Reprints in Theory and Applications of Categories, No. 21, 2011, pp. 1–99.

$\mathbf{A}_\infty$-structures

Modèles Minimaux de Baues-Lemaire et Kadeishvili

et Homologie des Fibrations

Alain Prouté
alp@logique.jussieu.fr
Equipe de Logique Mathématique
Institut Mathématique de Jussieu
Université Denis Diderot-Paris 7

Transmitted by L. Breen, J-L Loday and J. Stasheff. Reprint published on 2011-09-07.
2010 Mathematics Subject Classification : 55R10 55R20.
Keywords and phrases : A-infinity algebras, Cartan's small constructions, twisting cochains, homotopy, minimal models, Eilenberg-Mac Lane spaces.

Ce texte est la partie principale de ma thèse d'état soutenue en 1986,([1]) et ressaisie en LaTeX en 2011. Le reste de la thèse se composait de trois notes aux comptes rendus ([27], [28] et [30]). Le titre de l'ensemble était : « Algèbres Différentielles Fortement Homotopiquement Associatives (A_∞-algèbres) ». Le jury était composé de Henri Cartan (président), Lawrence Breen, Guy Cousineau, Daniel Leborgne, James D. Stasheff, et Michel Zisman. Le présent texte est aussi fidèle que possible à l'original. Seules des notes de bas de page ont été ajoutées pour mettre le lecteur au courant de certaines évolutions autour du sujet, qui a connu ces dernières années un regain d'intérêt dans le cadre de ce que J.-L. Loday appelle la « renaissance des opérades ». Les facilités offertes par LaTeX pour la numérotation des théorèmes n'ont pas été utilisées, et la numérotation d'origine a été conservée. De même, la bibliographie est une simple copie de l'original. Par contre, ces facilités ont été utilisées pour numéroter les chapitres et les titres de sections. Ces derniers n'existent pas dans l'original, mais leur ajoût facilite l'utilisation du texte. Les figures, qui dans l'original étaient des dessins faits à la main, ont été refaits en utilisant des packages LaTeX spécialisés. J'ai réfréné mon envie de changer quoi que ce soit, et ai ressaisi ce texte tel qu'il avait été écrit. Les seules différences viennent de l'utilisation de LaTeX en lieu et place d'une machine à écrire à marguerites, d'une paire de ciseaux et d'un tube de colle. Je me suis bien sûr également autorisé à corriger des fautes d'orthographe ou certaines tournures de phrases, ou à ajouter quelques précisions, là où le texte pouvait paraître ambigu. J'ai également corrigé quelques coquilles (il doit sûrement en rester), mais le fond est inchangé.

Je remercie Jean-Louis Loday qui a bien voulu écrire une préface pour cette « réédition ». C'est en grande partie grâce à ses travaux et à ceux de son équipe de recherche que cette thèse retrouve aujourd'hui une certaine audience.

1. À une époque où je faisais de la topologie algébrique et non comme aujourd'hui de la logique catégorique.

Préface 2011

par Jean-Louis Loday

Lors d'une discussion avec Bruno Vallette pendant la rédaction de notre ouvrage « Algebraic Operads », une vague réminiscence m'est revenue en mémoire : celle d'un papier d'Alain Prouté que je m'étais promis de lire en détail sans l'avoir jamais fait. Après avoir vainement cherché sur internet, et comme la discussion se passait dans mon bureau, j'ai plongé dans mon armoire à prépublications pour finalement en ressortir un gros document à couverture orange : la thèse d'État d'Alain Prouté soutenue en 1986 à Paris et jamais publiée. Et notre surprise fut à son comble : écrit il y a plus 25 ans ce texte était d'une étonnante actualité. Il contenait la dualité bar-cobar entre cogèbres associatives et A_∞-algèbres, ainsi que celle entre A_∞-cogèbres et algèbres associatives. C'était justement cette dualité bar-cobar avec ses morphismes tordants, alias cochaînes de Brown, et ses morphismes de Koszul que nous étions en train de mettre au point pour les algèbres, puis les opérades, puis les algèbres sur une opérade.

À l'époque ce texte a dû dérouter les lecteurs potentiels par son originalité de rédaction, sans doute trop algébrique pour les topologues. Quand aux algébristes ils ne s'intéressaient pas encore aux algèbres à homotopie près. Il est exceptionnel qu'en 25 ans ce texte n'ait pas pris une ride, ni sur le fond, ni sur la forme.

La motivation originelle de Prouté, calculer les groupes d'homotopie des sphères via une théorie du modèle minimal à la Sullivan en caractéristique p, est toujours d'actualité puisqu'on ne sait pas encore calculer la partie p-primaire de ces groupes d'homotopie. Mieux, à la fin de son texte (voir aussi la fin de l'introduction), il met le doigt sur le problème crucial de la dualité bar-cobar en associatif : traiter le cas des A_∞-cogèbres vers les A_∞-algèbres. Comme il le fait remarquer, la résolution de ce problème nécessite de mettre une structure de A_∞-algèbre sur le produit tensoriel de deux A_∞-algèbres et donc il nécessite la construction d'une diagonale cellulaire pour le polytope de Stasheff. Or il se trouve qu'au jour d'aujourd'hui (2011) cette question est en pleine effervescence.

Il est très dommage que ce texte n'ait pas été accessible à la communauté mathématique pendant tout ce temps. Il faut remercier Alain Prouté d'avoir pris la peine d'en faire une version LaTeX, en respectant scrupuleusement le texte d'origine, et de lui donner ainsi une visibilité digne de sa valeur. Je suis sûr qu'il influencera durablement la recherche en topologie algébrique et en algèbre homologique.

Jean-Louis Loday — Le Pouliguen, 14 juin 2011.

