Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2017. Том 58, № 3

УДК 512.54

АЛГЕБРАИЧЕСКИ И ВЕРБАЛЬНО ЗАМКНУТЫЕ ПОДГРУППЫ И РЕТРАКТЫ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

В. А. Романьков, Н. Г. Хисамиев, А. А. Конырханова

Аннотация. Изучаются алгебраически и вербально замкнутые подгруппы и ретракты конечно порожденных нильпотентных групп. Особое внимание уделено свободным нильпотентным группам и группам $\mathrm{UT}_n(\mathbb{Z})$ унитреугольных $(n \times n)$-матриц над кольцом $\mathbb{Z}$ целых чисел для произвольного n. Замечено, что множества ретрактов конечно порожденных нильпотентных групп совпадают с множествами их алгебраически замкнутых подгрупп. Приведен пример, показывающий, что вербально замкнутая подгруппа конечно порожденной нильпотентной группы может не быть ретрактом (в рассматриваемом случае равносильно: алгебраически замкнутой подгруппой). Другой пример показывает, что пересечение ретрактов (алгебраически замкнутых подгрупп) свободной нильпотентной группы может не быть ретрактом (алгебраически замкнутой подгруппой) этой группы. Установлены необходимые условия, выполненные на ретрактах произвольных конечно порожденных нильпотентных групп. Получены достаточные условия для свойства «быть ретрактом» конечно порожденной нильпотентной группы. Представлен алгоритм, определяющий свойство «быть ретрактом» для подгруппы свободной нильпотентной группы конечного ранга (решение проблемы Мясникова). Также получен общий результат об экзистенциально замкнутых подгруппах конечно порожденных нильпотентных групп без кручения с циклическим центром, из которого следует, в частности, что при любом n группа $\mathrm{UT}_n(\mathbb{Z})$ не содержит собственных экзистенциально замкнутых подгрупп.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.316

Ключевые слова: нильпотентная группа, ретракт, алгебраически (вербально) замкнутая подгруппа, группа целочисленных унитреугольных матриц.

1. Введение

Ретрактом группы G называется такая подгруппа $H \leq G$, для которой существует эндоморфизм $\varphi : G \to H$, тождественный на H (см., например, [1, гл. 1, разд. 1]).

Легко доказать, что подгруппа H является ретрактом группы G тогда и только тогда, когда существует нормальная подгруппа U группы G такая, что выполнены следующие условия:

$$G = H \cdot U = \{hu \mid h \in H,\ u \in U\}, \quad H \cap U = \{1\}. \tag{1}$$

Работа выполнена первым автором при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 16–11–10002), вторым автором — за счет гранта Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект № 3953 (GF4)).

Любой элемент g группы G однозначно записывается в виде hu, где $h = h(g) \in H$, $u = u(g) \in U$. *Ретракцией* $\rho : G \to H$ называется эндоморфизм $\rho : G \to H$, определенный как $\rho(g) = h(g)$, $g \in G$. Нормальная подгруппа U совпадает с ядром $\ker(\rho)$ эндоморфизма ρ и называется *ядром ретракции* ρ.

Очевидно, что прямые и свободные множители в группах являются их ретрактами. В абелевых группах прямые множители исчерпывают все множество ретрактов. В общем случае проблема описания всех ретрактов гораздо сложнее. В [2] доказано, что уже в классе конечно порожденных нильпотентных групп ступени нильпотентности два проблема определения, является ли подгруппа ретрактом, алгоритмически неразрешима. Тем самым решена проблема Мясникова N9(a) из [3]. В разд. 5 данной работы показано, что эта проблема для свободных нильпотентных групп решается положительно. А именно, существует алгоритм, определяющий, является ли подгруппа свободной нильпотентной группы конечного ранга ретрактом. Это решает проблему Мясникова N9(b) из [3].

Пусть F_n — свободная группа ранга n. При $n \geq 2$ группа F_n допускает ретракты, не являющиеся свободными множителями. Например, элемент вида $g = x_1u$ свободной группы F_n с базисом $x_1, \dots, x_n$, где u принадлежит нормальному замыканию элементов $x_2, \dots, x_n$, порождает циклический ретракт $H = \mathrm{gp}(g)$ относительно ретракции $\rho : F_n \to H$, определенной отображением $x_1 \mapsto g$, $x_j \mapsto 1$ для $j = 2, \dots, n$. Подгруппа $\mathrm{gp}(g)$ является свободным множителем группы F_n тогда и только тогда, когда g — примитивный элемент, т. е. элемент некоторого базиса группы F_n. В случае группы F_2 элемент указанного вида $g = x_1u$ при $u \in F_n'$ (через G' обозначается коммутант произвольной группы G) примитивен тогда и только тогда, когда он сопряжен с x_1. Это легко следует из классического результата Нильсена о том, что два элемента g, f свободной группы F_2, сравнимые с двумя элементами x_1, x_2 фиксированного базиса по модулю коммутанта группы F_2, составляют базис тогда и только тогда, когда они сопряжены с соответствующими элементами фиксированного базиса одним сопрягающим элементом. Если элемент g указанного вида не сопряжен с x_1, то он не примитивен, порожденный им ретракт $\mathrm{gp}(g)$ не является свободным множителем группы F_2.

В [4] доказано, что для любого n пересечение конечного множества ретрактов группы F_n снова является ретрактом. В то же время остался открытым вопрос 17.19 из [5], он же вопрос F11 из [3]: если G — подгруппа свободной группы F_n, H — ретракт группы F_n, то будет ли пересечение $H \cap G$ ретрактом группы G? В разд. 6 данной работы приведен пример двух ретрактов свободной нильпотентной группы, пересечение которых не является ретрактом ни во всей группе, ни в пересекаемых подгруппах.

Ретракты связаны с вербально и алгебраически замкнутыми подгруппами групп.

Пусть G — группа. Подгруппа $H \leq G$ называется *вербально замкнутой* в группе G, если для любого группового слова $w(x_1, \dots, x_n)$ от независимых переменных $x_1, \dots, x_n$ без констант и любого элемента $h \in H$ уравнение

$$w(x_1, \dots, x_n) = h \tag{2}$$

разрешимо в группе G тогда и только тогда, когда оно разрешимо в группе H. Уравнение вида (2) называется *расщепимым*, более точно, *расщепимым над подгруппой* H.

В [6] доказано, что множество вербально замкнутых подгрупп группы F_n совпадает с множеством ретрактов и множеством алгебраически замкнутых подгрупп группы F_n.

Напомним, что подгруппа H группы G называется *алгебраически замкнутой* в G тогда и только тогда, когда для любого набора групповых слов $w_i(x_1, \dots, x_t)$, $i = 1, \dots, m$, с константами из H от независимых переменных $x_1, \dots, x_n$ система уравнений

$$w_i(x_1, \dots, x_t) = 1, \quad i = 1, \dots, m, \tag{3}$$

имеет решение в группе G тогда и только тогда, когда она имеет решение в H.

