V$.

Как известно, при малой вязкости возникает пограничный слой по пространственной переменной (см., например, [13, гл. IX]), так что в узкой полосе вблизи границы решение быстро изменяется. Тем не менее, теорема 2.2 показывает, что $u^\nu \to v^0$ при $\nu \to 0$ по норме пространства квадратично суммируемых функций $L_2(Q_T)$.

Результаты этого раздела, установленные для двумерной задачи, справедливы также и в трехмерном случае.

3. Нестационарная задача о движении нелинейно-вязкой жидкости при учете инерциальных сил. Случай большой вязкости

Обратимся к задаче (1), (2), точнее, к обобщенной задаче (6), (7). В этом разделе будем считать, что область Ω, в которой рассматривается задача (6), (7), имеет липшицеву границу. Рассмотрим случай большой вязкости. Как известно, в этом случае возникает пограничный слой по времени (см., например, [13, гл. VIII]).

Лемма 3.1. *Пусть* $a \in H$, $f \in L_\infty([0,T],H)$, *а* $\delta > 0$ — *произвольная, но фиксированная постоянная. При выполнении условия* (3*a*) *обобщенное решение* $u : [0,T] \to V$ *задачи* (6), (7) *удовлетворяет оценкам*

$$\|u(t)\| \le e^{-\nu\kappa t}\|a\| + \frac{1}{\nu\kappa}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]}\|f(t)\| \quad (\forall t \in [0,T]), \tag{23}$$

$$\int\limits_0^T \|u\|_1^2\,dt \le \frac{c}{\nu}, \tag{24}$$

где $\kappa, c > 0$ — *некоторые постоянные, не зависящие от* $\nu \in [\delta, \infty)$.

Действительно, полагая в (6) $v = u$ и используя свойство (8) и условие (3a), получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u\|^2) + \nu m \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{ij}^2(u)\,dx \le \|f\|\|u\|.$$

Отсюда по неравенству Корна (поскольку выполнены однородные условия Дирихле) можем записать

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u\|^2) + \frac{1}{2}\nu m\|u\|_1^2 \le \|f\|\|u\|. \tag{25}$$

Пусть λ_1 — первое собственное значение оператора Стокса, для которого выполнено соотношение $\|v\|_1^2 \ge \lambda_1\|v\|^2$ $(\forall v \in V)$. Тогда из (25) при $\kappa = \frac{1}{2}m\lambda_1$ получим

$$\frac{d}{dt}(\|u\|) + \nu\kappa\|u\| \le \|f\|.$$

Здесь в случае $\|u(t)\| = 0$ в левой части неравенства следует понимать производную от $\|u(t)\|$ как правостороннюю. Отсюда по теореме о дифференциальных неравенствах и следует оценка (23). В частности, имеем

$$\max_{t\in[0,T]}\|u(t)\| \le \|a\| + \frac{1}{\nu\kappa}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]}\|f(t)\|. \tag{26}$$

Интегрируя (25) по t от 0 до T и используя (26), установим, что для некоторой постоянной $c > 0$ справедлива оценка (24).

Замечание 3.1. Оценки вида (23), (24) справедливы и для квазилинейной задачи (12), (13).

Рассмотрим поведение решений u^ν задачи (6) (7) при $\nu \to +\infty$. Разделим (6) на $\nu > 0$. Устремляя $\nu \to +\infty$, формально получим

$$g(u^\infty, v) = 0 \quad (v \in V). \tag{27}$$

Решением этого уравнения, причем единственным, в силу монотонности (9) формы g является $u^\infty = 0$. Однако при этом не выполнено (вообще говоря) условие (7) при $t = 0$.

Чтобы учесть поведение решения вблизи $t = 0$, рассмотрим задачу

$$\left\langle \frac{\partial w}{\partial t}, v \right\rangle + \nu g(w,v) = 0 \quad (t \in (0,T),\ v \in V), \tag{28}$$

$$w|_{t=0} = a. \tag{29}$$

Это задача вида (12), (13) при $f = 0$. Аналогично (23), (24) получаются оценки

$$\|w(t)\| \le e^{-\nu\kappa t}\|a\|, \quad \int\limits_0^T \|w\|_1^2\,dt \le \frac{c}{\nu}. \tag{30}$$

Теорема 3.1. *Пусть $a \in H$, $f \in L_\infty([0,T],H)$ и выполнены условия (3). Тогда при достаточно больших $\nu > 0$ решения u^ν задачи (6), (7) близки равномерно по $t \in [0,T]$ в норме $L_2(\Omega,\mathbb{R}^2)$ к решениям w^ν задачи (28), (29) и справедлива оценка*

$$\max_{t\in[0,T]} \|u^\nu(t) - w^\nu(t)\| \le \frac{c}{\nu} \tag{31}$$

с некоторой постоянной $c > 0$, не зависящей от ν.