à Paul Prouté

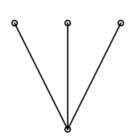
Introduction

Ces notes sont issues de l'idée de généraliser la théorie du modèle minimal de Sullivan [12] aux coefficients $\mathbb{Z}/p$ (p premier).([2]) La situation est bien sûr plus complexe que dans le cas rationnel, à cause de la non-existence de solution au problème des cochaînes commutatives, laquelle est conséquence immédiate de l'existence des opérations de Steenrod. Le point qui m'est apparu comme central dans la théorie de Sullivan est le lemme de Hirsch, qui permet, étant donné une fibration $K(\mathbb{Q}, n-1) \longrightarrow E \longrightarrow B$, de classe caractéristique $\overline{k} \in H^n(B; \mathbb{Q})$, de construire à partir du modèle minimal de B et d'un cocycle k représentant $\overline{k}$, un modèle minimal pour E. C'est donc essentiellement à la généralisation de ce lemme de Hirsch que j'ai travaillé, c'est pourquoi ce mémoire traite de l'homologie des fibrations de fibre $K(\mathbb{Z}/p, n)$. Inutile de dire qu'il ne résoud pas complètement le problème, loin de là, toutefois il introduit en détails une technique inaugurée par Kadeishvili [19] : celle de l'utilisation des A_∞-structures de Stasheff [33], dans le domaine de l'homologie des fibrations.

Les chapitres 1 et 2 contiennent des rappels sur les sujets suivants : DGA-algèbres et coalgèbres, cup et cap-produits, cochaînes de Brown (ou cochaînes tordantes), produits tensoriels tordus, algèbres et coalgèbres libres, fibrations principales, théorème d'Eilenberg-Zilber tordu, théorème de comparaison de Moore et Cartan pour les constructions, bar et cobar-constructions, espaces $K(\mathbb{Z}/p, n)$, petites constructions de Cartan, calcul de Cartan des algèbres $H_*(\mathbb{Z}/p, n; \mathbb{Z}/p)$. La présentation des bar et cobar-constructions, et des calculs de Cartan exploitent systématiquement la notion de cochaîne de Brown, ce qui permet de décrire de façon très concise les petites constructions de Cartan. On remarquera en particulier les lemmes (2.34) et (2.42).

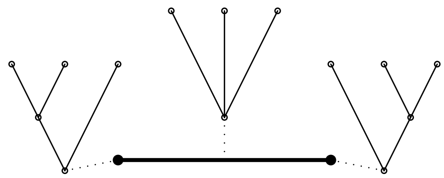
C'est dans le chapitre 3 qu'on aborde le sujet central de ce mémoire, les A_∞-algèbres et coalgèbres. Une A_∞-algèbre est un objet un peu plus général qu'une DGA-algèbre, en ce sens qu'on affaiblit l'axiome d'associativité du produit. Au lieu de demander que $\mu(\mu \otimes 1)$ et $\mu(1 \otimes \mu)$ soient égaux, on demande seulement qu'ils soient homotopes, dans un sens fort, que je vais décrire brièvement. $\mu(\mu \otimes 1)$ et $\mu(1 \otimes \mu)$ peuvent être vus comme des points dans $\mathrm{Hom}(A^3, A)$ (où A est la A_∞-algèbre), et une homotopie, au sens ordinaire, est donc un « segment » joignant ces deux points. Pour rendre les chose plus lisibles, convenons de représenter $\mu(\mu \otimes 1)$ et $\mu(1 \otimes \mu)$ par les arbres :

c'est-à-dire que $(\mu(\mu \otimes 1))(x \otimes y \otimes z)$ est ce qu'on obtient en écrivant x, y et z au dessus de chaque feuille de l'arbre, et en effectuant les produits en suivant les embranchements de l'arbre. L'homotopie entre ces deux arbres sera représentée par l'arbre :

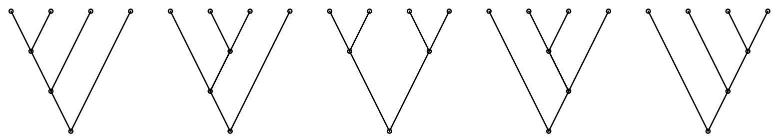


et on aura dans $\mathrm{Hom}(A^3, A)$ le dessin :

2. J'ai eu le privilège lorsque j'étais étudiant, d'assister au cours que Dennis Sullivan a donné à l'Université d'Orsay en 1973 sur son modèle minimal rationnel. C'est une expérience qui m'a profondément marqué.



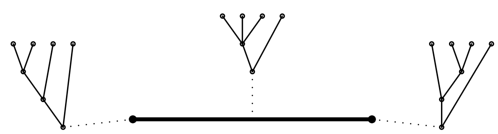
Que va-t-il se passer si nous faisons maintenant des produits de quatre éléments ? Il est clair qu'il n'y a que cinq manières de procéder, qui correspondent aux cinq arbres binaires à quatre feuilles :



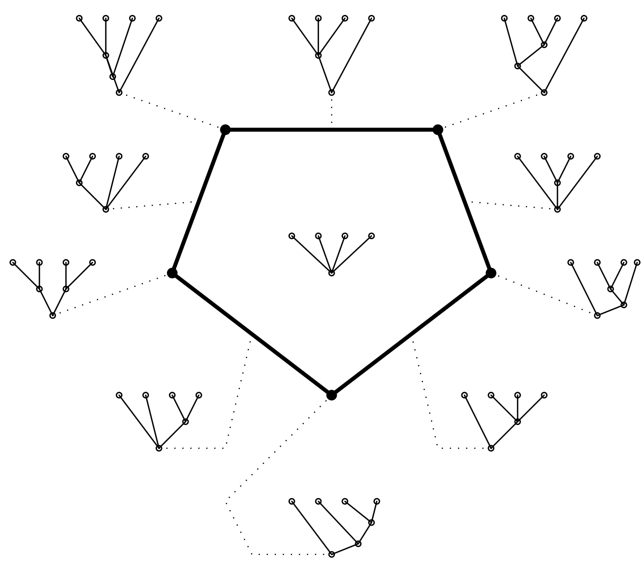
et qui sont associés aux expressions :

$$\begin{array}{l}\mu(\mu\otimes 1)(\mu\otimes 1\otimes 1)\\ \mu(\mu\otimes 1)(1\otimes\mu\otimes 1)\\ \mu(\mu\otimes\mu)\\ \mu(1\otimes\mu)(1\otimes\mu\otimes 1)\\ \mu(1\otimes\mu)(1\otimes 1\otimes\mu)\end{array}$$