Очевидно, что любой ретракт произвольной группы является алгебраически замкнутой подгруппой, тем более вербально замкнутой подгруппой этой группы. В [6] доказана следующая теорема, в частности, показывающая, что в классе конечно определенных групп любая конечно порожденная алгебраически замкнутая подгруппа является ретрактом.

Теорема 1 [6]. 1. *Пусть G — конечно определенная группа. Тогда любая конечно порожденная подгруппа $H \leq G$ алгебраически замкнута в G тогда и только тогда, когда H — ретракт группы G.*

2. *Пусть H — нётерова по уравнениям подгруппа группы G, причем G конечно порождена относительно H. При этих условиях H алгебраически замкнута в G тогда и только тогда, когда H является ретрактом в G.*

Напомним, что группа H называется *нётеровой по уравнениям*, если для любого натурального числа n любая система уравнений от n неизвестных с коэффициентами из H эквивалентна (т. е. имеет то же самое множество решений в H) некоторой своей конечной подсистеме. Группа G *конечно порождена относительно* своей подгруппы H, если G порождается некоторым конечным набором своих элементов и всеми элементами подгруппы H.

Так как любая конечно порожденная нильпотентная группа конечно определена, а любая ее подгруппа конечно порождена (см., например, [7]), в классе конечно порожденных нильпотентных групп свойства «быть алгебраически замкнутой подгруппой» и «быть ретрактом» равносильны.

Заметим, что в общем случае вербально замкнутая подгруппа конечно порожденной нильпотентной группы не обязана быть алгебраически замкнутой и ретрактом. Соответствующий пример приведен в разд. 6.

Подгруппа H *экзистенциально замкнута* в группе G, если любая конечная система уравнений и неравенств с константами из H, имеющая решение в G, имеет решение в H.

В [6] сформулирован вопрос об описании алгебраически, вербально и экзистенциально замкнутых подгрупп свободных нильпотентных групп произвольного конечного ранга любой ступени нильпотентности. Предполагалось прояснить связи между ретрактами, свободными множителями, алгебраически, вербально и экзистенциально замкнутыми подгруппами этих групп. Вопрос об описании вербально замкнутых подгрупп свободных нильпотентных групп конечного ранга сформулирован также в [8, вопрос 8.4].

В [9] дан исчерпывающий ответ на этот вопрос для алгебраически и вербально замкнутых подгрупп. Оказалось, что множества ретрактов свободной нильпотентной группы $N_{r,k}$ ранга $r \geq 1$ ступени нильпотентности $k \geq 1$ совпадают с множествами ее вербально замкнутых подгрупп, алгебраически замкнутых подгрупп, а также с множеством свободных множителей группы $N_{r,k}$ в многообразии $\mathcal{N}_k$ всех нильпотентных групп ступени нильпотентности не выше k.

Ясно, что экзистенциально замкнутыми подгруппами свободной нильпотентной группы конечного ранга могут быть только ее свободные множители относительно $\mathscr{N}_k$. Другими словами, если $N_{r,k}$ — свободная группа ранга r многообразия $\mathscr{N}_k$ всех нильпотентных групп ступени нильпотентности не выше, чем $k, k \in \mathbb{N}$, а N — ее экзистенциально замкнутая подгруппа, то существуют множество свободных порождающих $X_r = \{x_1, \ldots, x_r\}$ группы $N_{r,k}$ и число m, $1 \leq m \leq r$, такие, что группа N порождена элементами $x_1, \ldots, x_m$. В частности, $N \simeq N_{m,k}$ — свободная нильпотентная группа ранга m ступени нильпотентности k.

Однако это условие недостаточно для экзистенциальной замкнутости N в $N_{r,k}$. Очевидно, что при $k, r \geq 2$ циклический свободный множитель $N_{1,k}$ не экзистенциально замкнут в $N_{r,k}$. В [10] установлено, что подгруппа N свободной нильпотентной группы $N_{r,k}$ ранга $r \geq 3$ ступени нильпотентности $k \geq 3$ экзистенциально замкнута в $N_{r,k}$ тогда и только тогда, когда N является свободным множителем группы $N_{r,k}$ относительно многообразия $\mathscr{N}_k$ (следовательно, $N \simeq N_{m,k}$, $1 \leq m \leq r$) и, кроме того, выполняется неравенство $m \geq k-1$. В [9] показано, что любой свободный множитель $N_{m,2}$ относительно многообразия $\mathscr{N}_2$ экзистенциально замкнут в соответствующей свободной нильпотентной группе $N_{r,2}$, $r \geq m$, при $m \geq 2$. Множители $N_{1,2}$ и $N_{1,3}$, как отмечено выше, не экзистенциально замкнуты в группах большего ранга. Остается добавить, что в многообразии всех абелевых групп $\mathscr{A} = \mathscr{N}_1$ любой прямой (т. е. свободный в многообразии $\mathscr{A}$) множитель любого ранга $m \geq 1$ свободной абелевой группы $A_r = N_{r,1}$, $r \geq 1$, экзистенциально замкнут. Это давно и хорошо известно.

В данной работе сопряжение обозначается через $g^f = fgf^{-1}$, коммутатор — через $[g, f] = gfg^{-1}f^{-1}$. Трансвекция t_{ij}, $i \neq j$, есть матрица $e + e_{ij}$, где e — единичная матрица, e_{ij} — матричная единица, т. е. матрица, у которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит 1, а на остальных местах — 0. Также используется обозначение $t_{ij}(\alpha)$, $i \neq j$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, соответствующее матрице $e + \alpha e_{ij} = t_{ij}^{\alpha}$.

2. Циклические ретракты нильпотентных групп

Пусть G — конечно порожденная нильпотентная группа ступени нильпотентности $k \geq 2$. Будем предполагать, что G не имеет кручения. Хорошо известно (см., например, [11, гл. 6, § 1, разд. 2] или [7]), что в этом случае все факторы верхнего центрального ряда $1 \leq \zeta_1(G) \leq \zeta_2(G) \leq \cdots \leq \zeta_{k-1}(G) \leq G$ группы G не имеют кручения.