Доказательство. Полагая $\psi = u^\nu - w^\nu$ и вычитая (28) из (6), при $v = \psi$ получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\psi\|^2) + \nu g(u^\nu,\psi) - \nu g(w^\nu,\psi) + b(u^\nu,u^\nu,\psi) = (f,\psi).$$

Воспользовавшись монотонностью (9) формы g, отсюда выводим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\psi\|^2) + \nu\gamma\|\psi\|_1^2 \le \|f\|\|\psi\| + |b(u^\nu,u^\nu,\psi)|. \tag{32}$$

При этом согласно [11] и в силу (23)

$$|b(u^\nu,u^\nu,\psi)| \le \sqrt{2}\|u^\nu\|\|u^\nu\|_1\|\psi\|_1 \le c\|u^\nu\|_1\|\psi\|_1$$

для некоторой постоянной $c > 0$. Тогда из (32) следует

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\|\psi\|^2) + \nu\gamma\|\psi\|_1^2 &\le 2\|f\|\|\psi\| - \nu\gamma\|\psi\|_1^2 + 2c\|u^\nu\|_1\|\psi\|_1 \\ &\le 2\|f\|\|\psi\| - \nu\gamma\left(\|\psi\|_1 - \frac{c}{\nu\gamma}\|u^\nu\|_1\right)^2 + \frac{c^2}{\nu\gamma}\|u^\nu\|_1^2.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}(\|\psi\|^2) + \nu\gamma\|\psi\|_1^2 \le 2\|f\|\|\psi\| + \frac{c^2}{\nu\gamma}\|u^\nu\|_1^2$$

и при $\kappa = \lambda_1\gamma$ можем записать

$$\frac{d}{dt}(\|\psi\|^2) + \nu\kappa\|\psi\|^2 \le 2\|f\|\|\psi\| + \frac{c^2}{\nu\gamma}\|u^\nu\|_1^2.$$

Оценим $\|f\|\|\psi\|$ посредством неравенства Юнга (см., например, [5, гл. 1, § 1]):

$$\|\psi\|\|f\| \le \frac{1}{2}\frac{\nu\kappa}{2}\|\psi\|^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{\nu\kappa}\|f\|^2.$$

Тогда при п. в. $t \in [0,T]$ получим

$$\frac{d}{dt}(\|\psi\|^2) + \frac{\nu\kappa}{2}\|\psi\|^2 \le \frac{2}{\nu\kappa}\|f\|^2 + \frac{c^2}{\nu\gamma}\|u^\nu\|_1^2. \tag{33}$$

По теореме о дифференциальных неравенствах при $\beta = \kappa/2$ с учетом условия $\psi(0) = 0$ неравенство (33) влечет соотношение

$$\|\psi(t)\|^2 \le \frac{1}{\nu\beta}\int_0^t e^{-\nu\beta(t-s)}\|f(s)\|^2 ds + \frac{c^2}{\nu\gamma}\int_0^t e^{-\nu\beta(t-s)}\|u^\nu(s)\|_1^2\, ds.$$

В силу (24) для некоторой новой постоянной $c > 0$ отсюда следует, что

$$\|\psi(t)\|^2 \le \frac{1}{\nu\beta}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]}\|f(t)\|^2\int_0^t e^{-\nu\beta(t-s)}ds + \frac{c}{\nu^2\gamma} \le \frac{1}{\nu^2}\left(\frac{1}{\beta^2}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]}\|f(t)\|^2 + \frac{c}{\gamma}\right).$$

Последняя оценка влечет (31).

Задача типа (28), (29) (в случае $\phi \equiv \mathrm{const}$) использована, например, в [10] для построения асимптотического разложения решения задачи о движении тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса. Значимость теоремы 3.1 состоит в том, что она дает обоснование данного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Литвинов В. Г.* Движение нелинейно-вязкой жидкости. М.: Наука, 1982.

2. *Соболевский П. Е.* Существование решений математической модели нелинейно-вязкой жидкости // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285, № 1. С. 44–48.

3. *Litvinov W. G.* Model for laminar and turbulent flows of viscous and nonlinear viscous non-Newtonian fluids // J. Math. Phys. 2011. V. 52. P. 053102.

4. *Agranovich Yu. Ya., Khatskevich V. L.* Mathematical modeling of nonlinearly viscous fluid motion: strong solutions // Autom. Remote Control. 2012. V. 73, N 1. P. 171–180.

5. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.

6. *Черноусько Ф. Л.* Движение тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью при больших числах Рейнольдса // Прикл. математика и механика. 1966. Т. 30, № 3. С. 476–494.

7. *Бабенко К. И.* Теория возмущенного стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227, № 3. С. 44–48.

8. *Хацкевич В. Л.* Об исчезающей вязкости в начально-краевой задаче для уравнения Навье — Стокса // Докл. АН. 1996. Т. 347, № 2. С. 168–170.

9. *Хацкевич В. Л.* Об асимптотическом представлении решения начально-краевой задачи системы уравнений Навье — Стокса в случае большой вязкости // Докл. АН. 1998. Т. 362, № 6. С. 773–775.

10. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5, № 6. С. 1049–1070.

11. *Темам Р.* Уравнения Навье — Стокса. М.: Мир, 1981.

12. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 2004.

13. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003.

Статья поступила 19 апреля 2016 г.

Хацкевич Владимир Львович
Военно-воздушная академия
имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина,
кафедра математики,
ул. Маршала Неделина, 133, Воронеж 394052
vlkhats@mail.ru