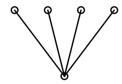
Si on appelle h l'homotopie de $\mu(\mu\otimes 1)$ à $\mu(1\otimes\mu)$, alors $\mu(h\otimes 1)$ est une homotopie de $\mu(\mu\otimes 1)(\mu\otimes 1\otimes 1)$ à $\mu(\mu\otimes 1)(1\otimes\mu\otimes 1)$. Comme h est maintenant noté comme un arbre, on a dans $\mathrm{Hom}(A^4, A)$ le dessin suivant :



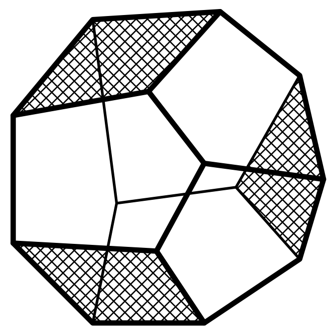
En fait, si on examine tous les cas particuliers, on obtient le pentagone de Stasheff :



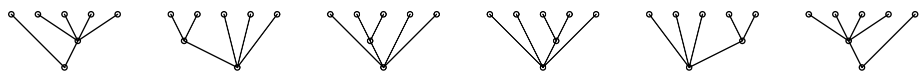
Ce pentagone constitue un cycle dans $\mathrm{Hom}(A^4, A)$, et nous demandons qu'il soit le bord d'un opérateur de degré 2 de A^4 dans A, que nous notons :



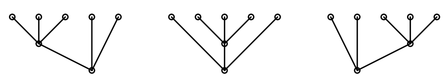
Puis nous pouvons continuer et dessiner dans $\mathrm{Hom}(A^5, A)$, et ainsi de suite. On découvre une suite de polyèdres, qu'on note K_i $(i \geq 2)$, et qui ont été introduits par Stasheff dans [15]. Le lecteur pourra vérifier, en dessinant tous les arbres à cinq feuilles, que la figure suivante représente K_5 :



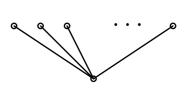
Noter la présence de six pentagones, correspondants aux arbres :



et de trois carrés correspondant à :



Stasheff [15] a montré que K_n est isomorphe à la boule D_{n-2}. Chaque arbre :



(n feuilles)

correspond donc à un opérateur $m_n : A^n \longrightarrow A$ (avec $m_2 = \mu$), de degré $n-2$, la famille $(m_i)_{i\geq 2}$ vérifiant les relations de bord convenables, qui ne sont autres que la traduction de la structure des polyèdres de Stasheff. Les m_i constituent la structure de A_∞-algèbre de A. On verra qu'il est naturel de poser $m_1 = \partial$. Les formules sont données dans la définition (3.2).

Dans cet exposé, j'ai opté pour une façon plus formelle d'introduire ces structures. La philosophie peut s'en résumer ainsi :

Soit A une DGA-algèbre. Nous avons introduit au chapitre 2, la bar-construction $B(A)$ de A (définition (2.10)), qui est une DGA-coalgèbre « libre », c'est-à-dire la coalgèbre tensorielle d'un certain module M :

$$B(A) = \bigoplus_{n\geq 0} M^n$$

Or la différentielle ∂ d'une coalgèbre libre est déterminée par ses composantes :

$$\partial_i : M^i \longrightarrow M$$

et dans la bar-construction $B(A)$, seules deux de ces composantes sont non nulles, ce sont ∂_1 et ∂_2 qu'on appelle parfois « composante linéaire » et « composante quadratique » de ∂. Ceci est dû au fait que ∂_1

et ∂_2 sont à peu de choses près les flèches :

$$\partial : A \longrightarrow A$$
$$\mu : A^2 = A \otimes A \longrightarrow A$$

Prenons maintenant le problème à l'envers. Partons d'une DGA-coalgèbre libre du type le plus général, c'est-à-dire que les diverses composantes $\partial_1, \partial_2, \partial_3, \dots, \partial_i, \dots$ de la différentielle existent effectivement, et essayons de voir cette DGA-coalgèbre comme la bar-construction de quelque chose. En remplissant ce programme, on trouve exactement la définition des A_∞-algèbres de Stasheff, la composante ∂_i donnant naissance à l'opérateur m_i.

Cette présentation des A_∞-algèbres est donc également très naturelle. Elle a l'avantage d'être très facile à formaliser, en particulier, comme M n'est autre que $\uparrow\overline{A}$, la suspension du noyau de l'augmentation, les conventions de Koszul nous fournissent les signes convenables dans les formules de (3.2), avec un minimum d'efforts.

Les morphismes sont introduits dans le même état d'esprit, ce qui conduit très simplement et quasi-mécaniquement aux formules (3.4).

Cette présentation est donc plus rentable que celle utilisant les polyèdres de Stasheff, la contre-partie étant qu'elle ne s'applique pas directement à la situation topologique des A_∞-espaces, mais ces derniers ne font pas partie de nos préoccupations dans ce mémoire.

Vient ensuite une partie technique (de (3.5) à (3.12)) pour garder le contrôle des unités et co-unités dans les A_∞-algèbres et coalgèbres. La définition (3.13) résume la logique interne de cette présentation.

On voit donc que le passage d'une A_∞-algèbre à sa bar-construction définit un isomorphisme de catégories :

$$A_\infty\text{-algèbres} \xrightarrow{\text{bar}} \text{DGA-coalgèbres libres}$$

De même, on a un isomorphisme de catégories :

$$A_\infty\text{-coalgèbres} \xrightarrow{\text{cobar}} \text{DGA-algèbres libres}$$

ce qui fait que tout énoncé de type A_∞ peut être facilement « traduit » en un énoncé de type DGA-libre. Je reparlerai de cette traduction plus loin, et la désignerai dans la suite : A_∞-traduction.

C'est J.D. Stasheff qui a introduit la bar et la cobar-construction pour les A_∞-algèbres et coalgèbres dans [15], sous les noms de tilde et cotilde-constructions. Étant donné le point de vue géométrique qu'il avait adopté, et qui résultait du fait que sa préoccupation principale était l'étude des H-espaces, ces tilde et cotilde-constructions étaient loin d'être des trivialités, comme elles peuvent paraître l'être ici. Mais ce dernier point est simplement dû au fait que les tilde et cotilde-constructions sont prises ici en quelque sorte comme axiomes, et que nous en tirons les définitions des A_∞-algèbres et coalgèbres (voir la définition (3.1)).