Любая нетривиальная нормальная подгруппа U группы G имеет нетривиальное пересечение $U_1 = U \cap \zeta_1(G)$ с центром $\zeta_1(G)$ группы G (см., например, [11, гл. 6, § 1, разд. 2] или [7]). Заметим, что если $\rho : G \to H$ — ретракция группы G на нетривиальную подгруппу H, $U = \ker(\rho)$, то фактор-группа $\zeta_1(G)/U_1 \leq G/U \simeq H$ не имеет кручения. Так как подгруппа U_1 совпадает со своим изолятором в $\zeta_1(G)$, она выделяется в $\zeta_1(G)$ прямым множителем. Предположим, что центр $\zeta_1(G)$ инвариантен относительно ретракции ρ. Тогда ограничение $\rho_{|\zeta_1(G)}$ определяет ретракцию $\zeta_1(G)$ на $H_1 = H \cap \zeta_1(G)$, причем $\zeta_1(G) = H_1 \times U_1$. В этом случае естественный образ $\overline{H}_1$ подгруппы H будет ретрактом фактор-группы $G_1 = G/\zeta_1(G)$ с ядром $\overline{U}_1 = U\zeta_1(G)/\zeta_1(G)$. Свойство $G_1 = \overline{H}_1 \cdot \overline{U}_1$, очевидно, выполнено, значит, достаточно доказать, что $\overline{H}_1 \cap \overline{U}_1 = \{1\}$. Допустим, что $\overline{H}_1 \cap \overline{U}_1$ содержит неединичный элемент $\bar{h}$. Возьмем его прообраз $h \in H$. Тогда $h = uc$, $u \in U$, $c \in \zeta_1(G)$. По замечанию, сделанному выше, $c = h_1u_1$, где $h_1 \in H_1$, $u_1 \in U_1$. Тогда $hh_1^{-1} = uu_1 = 1$. Значит, $h = h_1 \in \zeta_1(G)$, $\bar{h} = 1$; противоречие. В предположении, что все члены $\zeta_i(G)$ верхнего центрального ряда группы G инвариантны относительно ρ, аналогично доказывается, что естественные образы H — ретракты в фактор-группах $G/\zeta_i(G)$ для $i = 1, \ldots, k$. Отсюда следует, что пересечения $H_i = H \cap \zeta_i(G)$, $U_i = U \cap \zeta_i(G)$ индуцируют в фактор-группе $\zeta_i(G)/\zeta_{i-1}(G)$ прямые множители, причем $\zeta_i(G)/\zeta_{i-1}(G) = H_i \times U_i$ для $i = 1, \ldots, k$.

Обозначим через $I(G')$ изолятор коммутанта G' группы G. Пусть $\mathbb{Z}^l$ — свободная абелева группа конечного ранга l. Элемент $g \in \mathbb{Z}^l$ называется *примитивным*, если его можно дополнить до множества свободных порождающих элементов этой группы.

Предложение 2. *Бесконечная циклическая подгруппа* $C = \mathrm{gp}(c)$ *конечно порожденной нильпотентной группы* G *без кручения является ретрактом этой группы тогда и только тогда, когда естественный образ элемента* c *примитивен в фактор-группе* $G/I(G')$.

Доказательство. Пусть ρ — ретракция группы G на ее (бесконечную) циклическую подгруппу $C = \mathrm{gp}(c)$, $U = \ker(\rho)$. Так как $G = C \cdot U$, элемент c не принадлежит коммутанту G'. Действительно, коммутант G' принадлежит подгруппе Фраттини $\Phi(G)$ группы G. В случае, если $c \in G'$, приведенное выше равенство превращается в $G = U$; противоречие с тем, что C — бесконечная циклическая группа. Более того, элемент c и, следовательно, подгруппа C не принадлежат изолятору коммутанта $I(G')$, так как в противном случае нормальная подгруппа U, очевидно содержащая G', имела бы в G конечный индекс. Изолятор $I(G')$ является эндоморфно допустимой подгруппой группы G, следовательно, он инвариантен относительно ρ. Значит, естественный образ $\bar{c}$ элемента c в свободной абелевой группе $G/I(G')$ порождает ее циклический ретракт $\overline{C}$=$\mathrm{gp}(\bar{c})$, выделяющийся в $G/I(G')$ прямым множителем. Тогда $\bar{c}$ является примитивным элементом группы $G/I(G')$, т. е. элементом, который можно дополнить до множества ее свободных порождающих.

Пусть $\bar{c}$ — примитивный элемент свободной абелевой группы $G/I(G')$, $c = b_1$ — его прообраз в группе G. Дополним $\bar{c} = \bar{b}_1$ до множества свободных порождающих элементов $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_l$ группы $G/I(G')$. Пусть элементы $b_2, \ldots, b_l$ являются некоторыми соответствующими $\bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_l$ прообразами в группе G. Определим нормальную подгруппу $U = \mathrm{гр}(b_2, \ldots, b_l) \cdot G'$ группы G. Произведение $C \cdot U = G$ удовлетворяет условиям (1) для $H = C$. Следовательно, подгруппа C является циклическим ретрактом группы G. $\square$

Пусть $G_n = \mathrm{UT}_n(\mathbb{Z})$ — группа унитреугольных матриц над $\mathbb{Z}$ размера n. Сопоставим произвольному элементу $g = (g_{i,j}) \in \mathrm{UT}_n(\mathbb{Z})$ вектор $\bar{g} = (g_{1,2}, g_{2,3}, \ldots, g_{n-1,n}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$, соответствующий первой побочной диагонали матрицы g.

Следствие 3. *Циклическая подгруппа* $\mathrm{gp}(g)$ *является ретрактом группы* $UT_n(\mathbb{Z})$ *тогда и только тогда, когда вектор* $\bar{g}$ *примитивен.*

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [11, гл. 1, § 3, разд. 2; гл. 6, § 1, разд. 2] или [7]), что коммутант $\mathrm{UT}_n(\mathbb{Z})'$ состоит из всех унитреугольных матриц с нулевой первой побочной диагональю и, очевидно, совпадает со своим изолятором. Фактор-группа по нему естественно изоморфна аддитивной группе векторов $\bar{g}, g \in G_n$. Следствие прямо вытекает из предложения 2. $\square$

3. Абелевы и стандартные ретракты групп $\mathbf{UT}_n(\mathbb{Z})$

Абелевы ретракты групп $\mathbf{UT}_n(\mathbb{Z})$. Пусть G — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения ступени нильпотентности $k \geq 2$. Пусть A — абелев ретракт группы G. Так как G конечно порождена и не имеет кручения, подгруппа A является свободной абелевой группой конечного ранга. Любой циклический фактор $\mathrm{gp}(g)$ подгруппы A также является ретрактом группы G. Значит, g индуцирует примитивный элемент фактор-группы $G/I(G')$. В случае группы $G_n = \mathrm{UT}_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$, абелевы ретракты описываются следующим образом.

