Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2017. Том 58, № 3

УДК 512.542

ХАРАКТЕРИЗУЮЩЕЕ СВОЙСТВО CP–ГРУПП

А. А. Бутурлакин, Ж. Шэнь, В. Ши

Аннотация. Пусть G — конечная группа. Показано, что если для каждого простого числа p количество неединичных p-элементов группы G делится на p'-часть числа $|G|$, то все порядки элементов в этой группе являются степенями простых чисел.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.304

Ключевые слова: конечная группа, CP-группа, p-элемент.

Периодическая группа называется CP-*группой*, если порядок любого ее элемента является степенью простого числа. Примерами CP-групп являются p-группы, группы Тарского, бипримарные группы Фробениуса и др.

Впервые конечные CP-группы были исследованы Хигманом в 1957 г. [1]. Он показал, что конечная разрешимая CP-группа является полупрямым произведением подгруппы Фиттинга, очевидно, являющейся p-группой, и дополнения, которое действует на подгруппе Фиттинга свободно. Более того, порядок конечной разрешимой CP-группы делится не более чем на два различных простых числа. В этой же статье Хигман изучил структуру конечных неразрешимых CP-групп и показал, что такие группы имеют неабелеву простую секцию, которая во многом определяет их структуру. В своей знаменитой работе [2] Сузуки описал все конечные простые CP-группы, показав, что существует только восемь конечных неабелевых простых CP-групп. Брандл [3], а также Ши и Ян [4] продолжили эти исследования, классифицировав конечные неразрешимые CP-группы. Кроме того, в [5–7] были классифицированы все конечные группы, в которых порядок любого неединичного элемента является простым числом.

Для натуральных чисел n и m через $n_{m'}$ обозначим m'-часть числа n, т. е. наибольший делитель числа n, взаимно простой с m, а через $\pi(n)$ — множество простых делителей числа n. Если X — множество, то 2^X и $|X|$ — множество всех подмножеств множества X и мощность X соответственно. Обозначим через $\#_p(G)$ количество неединичных p-элементов конечной группы G.

Если G — конечная CP-группа и n — порядок некоторого элемента группы G, больший единицы, то несложно показать, что количество элементов порядка n в G делится на $|G|_{n'}$ (см., например, [4]). Ши поставил вопрос: верно ли обратное утверждение (см. [8, вопрос 18.112]).

Мы покажем, что утвердительный ответ на этот вопрос (и даже немного более сильное утверждение) можно получить, используя теорему 3 из [9].

Работа второго автора поддержана ГФЕН (проект 11561021), работа третьего автора поддержана ГФЕН (проект 11671063) и Фондом инноваций Чунцина (KJTD201321).

Теорема. *Пусть конечная группа G такова, что для любого простого числа p число $\#_p(G)$ делится на $|G|_{p'}$. Тогда G является* CP*-группой.*

Лемма 1 [9, теорема 3]. *В группе порядка a число элементов, порядок которых кратен x, кратно $a_{x'}$.*

Лемма 2. *Пусть X — конечное множество и n — натуральное число, имеющее не менее двух различных простых делителей. Предположим, что задано отображение φ из $\pi(n)$ в 2^X, удовлетворяющее следующим условиям:*

(1) *для каждого неединичного свободного от квадратов делителя d числа n число $n_{d'}$ делит $\big|\bigcap\limits_{p\in\pi(d)} p\varphi\big|$;*

(2) *для любого $p \in \pi(n)$ число $n_{p'}$ делит $\big|p\varphi \cap \big(\bigcup\limits_{q\in\pi(n),\, q\neq p} q\varphi\big)\big|$.*

Тогда n делит $\big|\bigcup\limits_{p,q\in\pi(n),\, p\neq q} (p\varphi \cap q\varphi)\big|$.

Доказательство проведем индукцией по $|\pi(n)|$. Сначала предположим, что у n ровно два различных простых делителя p и q. Из условия (2) следует, что число $|p\varphi \cap q\varphi|$ делится на $n_{p'}$ и $n_{q'}$, поэтому $|p\varphi \cap q\varphi|$ делится на n, что и требуется.

Предположим, что $|\pi(n)| \geqslant 3$, и пусть r — некоторый элемент множества $\pi(n)$. Отображение φ индуцирует отображение из $\pi(n) \setminus \{r\}$ в $X \setminus r\varphi$ по правилу:

$$p \in \pi(n) \setminus \{r\} \text{ отображается в } p\varphi \setminus r\varphi.$$

Покажем, что множество $X \setminus r\varphi$ и число $n_{r'}$ вместе с индуцированным отображением удовлетворяют условиям леммы.

Рассмотрим условие (1). Пусть d — неединичный делитель числа $n_{r'}$. Имеем

$$\bigcap_{p\in\pi(d)} (p\varphi \setminus r\varphi) = \Big(\bigcap_{p\in\pi(d)} p\varphi\Big) \setminus r\varphi = \Big(\bigcap_{p\in\pi(d)} p\varphi\Big) \setminus \Big(r\varphi \cap \bigcap_{p\in\pi(d)} p\varphi\Big)$$
$$= \Big(\bigcap_{p\in\pi(d)} p\varphi\Big) \setminus \Big(\bigcap_{p\in\pi(dr)} p\varphi\Big).$$

Из свойства (1) и последнего равенства получаем, что мощность множества $\bigcap\limits_{p\in\pi(d)} (p\varphi \setminus r\varphi)$ делится на $n_{(rd)'} = (n_{r'})_{d'}$, что и требовалось показать.