Comme nous avons généralisé la notion de DGA-algèbre, il fallait bien sûr en faire de même de celle de cochaîne de Brown. C'est ce qui est fait ensuite. La formule de Brown est remplacée par les formules (3.16), qui restent heureusement fort simples.

Remarquer que nous n'envisageons que les cochaînes des types suivants :

$$\text{DGA-coalgèbres} \longrightarrow A_\infty\text{-algèbres}$$

$$A_\infty\text{-coalgèbres} \longrightarrow \text{DGA-algèbres}$$

appelées respectivement β-cochaînes et γ-cochaînes, mais nous n'envisageons pas la situation :

$$A_\infty\text{-coalgèbre} \longrightarrow A_\infty\text{-algèbre}$$

En fait, donner une définition d'un tel objet est un problème équivalent à celui de définir le produit tensoriel de deux A_∞-algèbres, que je n'ai pas su résoudre explicitement, et dont je reparlerai plus loin.

La β-cochaîne canonique $\beta : B(A) \longrightarrow A$ et la γ-cochaîne canonique $\gamma : C \longrightarrow \Omega(C)$, où A est une A_∞-algèbre, et C une A_∞-coalgèbre, conservent leur caractère universel (3.17).

Sont introduites ensuite les notions de produit tensoriel tordu correspondant à ces nouvelles cochaînes de Brown, ainsi que les morphismes entre produits tordus. Certaines vérifications exigent quelques calculs, que j'ai complètement explicités ((3.18) à (3.23)), par soucis de complétude et parce qu'ils me semblent être fondamentaux.

On en déduit les théorèmes (3.24) et (3.25), qui seront d'un usage fréquent dans la suite. Ils constituent une façon très générale d'écrire un théorème de comparaison pour les constructions.

Le chapitre 4 traite de la notion d'homotopie pour les cochaînes de Brown. Ici encore, cette notion est introduite de façon très naturelle ((4.1) et (4.3)). Elle s'étend facilement aux β et γ-cochaînes (4.5). Fixons-nous une A_∞-algèbre A. On a la β-cochaîne canonique $\beta : B(A) \longrightarrow A$. On a vu en (3.17) qu'il est équivalent de se donner une β-cochaîne $t : C \longrightarrow A$ (où C est une DGA-coalgèbre), ou un morphisme de DGA-coalgèbres $\psi : C \longrightarrow B(A)$, le lien entre t et ψ étant la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} & A & \\ C \arrow[ur, "t"] \arrow[rr, "\psi"'] & & B(A) \arrow[ul, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

(universalité de β parmi les β-cochaînes). Bien entendu, cette correspondance respecte la notion d'homotopie, c'est d'ailleurs comme cela qu'est définie l'homotopie entre les β-cochaînes.

Un des points essentiels de toute théorie homotopique est d'établir des théorèmes de relèvement et d'extension à homotopie près. On a les théorèmes suivants (où $\simeq$ signifie « induit un isomorphisme en homologie », et où $\dashrightarrow$ est la flèche dont l'existence est affirmée par le théorème. Les diagrammes sont homotopiquement commutatifs) :

relèvement des γ-cochaînes (th. (4.18))

$$\begin{tikzcd} \text{DGA-algèbre} \arrow[r, "\simeq"] & \text{DGA-algèbre} \\ & A_\infty\text{-coalgèbre} \arrow[u] \arrow[ul, dotted] \end{tikzcd}$$

extension des γ-cochaînes (th. (4.20))

$$\begin{tikzcd} \text{DGA-algèbre} & \\ A_\infty\text{-coalgèbre} \arrow[u] \arrow[r, tail, "\simeq"'] & A_\infty\text{-coalgèbre} \arrow[ul, dotted] \end{tikzcd}$$

relèvement des β-cochaînes (th. (4.26))

$$\begin{tikzcd} A_\infty\text{-algèbre} \arrow[r, tail, "\simeq"] & A_\infty\text{-algèbre} \\ & \text{DGA-coalgèbre} \arrow[u] \arrow[ul, dotted] \end{tikzcd}$$

extension des β-cochaînes (th. (4.24))

$$\begin{tikzcd} A_\infty\text{-algèbre} & \\ \text{DGA-coalgèbre} \arrow[u] \arrow[r, "\simeq"'] & \text{DGA-coalgèbre} \arrow[ul, dotted] \end{tikzcd}$$

En traduisant ces théorèmes via la A_∞-traduction, on obtient des théorèmes de type Adams-Hilton. Par exemple, le théorème (4.18) devient : « Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme de DGA-algèbres induisant un isomorphisme en homologie, L une DGA-algèbre libre et connexe, $g : L \longrightarrow B$ un morphisme de DGA-algèbres. Alors g se relève à homotopie près d'une unique façon. »

Nous arrivons avec le chapitre 5 au modèle minimal de Baues-Lemaire et au théorème de Kadeishvili. Ces deux théories ne sont que deux aspects d'un même phénomène, la correspondance entre les deux se faisant par la A_∞-traduction. On a un isomorphisme de catégories :

$$\begin{tikzcd} A_\infty\text{-coalgèbres simplement connexes} \arrow[d, "\text{cobar}"] \\ \text{DGA-algèbres libres et connexes} \end{tikzcd}$$

Dans chacune des deux catégories, on a une notion de quasi-isomorphisme (c'est la relation d'équivalence engendrée par le fait d'induire un isomorphisme en homologie), et ces deux notions se correspondent par la A_∞-traduction.