Теорема 4. *Пусть A — абелев ретракт группы G_n, $n \geq 3$ (случаи $n \leq 2$ очевидны). Тогда в качестве базиса свободной абелевой группы A можно выбрать такие элементы $g_1, \ldots, g_r$, что соответствующие им векторы $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_r$ будут иметь следующий вид.*

Для некоторого набора чисел $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_{r-1} \leq n-1$, $t_i \leq t_{i+1} - 2$, $i = 0, \ldots, r-2$, первые t_0 компонент вектора $\bar{g}_1$, а также его t_1-я компонента равны 0. Первые t_1 компонент вектора $\bar{g}_2$, а также его t_2-я компонента равны 0, и так до компоненты t_{r-1}. Первые t_{r-1} компонент вектора $\bar{g}_r$ равны 0, а также следующие за компонентой с номером $t_{r-1}+1$ компоненты (если они есть) вектора $\bar{g}_r$ равны 0.

Максимальный ранг r абелева ретракта A достигается при $t_0 = 0$, $t_i = t_{i+1} - 2$ для $i = 0, \ldots, r-1$, при этом $r = [n/2]$.

Доказательство. Пусть $f_1, \ldots, f_r$ — базис группы A. Пусть t_0 — минимальное число такое, что среди векторов $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_r$ существует вектор, у которого (t_0+1)-я компонента отлична от 0. Так как все элементы $f_1, \ldots, f_r$ перестановочны друг с другом, векторы, составленные из (t_0+1)- и (t_0+2)-й компонент у них пропорциональны. Используя элементарные преобразования сложения и вычитания векторов $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_r$, соответствующие элементарным преобразованиям базиса группы A, можно добиться того, что только один такой укороченный вектор длины два будет ненулевым. Обозначим соответствующий ему элемент через g_1. Если (t_0+2)-я компонента этого вектора нулевая, то определим t_1 как наименьшее число такое, что все компоненты остальных элементов базиса с номером, меньшим, чем t_1+1, равны нулю и в то же время среди них найдется элемент, у которого (t_1+1)-я компонента отлична от нуля. Далее проводим аналогичные преобразования с остальными элементами базиса, при которых t_1 играет роль t_0 из рассмотренного случая. Если $(t_0+2), \ldots, (t_0+l)$-е компоненты вектора $\bar{g}_1$ не равны нулю, а (t_0+l+1)-я нулевая, то все компоненты остальных элементов базиса с номерами $t_0+3, \ldots, t_0+l+1$ равны нулю. Тогда выбираем $t_1 \geq t_0+l+2$ точно так же, как делалось выше. Аналогично проводим элементарные преобразования остальных элементов базиса, выбирая в итоге g_2. Продолжая процесс, получим базис $g_1, \ldots, g_r$ с нужными свойствами.

Заметим также, что выбор элементов с указанными свойствами, для которых все элементы выше первой побочной диагонали равны нулю, а первые побочные диагонали примитивны, дает базис свободного абелева ретракта группы $\mathrm{UT}(n, \mathbb{Z})$. Максимальный ранг этого ретракта достигается при выборе базиса $g_1 = t_{1,2}$, $g_2 = t_{3,4}$, $\ldots$, $g_{k+1/2} = t_{k,k+1}$, $k+1 \leq n$. Легко видеть, что максимально возможный ранг r абелева ретракта A группы $\mathrm{UT}_n(\mathbb{Z})$ равен $[n/2]$ (целой части от $n/2$). $\square$

Стандартные ретракты групп $\mathbf{UT}_n(\mathbb{Z})$. Определим некоторые ретракты группы $\mathrm{UT}_n(\mathbb{Z})$, которые назовем *стандартными.* Каждый такой ретракт определяется последовательностью натуральных чисел $\bar{t} \leftrightarrow 1 = t_1 < t_2 < \cdots < t_{k+1} = n$. По последовательности $\bar{t}$ строится клеточно-диагональная подгруппа $H_{\bar{t}}$, клетки H_{t_i} которой соответствуют наборам индексов $t_i, t_i + 1, \dots, t_{i+1} - 1$ для $i = 1, \dots, k$. При этом все нетривиальные клетки должны быть полными, т. е. включать в себя все элементы с соответствующим набором индексов. Это, в частности, означает, что клетка H_{t_i} определяет подгруппу, изоморфную группе $\mathrm{UT}_{t_{i+1}-t_i}(\mathbb{Z})$. Легко видеть, что подгруппа $H_{\bar{t}}$ изоморфна прямому произведению своих нетривиальных клеток.

Лемма 5. *Любая подгруппа вида $H_{\bar{t}}$, определенного выше, является ретрактом группы $UT_n(\mathbb{Z})$.*

Доказательство. Хорошо известно, что группа $\mathrm{UT}_n(\mathbb{Z})$ порождается всеми трансвекциями t_{ij}, $i < j$, определяющие соотношения между которыми имеют следующий вид:

$$[t_{ij}, t_{jl}] = t_{il}, \quad [t_{jl}, t_{ij}] = t_{il}^{-1}, \quad [t_{ij}, t_{pl}] = 1 \quad \text{при } j \neq p,\ i \neq l. \tag{4}$$

Заметим, что подгруппа $U_{\bar{t}}$, состоящая из всех матриц, не содержащих ненулевых внедиагональных элементов в клетках подгруппы $H_{\bar{t}}$, нормальна в $\mathrm{UT}_n(\mathbb{Z})$. Это следует из того, что подгруппа $U_{\bar{t}}$ порождается всеми трансвекциями t_{ij}, для которых ij-позиция ($i < j$) лежит вне клеток, соответствующих разбиению $\bar{t}$. Эти трансвекции, в свою очередь, при сопряжении любой другой трансвекцией группы $\mathrm{UT}_n(\mathbb{Z})$ переходят в элемент подгруппы $U_{\bar{t}}$. Последнее следует из формул (4). Легко видеть, что $\mathrm{UT}_n(\mathbb{Z}) = H_{\bar{t}} U_{\bar{t}}$, причем $H_{\bar{t}} \cap U_{\bar{t}} = \{1\}$. Согласно (1) это равносильно тому, что $H_{\bar{t}}$ — ретракт группы $\mathrm{UT}_n(\mathbb{Z})$, а $U_{\bar{t}}$ — ядро соответствующей ретракции. $\square$

4. Произвольные ретракты конечно порожденных нильпотентных групп

Начнем с предварительных утверждений.