Рассмотрим условие (2). Пусть $p \in \pi(n)$ и $p \neq r$. Необходимо показать, что число $n_{(pr)'}$ делит $\big|(p\varphi\setminus r\varphi)\cap\big(\bigcup\limits_{q\in\pi(n),\, q\neq p} q\varphi\setminus r\varphi\big)\big|$. Поскольку $A = (A\setminus B)\cup(A\cap B)$ для произвольных множеств A и B и $n_{(pr)'}$ делит $p\varphi \setminus r\varphi$, достаточно показать, что $n_{(pr)'}$ делит $\big|(p\varphi \setminus r\varphi) \setminus \big(\bigcup\limits_{q\in\pi(n),\, q\neq p} q\varphi \setminus r\varphi\big)\big|$. Имеем

$$(p\varphi \setminus r\varphi) \setminus \Big(\bigcup_{\substack{q\in\pi(n),\\ q\neq p}} q\varphi \setminus r\varphi\Big) = p\varphi \setminus \Big(\bigcup_{\substack{q\in\pi(n),\\ q\neq p}} q\varphi\Big).$$

Мощность последнего множества делится на $n_{p'}$ ввиду условия (2) и того, что мощность множества $p\varphi$ также делится на $n_{p'}$. Следовательно, по предположению индукции $n_{r'}$ делит мощность множества $\bigcup\limits_{p,q\in\pi(n_{r'}),\, p\neq q} (p\varphi \setminus r\varphi) \cap (q\varphi \setminus r\varphi)$.

Теперь

$$\bigcup_{\substack{p,q\in\pi(n),\\ p\neq q}}(p\varphi\cap q\varphi)=\Big(\bigcup_{\substack{p,q\in\pi(n_{r'}),\\ p\neq q}}(p\varphi\setminus r\varphi)\cap(q\varphi\setminus r\varphi)\Big)\cup\Big(r\varphi\cap\Big(\bigcup_{\substack{q\in\pi(n),\\ q\neq r}}q\varphi\Big)\Big).$$

Заключаем, что $\Big|\bigcup_{p,q\in\pi(n),\,p\neq q}(p\varphi\cap q\varphi)\Big|$ делится на $n_{r'}$ для любого $r\in\pi(n)$, а следовательно, делится на n. □

Доказательство теоремы. В формулировке леммы 2 положим $X=G$, $n=|G|$, и пусть φ отображает $p\in\pi(n)$ в множество элементов группы G, порядок которых делится на p. По определению если d — свободный от квадратов делитель числа n, то $\bigcap_{p\in\pi(d)}p\varphi$ — множество элементов, порядок которых делится на d. Таким образом, выполнение условия (1) следует из леммы 1. Множество $p\varphi\cap\big(\bigcup_{q\in\pi(n),\,q\neq p}q\varphi\big)$ состоит из всех элементов, порядок которых делится на p и некоторое другое простое число q. Поскольку число p-элементов и число элементов порядка, кратного p, делятся на $|G|_{p'}$, условие (2) выполнено. Таким образом, мощность множества $\bigcup_{p,q\in\pi(n),\,p\neq q}(p\varphi\cap q\varphi)$ (состоящего из элементов, порядок которых делится как минимум на два различных простых числа) делится на $|G|$ и, следовательно, равна нулю. □

Периодическая группа называется *C_{pp}-группой*, если централизатор любого p-элемента является p-группой. В этих терминах группа является CP-группой, если она является C_{pp}-группой для любого простого делителя ее порядка. Вышеуказанная теорема дает характеризацию CP-групп в терминах количеств элементов и порядков подгрупп. Интересным представляется вопрос о существовании похожей характеризации конечных C_{pp}-групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Higman G.* Finite groups in which every element has prime power order // J. London Math. Soc. 1957. V. 32. P. 335–342.
2. *Suzuki M.* On a class of doubly transitive groups // Ann. Math. 1962. V. 75. P. 105–145.
3. *Brandl R.* Finite groups all of whose elements are of prime power order // Boll. Un. Mat. Ital., A. 1981. V. 18, N 5. P. 491–493.
4. *Shi W., Yang W.* The finite groups all of whose elements are of prime power order // J. Yunnan Educational College, Ser. B. 1986. V. 1. P. 2–10. (Chinese).
5. *Shi W., Yang W.* A new characterization of A_5 and the finite groups in which every nonidentity element has prime order // J. Southwest-China Teachers' College, Ser. B. 1984. V. 1. P. 36–40. (Chinese).
6. *Deaconescu M.* Classification of finite groups with all elements of prime order // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. V. 106. P. 625–629.
7. *Kai Nah C., Deaconescu M., Lung L. M., Shi W.* Corrigendum and addendum to "Classification of finite groups with all elements of prime order" // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. V. 117, N 4. P. 1205–1207.
8. *Коуровская тетрадь.* Нерешенные вопросы теории групп (под ред. В. Д. Мазурова, Е. И. Хухро). 18-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2014.
9. *Weisner L.* On the number of elements of a group which have a power in a given conjugate

set // Bull. Amer. Math. Soc. 1925. V. 31. P. 492–496.

Статья поступила 23 июня 2016 г.

Бутурлакин Александр Александрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
buturlakin@math.nsc.ru

Shen Rulin (Шэнь Жулинь)
Department of Mathematics, Hubei University for Nationalities,
Enshi, Hubei Province, 445000, P.R.China
rshen@hbmy.edu.cn

Shi Wujie (Ши Вуджи)
Department of Mathematics, Chongqing University of Arts and Sciences,
Yongchuan, Chongqing, 402160, P.R.China
wjshi@suda.edu.cn