Le problème est d'isoler dans chaque classe de quasi-isomorphisme un représentant, bien défini à isomorphisme près, qu'on appelle modèle minimal. C'est ce qu'ont fait Baues et Lemaire dans la catégorie des DGA-algèbres connexes et c'est ce qu'a fait Kadeishvili dans celle des A_∞-coalgèbres simplement connexes, et il s'avère qu'on a le « diagramme commutatif » :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\text{Kadeishvili}"] \arrow[d, "\text{cobar}"'] & C' \arrow[d, "\text{cobar}"] \\ \Omega(C) \arrow[r, "\text{Baues-Lemaire}"'] & \Omega(C') \end{tikzcd}$$

où C est une A_∞-coalgèbre simplement connexe. Plus précisément, si on note $\mathcal{M}(A)$ le modèle minimal de Baues-Lemaire de A, et $\mathcal{K}(C)$ le modèle minimal de Kadeishvili de C, on a un isomorphisme (canonique à homotopie près) :

$$\mathcal{M}(\Omega(C)) \longrightarrow \Omega(\mathcal{K}(C))$$

(Noter que le problème de trouver un modèle minimal dans la catégorie des DGA-algèbres connexes, se ramène immédiatement à celui d'en trouver un dans la catégorie des DGA-algèbres libres connexes, à cause du quasi-isomorphisme canonique $\Omega(B(A)) \longrightarrow A$.)

Dans le présent texte, je donne une démonstration de l'existence et de l'unicité de $\mathcal{M}(A)$, qui est différente de celle de Baues et Lemaire, et très proche de la technique utilisée par Kadeishvili. Toutefois, l'utilisation de ce type d'argument remonte à Brown et Cockroft [9]. L'aspect A_∞-algèbres connexes et DGA-coalgèbres simplement connexes est lui aussi traité en détails.

Je profite de cette remarque pour signaler au lecteur, que bien que j'emploie souvent dans le texte le mot « dual », les deux situations ne le sont en fait pas au sens strict. En effet, le concept dual de celui d'algèbre différentielle (avec une différentielle de degré -1) graduée positivement, est celui de coalgèbre différentielle (avec une différentielle de degré -1), graduée négativement (ou si on veut, celui de coalgèbre différentielle avec une différentielle de degré $+1$, et graduée positivement). mais certainement pas celui de coalgèbre différentielle (avec une différentielle de degré -1) graduée positivement. Ce sont deux concepts foncièrement différents, c'est pourquoi je donne certaines fois les deux démonstrations, sauf dans le cas où c'est trivialement la même chose (par exemple si la différentielle est inexistante). Cette différence est illustrée par le fait que certains énoncés exigent la simple connexité, alors que d'autres se contentent de la connexité.

Les résultats des chapitres 3, 4 et 5 fournissent alors le théorème (5.14), qu'on peut résumer informellement comme suit :

Supposons que $G \longrightarrow E \longrightarrow X$ soit une fibration principale, où X est simplement connexe, et où $H_*(G)$ est quasi-isomorphe (comme DGA-algèbre) à $C_*(G)$ (cette dernière hypothèse signifiant que le modèle minimal de Kadeishvili de $C_*(G)$ est une DGA-algèbre, autrement-dit que les opérateurs m_i de la structure de A_∞-algèbre de $H_*(G)$ sont nuls pour $i \geq 3$; remarquer que cette hypothèse est satisfaite par les groupes simpliciaux $K(\pi, n)$). Alors le produit tensoriel tordu fourni par le théorème d'Eilenberg-Zilber tordu :

$$C_*(X) \otimes_t C_*(G)$$

est équivalent (homologiquement) à un γ-produit :

$$H_*(X) \otimes_{t'} H_*(G)$$

où $H_*(X)$ reçoit la structure de A_∞-coalgèbre qui en fait le modèle minimal de Kadeishvili de la DGA-coalgèbre $C_*(X)$. Il suffirait donc pour calculer l'homologie de E d'être capable de déterminer les $\Delta_i : H_*(X) \longrightarrow H_*(X)^i$ $(i \geq 2)$, et la γ-cochaîne $t' : H_*(X) \longrightarrow H_*(G)$, puis d'appliquer les formules établies au chapitre 3.

Malheureusement, la détermination des Δ_i n'est pas facile. Ceci tient certainement au fait que ces opérateurs ne sont pas invariants par un isomorphisme de la structure de A_∞-coalgèbre.

Dans le chapitre 6, j'essaie de calculer les Δ_i pour $X = K(\mathbb{Z}/p, n)$. L'idée est la suivante : le théorème (5.14) s'applique à la situation $K(\mathbb{Z}/p, n-1) \longrightarrow E \longrightarrow K(\mathbb{Z}/p, n)$, avec E contractile. Il existe donc un γ-produit acyclique :

$$H_*(K(\mathbb{Z}/p, n)) \otimes_t H_*(K(\mathbb{Z}/p, n-1))$$

Pourquoi ce γ-produit ne serait-il pas identique à la construction de Cartan construite à la fin du chapitre 2 ? La construction de Cartan est un produit tensoriel infini de petites constructions des types (2.47) et (2.49). La construction (2.47) ne pose pas de problème, car elle est un produit tensoriel tordu ordinaire, donc en particulier un γ-produit. Par ailleurs, (2.49) est un γ-produit et on calcule dans le chapitre 6 les Δ_i et la cochaîne de Brown correspondante. Il ne reste plus qu'à faire un produit tensoriel infini de γ-produits. Or c'est ici que les difficultés commencent, car on tombe sur le problème de définir (explicitement) le produit tensoriel de deux A_∞-coalgèbres minimales. Plus précisément, soient (C, Δ_i) et (C', Δ'_i) deux A_∞-coalgèbres minimales ($\Delta_1 = 0$ et $\Delta'_1 = 0$). Peut-on donner des formules explicites pour des opérateurs :

$$\Delta''_i : C \otimes C' \longrightarrow (C \otimes C')^i \qquad\qquad (i \geq 2, \Delta''_1 = 0)$$

satisfaisant la définition des A_∞-coalgèbres, et bien sûr une autre condition pour que $C \otimes C'$ joue le rôle voulu de produit tensoriel ? Il semble que la condition la plus agréable soit que :

$$\gamma * \gamma' : C \otimes C' \longrightarrow \Omega(C) \otimes \Omega(C')$$

soit une γ-cochaîne et que :

$$(C \otimes C') \otimes_{\gamma * \gamma'} (\Omega(C) \otimes \Omega(C'))$$

soit isomorphe (via $1 \otimes T \otimes 1$) à :

$$(C \otimes_\gamma \Omega(C)) \otimes (C' \otimes_{\gamma'} \otimes \Omega(C'))$$

(donc acyclique).