Лемма 6. *Пусть H — подгруппа без кручения группы G, являющаяся ее ретрактом, $\rho : G \to H$ — соответствующая ретракция, $U = \ker(\rho)$. Тогда фактор-группа G/U не имеет кручения.*

Доказательство очевидно, так как $G/U \simeq H$. $\square$

Лемма 7. *Пусть H — ретракт группы G, $\rho : G \to H$ — соответствующая ретракция, $U = \ker(\rho)$. Пусть V — подгруппа в U, нормальная в G. Тогда естественный образ $\overline{H} \simeq H$ подгруппы H является ретрактом фактор-группы $\overline{G} = G/V$.*

Доказательство. Условия позволяют определить естественный эндоморфизм $\bar{\rho} : \overline{G} \to \overline{H}$, являющийся требуемой ретракцией. $\square$

Лемма 8. *Пусть G — произвольная группа, L — ее эндоморфно допустимая подгруппа, $\beta : G \to G/L$ — естественный гомоморфизм.*

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Образ $\beta(H)$ любого ретракта H группы G является ретрактом группы G/L относительно ретракции $\rho_{G/L} : G/L \to \beta(H)$, индуцированной ρ. Ядром ретракции $\rho_{G/L}$ служит $\beta(U)$.*

2. *Пересечение $H_L = H \cap L$ любого ретракта H группы G с подгруппой L является ретрактом подгруппы L относительно ретракции $\rho|_L : L \to H_L$ — ограничения ρ на L. Ядром ретракции $\rho|_L$ служит $U_L = U \cap L$.*

Доказательство. Условие эндоморфной допустимости L позволяет определить гомоморфизмы $\rho_{G/L}$ и $\rho|_L$. Очевидно, что они тождественны на $\beta(H)$ и H_L соответственно. Значит, они ретракции по определению. $\square$

Лемма 9. *Пусть G — нильпотентная группа ступени 2 такая, что любая неединичная нормальная подгруппа имеет нетривиальное пересечение с коммутантом G' и любые две неединичные абелевы подгруппы коммутанта G' имеют нетривиальное пересечение. Тогда у G нет собственных неабелевых ретрактов.*

Доказательство. Пусть H — собственный неабелев ретракт группы G и $\rho : G \to H$ — соответствующая ретракция. Тогда H' — абелева неединичная подгруппа коммутанта G'. Ядро $U = \ker(\rho)$ ретракции — неединичная нормальная подгруппа группы G. По условию $\overline{U} = U \cap G'$ — неединичная абелева подгруппа. Тогда $H' \cap \overline{U} \neq 1$, что невозможно, так как H — ретракт, а U — ядро ретракции. $\square$

Следующая теорема представляет необходимое условие подгруппы H быть вербально замкнутой, а следовательно, и алгебраически замкнутой подгруппой (равносильно, ретрактом) конечно порожденной нильпотентной группы G. Через $\gamma_l(G)$ обозначается l-й член нижнего центрального ряда группы G.

Теорема 10. *Пусть G — конечно порожденная нильпотентная группа ступени нильпотентности t и H — ее вербально замкнутая подгруппа. Обозначим через $\alpha : G \to G/G'$ абелизацию группы G. Допустим, что $h_1, \ldots, h_k$ — набор элементов подгруппы H такой, что $\alpha(H) = \mathrm{gp}(\alpha(h_1), \ldots, \alpha(h_k))$. Тогда $H = \mathrm{gp}(h_1, \ldots, h_k)$. Более того, для каждого $l \in \{1, \ldots, t\}$ имеет место равенство $(H \cap \gamma_l(G))\gamma_{l+1}(G) = \gamma_l(H)\gamma_{l+1}(G)$.*

Доказательство. Если подгруппа $\overline{H} = \mathrm{gp}(h_1, \ldots, h_k)$ не совпадает с H, то найдутся число l и такой элемент $h \in H$, принадлежащий $\gamma_l(G) \setminus \gamma_{l+1}(G)$, который не принадлежит подгруппе $\overline{H}\gamma_{l+1}(G)$. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — порождающие элементы группы G. Тогда существует представление вида

$$h = u(x_1, \ldots, x_n)w(x_1, \ldots, x_n), \tag{5}$$

в котором $u(x_1, \ldots, x_n)$ — произведение степеней коммутаторов от порождающих веса l, а $w(x_1, \ldots, x_n)$ — произведение степеней коммутаторов от порождающих веса не меньше, чем $l + 1$.

Будем рассматривать (5) как уравнение от неизвестных $x_1, \ldots, x_n$. Это уравнение имеет решение в группе G. Так как H — вербально замкнутая подгруппа, найдется решение $y_1, \ldots, y_n$, состоящее из элементов подгруппы H. Рассмотрим произведение степеней коммутаторов $u(y_1, \ldots, y_n)$. Пусть $y_i = \prod\limits_{j=1}^{k} h_j^{\lambda_{i,j}} z_j$, $z_j \in G'$, $\lambda_{i,j} \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k$. Подставив вместо y_j, $j = 1, \ldots, n$, эти выражения и используя полилинейность коммутаторов веса l по модулю $\gamma_{l+1}(G)$, получим выражение вида

$$h = r(h_1, \ldots, h_k)s, \tag{6}$$

где $r(h_1, \ldots, h_k)$ — произведение степеней коммутаторов веса l от указанных элементов, $s \in \gamma_{l+1}(G)$. Полученное выражение противоречит предположению. При этом также получили доказательство второго утверждения теоремы. $\square$

Теорема 11. *Пусть G — конечно порожденная нильпотентная группа ступени нильпотентности t, H — ретракт группы G, $\rho : G \to H$ — соответствующая ретракция и $U = \ker(\rho)$ — ядро ретракции. Обозначим через $\alpha : G \to G/G'$ абелизацию группы G. Пусть K — подгруппа группы G такая, что она удовлетворяет необходимым условиям быть ретрактом из теоремы* 10, *в частности, для любого $l \in \{1,\dots,t\}$ имеет место равенство $(K \cap \gamma_l(G))\gamma_{l+1}(G) = \gamma_l(K)\gamma_{l+1}(G)$. Пусть $\alpha(K) = \alpha(H)$ и для любого $i \in \{1,\dots,t\}$ имеет место равенство $(H \cap \gamma_i(G))\gamma_{i+1}(G) = \gamma_i(K)\gamma_{i+1}(G)$. Тогда K также является ретрактом группы G. При этом существует ретракция $\tau : G \to K$, ядром которой служит U.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $G = KU$ и $K \cap U = 1$. Пусть $\alpha_i : G \to G/\gamma_{i+1}(G)$, $i = 1,\dots,t$, — естественный гомоморфизм.

По лемме 8 $\alpha_i(H)$ — ретракт группы $\alpha_i(G)$, а пересечение $\widetilde{H}_i = \alpha_i(H) \cap \gamma_i(\alpha_i(G))$ — ретракт в $\gamma_i(\alpha_i(G))$ относительно ретракции, индуцированной ρ. При этом по теореме 10 $\widetilde{H}_i = \gamma_i(\alpha_i(H))$. В частности, $\widetilde{U}_i = \alpha_i(U) \cap \gamma_i(\alpha_i(G))$ имеет тривиальное пересечение с $\widetilde{H}_i$.

Допустим, что $K \cap U \neq \{1\}$. Тогда найдутся наименьшее число i и нетривиальный элемент $g \in \gamma_i(G) \setminus \gamma_{i+1}(G)$ такие, что $g \in K \cap U$. Тем самым $\alpha_i(g) \neq 1$ и $\alpha_i(g) \in \alpha_i(K) \cap \alpha_i(U)$. Из условий теоремы следует, что $\alpha_i(g) \in \widetilde{K}_i \cap \widetilde{U}_i = \widetilde{H}_i \cap \widetilde{U}_i$; противоречие. Значит, $K \cap U = \{1\}$.

Докажем, что $G = KU$. Если это не так, то найдутся наименьшее число i и элемент $g \in \gamma_i(G)$ такие, что $g \notin KU\gamma_{i+1}(G)$. Тогда $\alpha_i(g) \notin \widetilde{K}_i\widetilde{U}_i = \widetilde{H}_i\widetilde{U}_i = \widetilde{G}_i$; противоречие. $\square$

Теоремы 10 и 11 показывают, что свойство подгруппы H «быть ретрактом» группы G во многом определяется образом $\alpha(H)$ относительно абелизации $\alpha : G \to G/G'$.

Будем говорить, что два ретракта H_1 и H_2 группы G *подобны*, если существует такая нормальная подгруппа U группы G, что $G = H_1U = H_2U$ и $H_i \cap U = \{1\}$ для $i = 1, 2$. Другими словами, подгруппы H_1 и H_2 соответствуют двум ретракциям с общим ядром. Ясно, что подгруппы H_1 и H_2 в этом случае изоморфны между собой.

Назовем ретракт группы $\mathrm{UT}_n(\mathbb{Z})$ *существенно стандартным*, если он подобен стандартному ретракту.

Назовем ретракт H группы $\mathrm{UT}_n(\mathbb{Z})$ *трансвекционным*, если любая трансвекция $t_{i,j}$ либо принадлежит ретракту H, либо находится в ядре U соответствующей ретракции.

Теорема 12. *Произвольный трансвекционный ретракт группы $UT_n(\mathbb{Z})$ является стандартным ретрактом этой группы.*

Доказательство. Для упрощения записи полагаем $G = \mathrm{UT}_n(\mathbb{Z})$. Пусть H — собственный нееденичный трансвекционный ретракт группы G, U — ядро соответствующей ретракции. Нужно доказать, что U совпадает с ядром $U_{\bar{t}}$ стандартной ретракции относительно некоторого разбиения $\bar{t}$.

Так как U — нетривиальная нормальная подгруппа нильпотентной группы G, она имеет нееденичное пересечение с центром $\zeta_1(G) = \mathrm{gp}(t_{1n})$. Поскольку фактор-группа G/U не имеет кручения, отсюда следует, что $U \geq \zeta_1(G)$.

Определим в группе G две свободные ранга $n-1$ абелевы нормальные подгруппы R_1 и C_n. Подгруппа R_1 состоит из всех унитреугольных матриц, в которых все внедиагональные элементы строк начиная со второй равны нулю.

Аналогично определяется подгруппа C_n, в которой все внедиагональные элементы столбцов, за исключением элементов последнего столбца, равны нулю. Ясно, что $G/R_1 \simeq G/C_n \simeq \mathrm{UT}_{n-1}(\mathbb{Z})$.

Если U содержит R_1 или C_n, то утверждение теоремы следует по индукции, подгруппа H в данном случае будет существенно стандартным ретрактом группы $\mathrm{UT}_{n-1}(\mathbb{Z})$, соответствующей фактор-группе G по подгруппе R_1 или C_n. Это, очевидно, влечет аналогичное свойство для H относительно группы G.

Допустим, что U не содержит ни одной из подгрупп R_1 и C_n. Среди всех трансвекций вида t_{1k}, $k = 2, \dots, n$, принадлежащих U, выберем трансвекцию с минимальным индексом k. Обозначим через R_{1k} подгруппу группы R_1, порожденную трансвекциями t_{1j}, $j \geq k$. Для любого $k \geq 2$ подгруппа R_{1k} нормальна в G. Покажем, что в рассматриваемом случае $U \cap R_1 = R_{1k}$. Если $k = n$, то утверждение, очевидно, справедливо. Пусть $k < n$. Тогда U как нормальная подгруппа содержит любую трансвекцию $t_{1j} = [t_{1k}, t_{k,k+1}, \dots, t_{j-1,j}]$ для $j = k+2, \dots, n$. Значит, $U = R_{1k}$.

Аналогично определяются подгруппы $C_{mn} \leq C_n$, $m \leq n-1$, порожденные трансвекциями $t_{1n}, t_{2n}, \dots, t_{mn}$. Эти подгруппы нормальны в G. Как и выше, устанавливаем, что $U \cap C_n = C_{mn}$ для некоторого $m \geq n-1$.

Заметим, что U не содержит трансвекций вида t_{ij} для $i < j < k$. Действительно, если $t_{ij} \in U$, то $t_{1j} = [t_{1i}, t_{ij}] \in U$, что противоречит выбору k. Аналогично доказывается, что U не содержит трансвекций t_{ij} для $j > i > m$.

Значит, трансвекции t_{ij} с ограничениями на индексы $i < j < k$ и $j > i > m$ принадлежат H. Заметим, что трансвекции t_{ij} для $i < k$, $j \geq k$ принадлежат U. Действительно, если $t_{ij} \in H$, то $t_{1i}, t_{ij} \in H$, но это противоречит тому, что $t_{1j} \in U$. Аналогично доказывается, что $t_{ij} \in U$ при $k \leq i \leq m$.

Таким образом, определена принадлежность подгруппам H или U всех трансвекций t_{ij}, кроме случая, когда выполнены следующие неравенства для индексов: $k \leq i \leq m$, $k < j \leq m$. Все подматрицы, соответствующие указанным ограничениям, составляют диагональную клетку размера $|m-k| \times |m-k|$. Для этой клетки повторяем рассуждения, получая новую неопределенную клетку строго меньшей размерности. В итоге процесс рассмотрения заканчивается на конечном шаге. Очевидно, что полученный вид говорит о том, что ретракт H стандартен. □

5. Алгоритмическое распознавание ретрактов свободных нильпотентных групп

В [9] доказано, что в свободной нильпотентной группе $N_{r,k}$ ранга $r \geq 1$ ступени нильпотентности $k \geq 1$ множество ретрактов совпадает с множествами ее вербально замкнутых подгрупп, алгебраически замкнутых подгрупп, а также с множеством свободных множителей группы $N_{r,k}$ относительно многообразия $\mathcal{N}_k$ всех нильпотентных групп ступени нильпотентности не выше, чем k.

Следующая теорема решает проблему N9(b) Мясникова из [3].