L'existence de tels Δ_i est facile à prouver, par exemple en considérant le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
& \Omega(C) \otimes \Omega(C') & \\
B\Omega(C) \otimes B\Omega(C') \arrow[ur, "\beta * \beta"] \arrow[rr, "\Psi"'] & & C'' \arrow[ul, "t"']
\end{tikzcd}$$

où C'' est le modèle minimal de Kadeishvili de la DGA-coalgèbre $B\Omega(C) \otimes B\Omega(C')$, et où la γ-cochaîne t est obtenue par extension à homotopie près (4.20). On a alors les isomorphismes d'espaces vectoriels :

$$\begin{array}{rcl}
C'' \simeq H_*(C'') & \simeq & H_*(B\Omega(C)) \otimes H_*(B\Omega(C')) \\
& \simeq & H_*(C) \otimes H_*(C') \\
& \simeq & C \otimes C'
\end{array}$$

et le γ-produit acyclique $(C \otimes C') \otimes_t (\Omega(C) \otimes \Omega(C'))$.

Par ailleurs, les diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} & \Omega(C) & \\ C \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[rr, "\sim"'] & & B\Omega(C) \arrow[ul, "\beta"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \Omega(C') & \\ C' \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[rr, "\sim"'] & & B\Omega(C') \arrow[ul, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

montrent que t s'identifie à $\gamma * \gamma$.

Par contre, il semble difficile de donner explicitement les Δ_i (sauf Δ_2 qui est certainement $(1 \otimes T \otimes 1)(\Delta_2 \otimes \Delta_2)$).

Le problème est équivalent, via la A_∞-traduction, à celui de déterminer explicitement le modèle minimal de Baues-Lemaire de $L \otimes L'$, où L et L' sont deux DGA-algèbres minimales (noter que $L \otimes L'$ n'est pas minimale en général, car même pas libre). Il est aussi équivalent au problème de la détermination explicite d'une approximation cellulaire de la diagonale pour les polyèdres de Stasheff.

Je tiens à remercier pour leur aide, leur soutien, ou l'attention qu'ils ont apporté à mon travail, Larry Breen, Henri Cartan, Annick Flanchec, Jean Lannes, Jean-Michel Lemaire, Marek Golasinski, Jean-Claude Thomas, Daniel Tanré, Micheline Vigué-Poirrier, Pierre Vogel et Michel Zisman.

Deux personnes méritent des remerciements particuliers. Il s'agit de Daniel Leborgne, qui depuis une dizaine d'années a eu la patience de m'écouter durant un nombre incalculable de journées passées dans son bureau, et James D. Stasheff, qui a lu le présent texte avec une très grande attention, et dont les nombreuses lettres enthousiastes furent pour moi le meilleur des encouragements.

Table des matières

Chapitre 1

Préliminaires.

1.1 Modules gradués et conventions de Koszul.

Soit Λ un anneau commutatif unitaire.([1])

(1.1) **Définition** : *Un Λ-module gradué est la donnée d'un Λ-module M et d'une famille de sous-modules M_n $(n \in \mathbb{Z})$ de M, tels que :*

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n = M.$$

Les éléments de M_n sont dits homogènes de degré n, ce qui sera noté $|x| = n$ pour $x \in M_n$.

(1.2) **Définition** : *Si M et N sont deux Λ-modules gradués, un homomorphisme homogène de degré p est une application Λ-linéaire :*

$$f : M \longrightarrow N$$

telle que $f(M_n) \subset N_{n+p}$. On écrira $|f| = p$. On notera 1 (ou 1_M) l'application identique de M.

Remarquer que $|1| = 0$.

(1.3) **Définition** : *Si M et N sont deux Λ-modules gradués, on fait de $M \otimes N$ un Λ-module gradué en posant :*

$$(M \otimes N)_n = \bigoplus_{p+q=n} (M_p \otimes N_q).$$

(1.4) **Définition** : *(Convention de Koszul) Soient $f : M \longrightarrow M'$, $g : N \longrightarrow N'$ deux homomorphismes homogènes. On définit :*

$$f \otimes g : M \otimes N \longrightarrow M' \otimes N'$$

en posant :

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = (-1)^{|g||x|} f(x) \otimes g(y).$$

On notera la permutation des lettres g et x dans l'ordre d'écriture des deux membres.

Les objets algébriques que nous manipulons représentent des objets géométriques. La notion de degré correspond à celle de dimension, et le signe à celle d'orientation. Par ailleurs, le produit tensoriel correspond à la notion de produit cartésien en topologie. Or prenons deux objets orientés de dimensions p et q, par exemple deux espaces

1. À partir de la section 2.4, nous supposerons que Λ est un corps.

vectoriels E et F. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E définissant son orientation, et $(f_1, \ldots, f_q)$ une base de F définissant son orientation. Alors les espaces $E \times F$ et $F \times E$ sont orientés et l'application canonique :

$$T : E \times F \longrightarrow F \times E$$

multiplie l'orientation par $(-1)^{pq}$, car c'est la signature de la permutation qui envoie la base $(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q)$ qui oriente $E \times F$, sur la base $(f_1, \ldots, f_q, e_1, \ldots, e_p)$ qui oriente $F \times E$.

Si nous voulons donc être en accord avec la géométrie, nous devrons introduire le signe $(-1)^{pq}$ chaque fois que nous permutons deux objets de degrés p et q.

Comme conséquence immédiate de cette définition, on a :

(1.5) **Scolie** : *Soient*

$$\begin{array}{rcl} f : M \longrightarrow M' & \qquad & g : N \longrightarrow N' \\ h : M' \longrightarrow M'' & \qquad & k : N' \longrightarrow N'' \end{array}$$

des homomorphismes homogènes. On a :

$$(h \circ f) \otimes (k \circ g) = (-1)^{|f||k|}(h \otimes k) \circ (f \otimes g). \ \square$$

(1.6) **Définition** : *Soient M et N deux Λ-modules gradués. On désigne par* $\mathrm{Hom}(M, N)$ *le Λ-module gradué défini par :*

$$\mathrm{Hom}(M, N)_n = \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(M_p, N_{n+p}).$$

Autrement-dit, les éléments de degré n de $\mathrm{Hom}(M, N)$ sont les homomorphismes homogènes de degré n de M dans N.