Теорема 13. *Для любых $r \geq 1$, $k \geq 1$ существует алгоритм, определяющий, является ли подгруппа G свободной нильпотентной группы $N_{r,k}$ ретрактом (равносильно, алгебраически или вербально замкнутой подгруппой, или свободным множителем в $\mathcal{N}_k$).*

Доказательство. Пусть подгруппа G задана порождающими элементами $g_1, \dots, g_n$. Пусть $\alpha : N_{r,k} \to A_r$ — гомоморфизм абелизации. Здесь A_r обозначает свободную абелеву группу ранга r, изоморфную фактор-группе $N_{r,k}$

по коммутанту. Элементарными преобразованиями над элементами $\alpha(g_1),\dots,$ $\alpha(g_n)$ получаем базис подгруппы $\alpha(G)$ изоморфной свободной абелевой группы A_m, $m \leq n$. Если эта подгруппа $\alpha(G)$ не является прямым множителем группы A_r, что легко усматривается из вида ее базиса, то G не будет свободным множителем и, следовательно, ретрактом группы $N_{r,k}$.

В противном случае проводим те же самые элементарные преобразования над элементами $g_1,\dots,g_n$. В результате получим элементы $h_1,\dots,h_m$, соответствующие базису подгруппы $\alpha(G)$, и элементы $u_1,\dots,u_{n-m}$, принадлежащие коммутанту $N'_{r,k}$. Проверяем, что элементы $u_1,\dots,u_{n-m}$ принадлежат подгруппе, порожденной элементами $h_1,\dots,h_m$. Это можно сделать, так как проблема вхождения в подгруппу в классе конечно порожденных нильпотентных групп алгоритмически разрешима (см., например, [12]). Если хотя бы один из элементов $u_1,\dots,u_{n-m}$ не принадлежит $G_1 = \mathrm{gp}(h_1,\dots,h_m)$, то согласно теореме 10 не выполняется необходимое условие подгруппы G быть ретрактом. Пусть $G_1 = G$. Дополним множество элементов $h_1,\dots,h_m$ до множества $h_1,\dots,h_m,h_{m+1},\dots,h_r$ таким образом, что образы этих элементов относительно α составляют базис абелизации A_r группы $N_{r,k}$. Тогда элементы $h_1,\dots,h_m,h_{m+1},\dots,h_r$ составляют базис группы $N_{r,k}$ (см., например, [7]). Значит, $G = \mathrm{gp}(h_1,\dots,h_m)$ — свободный множитель группы $N_{r,k}$. $\square$

6. Вербально и алгебраически замкнутые подгруппы групп $\mathrm{UT}_n(\mathbb{Z})$

Как отмечалось в разд. 2 (теорема 1), в [6] доказано, что для конечно порожденных подгрупп конечно определенной группы свойства «быть алгебраически замкнутой подгруппой» и «быть ретрактом» равносильны. В частности, они имеют место для конечно порожденных нильпотентных групп. Для свободных групп конечного ранга [6] и свободных нильпотентных групп конечного ранга [7] можно также утверждать, что эти свойства равносильны свойству «быть вербально замкнутой подгруппой». В свободных нильпотентных группах $N_{r,k}$ ранга r ступени нильпотентности k алгебраически замкнутые подгруппы (одновременно ретракты и вербально замкнутые подгруппы) совпадают с нетривиальными свободными множителями группы относительно многообразия $\mathscr{N}_k$ нильпотентных групп ступени нильпотентности не больше, чем k. Следующий пример показывает, что в конечно порожденной (и даже в конечной) нильпотентной группе множество вербально замкнутых подгрупп может быть строго больше, чем множество алгебраически замкнутых подгрупп (одновременно ретрактов). В примере $\mathbb{F}_2$ обозначает поле из двух элементов.

Пример 14. Рассмотрим две копии A и B группы $\mathrm{UT}_3(\mathbb{F}_2)$. Пусть $G = A \times_{c_1=c_2} B$ обозначает их прямое произведение с объединением по центру. Здесь c_1 и c_2 обозначают порождающие элементы центров групп A и B соответственно.

Подгруппа A является вербально, но не алгебраически замкнутой подгруппой (ретрактом) группы G.

Доказательство. Пусть $a_1 = t_{1,2}$, $a_2 = t_{2,3}$ и $b_1 = t_{1,2}$, $b_2 = t_{2,3}$ — порождающие элементы групп A и B соответственно. Тогда $c_1 = [a_1, a_2]$ и $c_2 = [b_1, b_2]$ — порождающие центров этих групп, являющихся циклическими группами порядка 2. Группы A и B имеют порядок 8 и ступень нильпотентности 2. Группа G имеет порядок 32 и ступень нильпотентности 2. Произвольный элемент группы A однозначно записывается в виде $h = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} c_1^{\alpha_3}$, где α_i равно

0 или 1, $i = 1, 2, 3$. Группа G кроме тождества нильпотентности $[[x_1, x_2], x_3] = 1$ удовлетворяет тождеству $x^4 = 1$. Учитывая эти тождества, получаем, что любое расщепимое уравнение в группе G над подгруппой A равносильно уравнению вида

$$\prod_{i=1}^{k} x_i^{\xi_i} \prod_{j>l} [x_j, x_l]^{\zeta_{j,l}} = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} c_1^{\alpha_3}, \tag{7}$$

где $\xi_i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\zeta_{j,l} \in \{0, 1\}$ — неизвестные, $\alpha_t \in \{0, 1\}$ — параметры элемента h подгруппы A. Предположим, что уравнение (7) имеет решение в группе G. Нужно показать, что тогда оно имеет решение в подгруппе A. Рассмотрим различные случаи.

Пусть существует $i \in \{1, \ldots, k\}$, для которого $\xi_i = 1$. Полагаем $x_i = h$, $x_j = 1$ для всех $j \neq i$. Получаем решение уравнения (7) в подгруппе A. Если для какого-либо $i \in \{1, \ldots, k\}$ имеем $\xi_i = 3$, то полагаем $x_i = h^{-1}$, $x_j = 1$ для всех $j \neq i$. Опять имеем решение уравнения (7) в подгруппе A.

Если $\xi_i \in \{0, 2\}$ для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$, то из разрешимости уравнения (7) в группе G следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. При $\alpha_3 = 0$ решение тривиальное. Предположим, что $\alpha_3 = 1$. Пусть $\xi_i = 2$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, k\}$. Полагаем $x_i = a_1 a_2$, $x_j = 1$ для всех $j \neq i$. Снова получаем решение уравнения (7) в подгруппе A.

Остается рассмотреть случай, когда $\xi_i = 0$ для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$. Тогда найдется $\zeta_{j,l} = 1$. Полагаем $x_j = a_1$, $x_l = a_2$, $x_t = 1$ для всех $t \neq j, l$, что также дает решение уравнения (7) в подгруппе A.