$\mathrm{Hom}(M, N)$ ne contient pas en général toutes les applications Λ-linéaires de M dans N, car elles ne sont pas toutes des sommes finies d'homomorphismes homogènes.

(1.7) **Définition** : *(Convention de Koszul) Si $f : M \longrightarrow M'$ et $g : N \longrightarrow N'$ sont des homomorphismes homogènes, on définit :*

$$\begin{array}{rcl} f^* & : & \mathrm{Hom}(M', N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, N) \\ g_* & : & \mathrm{Hom}(M', N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M', N') \end{array}$$

par :

$$\begin{array}{rcl} f^*(\alpha) & = & (-1)^{|\alpha||f|}\alpha \circ f \\ g_*(\alpha) & = & g \circ \alpha \end{array}$$

Noter la permutation des lettres f et α.

(1.8) **Scolie** : *Quand ces compositions sont définies, on a les relations :*

$$\begin{array}{rcl} (g \circ f)^* & = & (-1)^{|f||g|} f^* \circ g^* \\ (g \circ f)_* & = & g_* \circ f_*. \ \square \end{array}$$

(1.9) **Définition** : *Un Λ-module gradué M est dit gradué positivement (resp. négativement) si $M_p = 0$ pour $p < 0$ (resp. $p > 0$). Il est dit minoré si $M_p = 0$ pour p assez petit.*

Nous considérons Λ comme un Λ-module gradué (positivement et négativement), en posant $\Lambda = \Lambda_0$. Nous identifions canoniquement :

$$\begin{array}{rcl} M \otimes \Lambda & \simeq & M \\ \Lambda \otimes M & \simeq & M \\ \mathrm{Hom}(\Lambda, M) & \simeq & M \end{array}$$

Le Λ-module gradué $\mathrm{Hom}(M, \Lambda)$ sera noté M^*. Si M est gradué positivement, M^* est gradué négativement, et vice versa.

1.2 Différentielles.

(1.10) **Définition** : *Soit M un Λ-module gradué. Une différentielle :*

$$\partial : M \longrightarrow M$$

est un homomorphisme de degré -1, tel que $\partial^2 = 0$. Si M est muni d'une différentielle, on l'appelle un DG-module (ou DG-Λ-module ; DG pour « différentiel gradué »).

(1.11) **Définition** : *Un morphisme de DG-modules :*

$$f : M \longrightarrow N$$

est un homomorphisme homogène tel que :

$$\partial f = (-1)^{|f|} f \partial.$$

(1.12) **Définition** : *Soit M un DG-module. Une augmentation (resp. coaugmentation) est un morphisme de DG-modules de degré 0 :*

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon & : & M \longrightarrow \Lambda \\ \text{(resp. } \eta & : & \Lambda \longrightarrow M) \end{array}$$

(1.13) **Définition** : *Un DGA-module (ou DGA-Λ-module) est un DG-module M muni d'une augmentation ε et d'une coaugmentation η, telles que :*

$$\varepsilon \circ \eta = 1_\Lambda.$$

(DGA pour « différentiel gradué augmenté »).

(1.14) **Définition** : *Un DGA-module M gradué positivement ou négativement est dit connexe si $\varepsilon : M_0 \longrightarrow \Lambda$ est un isomorphisme. Il est dit simplement connexe si de plus $M_{-1} = M_1 = 0$.*

(1.15) **Lemme** : *Si M et N sont des DGA-modules, on fait de $M \otimes N$ (resp. $\mathrm{Hom}(M, N)$) un DGA-module, en posant :*

$$\begin{gathered} \partial = \partial \otimes 1 + 1 \otimes \partial,\ \varepsilon = \varepsilon \otimes \varepsilon,\ \eta = \eta \otimes \eta \\ \text{(resp. } d = \partial_* - \partial^*,\ \varepsilon = \varepsilon_* \eta^*,\ \eta = \eta\varepsilon) \end{gathered}$$

La vérification est immédiate. En explicitant, on obtient :

$$\begin{gathered} \partial(x \otimes y) = \partial x \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes \partial y,\ \varepsilon(x \otimes y) = \varepsilon(x)\varepsilon(y),\ \eta(1) = \eta(1) \otimes \eta(1) \\ \text{(resp. } d(\alpha) = \partial \circ \alpha - (-1)^{|\alpha|} \alpha \circ \partial,\ \varepsilon(\alpha) = \varepsilon\alpha\eta,\ \eta(1) = \eta\varepsilon) \end{gathered}$$

(1.16) **Définition** : *Un morphisme de DGA-modules :*

$$f : M \longrightarrow N$$

est un morphisme de DG-modules tel que :

$$\varepsilon f = \varepsilon,\ f\eta = \eta$$

(1.17) **Lemme** : *Les homomorphismes canoniques :*

$$\begin{array}{rcl} \circ & : & \mathrm{Hom}(N, P) \otimes \mathrm{Hom}(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, P) \\ \otimes & : & \mathrm{Hom}(M, M') \otimes \mathrm{Hom}(N, N') \longrightarrow \mathrm{Hom}(M \otimes M', N \otimes N') \end{array}$$

sont des homomorphismes de DGA-modules.