Нами установлено, что уравнение (7) разрешимо во всех возможных случаях при предположении его разрешимости в группе G.

Очевидно, что центр группы G циклический второго порядка. Он совпадает с коммутантом G'. Любая нееденичная нормальная подгруппа нильпотентной группы имеет нееденичное пересечение с ее центром. Значит, выполнены условия леммы 9, согласно которой группа G не содержит собственных неабелевых ретрактов (равносильно, алгебраически замкнутых подгрупп). Можно также указать следующую систему уравнений, разрешимую в G и не разрешимую в A:

$$[x_1, x_2] = c_1, \quad [x_3, x_4] = c_1, \quad [x_i, x_j] = 1 \quad \text{для } i \in \{1, 2\},\ j \in \{3, 4\}. \quad \square \tag{8}$$

Следующий пример показывает, что пересечение двух ретрактов (алгебраически замкнутых подгрупп) свободной нильпотентной группы может не быть ретрактом (алгебраически замкнутой подгруппой).

Пример 15. Пусть $N = N_{3,2}$ — свободная нильпотентная группа ступени нильпотентности два с базисом x_1, x_2, x_3. Подгруппы $G = \mathrm{gp}(x_1[x_2, x_3], x_2)$ и $H = \mathrm{gp}(x_1, x_2)$ являются ретрактами этой группы, а их пересечение $K = G \cap H$ — нет. Пересечение K также не является ретрактом ни в A, ни в B.

Доказательство. Ретракция $N \to G$ определяется отображением $x_1 \to x_1[x_2, x_3]$, $x_2 \to x_2$, $x_3 \to 1$. Ретракция $N \to H$ соответствует стандартной проекции $x_1 \to x_1$, $x_2 \to x_2$, $x_3 \to 1$. Легко видеть, что $G \cap H = \mathrm{gp}(x_2, [x_1, x_2])$. Для этого пересечения не выполнено необходимое условие быть ретрактом конечно порожденной нильпотентной группы, данное в теореме 10. А именно, образ пересечения $G \cap H$ в абелизации группы $N_{ab} = N/N'$ циклический, в то время как само пересечение $G \cap H$ не циклическое.

Аналогично доказывается, что $G \cap H$ не является ретрактом ни в одной из подгрупп G и H группы N. $\square$

7. Экзистенциально замкнутые подгруппы групп $\mathbf{UT}_n(\mathbb{Z})$

Как отмечалось в разд. 1, в [9, 10] дано полное описание экзистенциально замкнутых подгрупп свободных нильпотентных групп.

Характеризация экзистенциально замкнутых подгрупп группы $\mathrm{UT}_n(\mathbb{Z})$ для произвольного n выводится из следующего более общего факта.

Теорема 16. *Пусть G — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения, центр C которой — бесконечная циклическая подгруппа. Тогда группа G не содержит собственных экзистенциально замкнутых подгрупп.*

Доказательство. Пусть H — собственная экзистенциально замкнутая подгруппа группы G. Тогда она также алгебраически замкнутая подгруппа в G. По теореме 1 если G — конечно определенная группа и H — конечно порожденная подгруппа в G, то H — алгебраически замкнутая подгруппа в G тогда и только тогда, когда H — ретракт группы G. Значит, H — собственный ретракт группы G. Пусть $\rho : G \to H$ — соответствующая ретракция. В этом случае ядро $U = \ker(\rho)$ — неединичная нормальная подгруппа группы G. Пересечение $U \cap C$ нетривиально как всякое пересечение неединичной нормальной подгруппы нильпотентной группы с ее центром (см. [11, гл. 6, § 1, разд. 2] или [7]). Так как H — ретракт, а C — бесконечная циклическая группа, пересечение $U \cap C$ имеет конечный индекс в C. Согласно лемме 6 это возможно, только если U содержит C. Если G — абелева группа, то $G = C$ и $H = G/C$ — единичная группа, которая, очевидно, не может быть экзистенциально замкнутой. Если G неабелева, то подгруппа H вложима в группу G/C и поэтому имеет меньшую ступень нильпотентности, чем G. Значит, в группе H выполнено тождество меньшей ступени нильпотентности, которого нет в G. Тогда H не экзистенциально замкнута в G; противоречие. $\square$

Следствие 17. *При любом n группа $UT_n(\mathbb{Z})$ не содержит собственных экзистенциально замкнутых подгрупп.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
2. *Roman'kov V. A.* Diophantine questions in the class of finitely generated nilpotent groups // J. Group Theory. 2016. V. 19, N 3. P. 497–514.
3. *Baumslag G., Myasnikov A., Shpilrain V.* Open problems in combinatorial group theory // Contemp. Math. 2002. V. 296. P. 1–38. (http://grouptheory.info, Open Problems).
4. *Bergman G. M.* Supports of derivations, free factorizations and ranks of fixed subgroups in free groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1999. V. 351, N 4. P. 1551–1573.
5. *Нерешенные вопросы теории групп.* Коуровская тетрадь. 17-е изд. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010.
6. *Myasnikov A., Roman'kov V.* Verbally closed subgroups of free groups // J. Group Theory. 2014. V. 17, N 1. P. 29–40.
7. *Hall P.* The Edmonton notes on nilpotent groups. London: Queen Mary College, Dept. Pure Math., 1969.
8. *Roman'kov V.* Equations over groups // Groups, Complexity, Cryptology. 2012. V. 4, N 2. P. 191–239.
9. *Романьков В. А., Хисамиев Н. Г.* Вербально и экзистенциально замкнутые подгруппы свободных нильпотентных групп // Алгебра и логика. 2013. Т. 52, № 4. С. 502–525.

10. *Романьков В. А., Хисамиев Н. Г.* Экзистенциально замкнутые подгруппы свободных нильпотентных групп // Алгебра и логика. 2014. Т. 53, № 1. С. 45–59.
11. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1972.
12. *Ремесленников В. Н., Романьков В. А.* Теоретико-модельные и алгоритмические вопросы теории групп // Алгебра. Топология. Геометрия. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 21. С. 3–79. (Итоги науки и техники).

Статья поступила 16 мая 2016 г.

Романьков Виталий Анатольевич
Омский гос. университет им. Ф. М. Достоевского,
пр. Мира, 55-А, Омск 644077;
Омский гос. технический университет,
пр. Мира, 11, Омск 644050
romankov48@mail.ru

Хисамиев Назиф Гарифуллинович, Конырханова Асем Адилбеккызы
Восточно-Казахстанский гос. технический университет им. Д. Серикбаева,
ул. Серикбаева, 19, Усть-Каменогорск 070010, Республика Казахстан
NHisamiev@ektu.kz, kans_ekstu@mail.ru