On a en particulier les relations :

$$\begin{array}{rcl} d(g\circ f) & = & dg\circ f+(-1)^{|g|}g\circ df \\ d(f\otimes g) & = & df\otimes g+(-1)^{|f|}f\otimes dg \end{array}$$

La vérification est laissée au lecteur. □

(1.18) **Lemme** : *Si*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de DGA-modules (f et g homogènes), on a la suite exacte d'homologie :

$$\begin{tikzcd} & H_*(B) \arrow[dr, "g_*"] & \\ H_*(A) \arrow[ur, "f_*"] & & H_*(C) \arrow[ll, "\partial_*"] \end{tikzcd}$$

Le connectant ∂_* peut être décrit ainsi : Soit x un cycle de C, soit u un antécédent de x par g, alors ∂u est un cycle de A représentant $\partial_*([x])$.([2]) Le résultat est indépendant du choix de x et de u. En dessin, on a :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial"'] & B_n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\partial"'] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] \arrow[dll, dotted, "\partial_*"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "f"'] & B_{n-1} \arrow[r, "g"'] & C_{n-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

La démonstration de (1.18) n'est qu'une suite de vérifications laissées au lecteur. □

1.3 Le cône d'un morphisme et son utilisation.

(1.19) **Définition** : *Soit*

$$f : M \longrightarrow N$$

un morphisme de DG-modules. On définit le cône de f, $C(f)$ par :

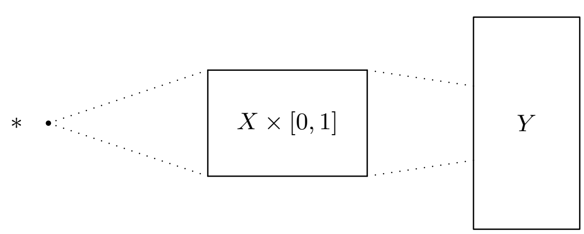
$$\begin{array}{rcl} C(f)_n & = & M_{n-1}\oplus N_n \\ \partial(x,y) & = & (-\partial x, f(x)+\partial y). \end{array}$$

On vérifie que $\partial^2=0$. L'augmentation est celle de N.

Cette définition est directement inspirée de la topologie. En effet, dans le cas topologique, le cône d'une application continue :

$$f : X \longrightarrow Y$$

est l'espace topologique obtenu en prenant la réunion disjointe de $X\times[0,1]$ et de Y, et en identifiant d'une part les éléments de la forme $(x,0)$ avec un point $*$, et ceux de la forme $(x,1)$ avec $f(x)$:



2. Où $[x]$ est la classe d'homologie de x.

Dans la situation algébrique, nous négligeons le point de base $*$ (ce qui aura pour effet que l'homologie du cône sera nulle, au lieu d'être celle d'un point comme dans la situation topologique, dans le cas où f induit un isomorphisme en homologie). Les simplexes singuliers de X peuvent être remplacés par leurs cônes, de façon à représenter le cône de X, d'où le décalage de 1 en degré. Enfin, le bord du cône sur un simplexe x de dimension n (qui est un simplexe de dimension $n+1$) est constitué de la face opposée au sommet 0 (qui est le sommet du cône), donc de $f_*(x)$, et des autres faces, qui ne sont que les cônes sur les faces originelles de x. Le numérotage de ces faces étant décalé de 1, on a un changement de signe, d'où le $-\partial x$.

On a la suite exacte de complexes :

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} C(f) \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0$$

où α et β sont respectivement l'injection et la projection canoniques. α et β commutent aux différentielles, À vrai dire, β (qui est de degré -1) anticommute aux différentielles, mais on conviendra de dire que deux applications de degrés impairs commutent quand elle anticommutent.

(1.20) **Lemme** : *On a la suite exacte :*

$$\begin{tikzcd} & H_*(C(f)) \arrow[dr, "\beta_*"] & \\ H_*(N) \arrow[ur, "\alpha_*"] & & H_*(M) \arrow[ll, "f_*"] \end{tikzcd}$$

Compte tenu de la description précédente du connectant, on voit que $\partial_* = f_*$. $\square$

(1.21) **Définition** : *Nous dirons qu'un DGA-module M est inessentiel s'il existe une application linéaire homogène de degré $+1$:*

$$h : M \longrightarrow M$$

telle que :

$$\partial h + h\partial = 1$$

Nous dirons que M est homologiquement nul si $H_*(M) = 0$.

Bien sûr, tout DGA-module inessentiel est homologiquement nul. Il y a une sorte de réciproque :

(1.22) **Lemme** : *Si M est projectif, homologiquement nul et minoré, il est inessentiel.*

Il est facile de construire h par récurrence sur le degré. $\square$

(1.23) **Définition** : *Soient $f : M \longrightarrow N$ et $g : M \longrightarrow N$ deux morphismes de DG-modules de même degré k. Une homotopie de f à g est une application de degré $k+1$:*

$$h : M \longrightarrow N$$

telle que :

$$g - f = \partial h - (-1)^{|h|} h\partial.$$

Remarquer que $f : M \longrightarrow N$ est un homomorphisme de DG-modules si df est nul dans $\mathrm{Hom}(M, N)$, et que h est une homotopie de f à g si $g - f = dh$ dans $\mathrm{Hom}(M, N)$.

On vérifie facilement que l'homotopie est une relation d'équivalence.

On dit que $f : M \longrightarrow N$ est une équivalence d'homotopie s'il existe $g : N \longrightarrow M$ telle que gf soit homotope à 1_M et fg à 1_N.

(1.24) **Lemme** : *Si $f : M \longrightarrow N$ induit un isomorphisme en homologie, et si M et N sont projectifs et minorés, alors f est une équivalence d'homotopie.*

L'hypothèse implique que $C(f)$ est projectif, homologiquement nul et minoré. Il existe donc :

$$H : C(f) \longrightarrow C(f)$$

tel que :

$$\partial H + H\partial = 1.$$

En notation matricielle, compte tenu de la décomposition :

$$C(f) = M \oplus N$$

et en posant :

$$H = \begin{pmatrix} \lambda & g \\ \nu & \mu \end{pmatrix}$$

on a :

$$\begin{pmatrix} -\partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & g \\ \nu & \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & g \\ \nu & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne en particulier :

$$\begin{array}{rcl} -\partial g + g\partial & = & 0 \\ -\partial\lambda - \lambda\partial + gf & = & 1 \\ fg + \partial\mu + \mu\partial & = & 1 \end{array}$$

Ceci prouve que g est un inverse homotopique pour f. □

(1.25) **Lemme** : *Soit M un DG-module admettant une décomposition en somme directe de deux modules gradués :*

$$M = A \oplus B$$

telle que la différentielle ∂ de M s'écrive matriciellement :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

compte tenu de cette décomposition. Alors, si

$$\beta : A \longrightarrow B$$

est bijectif, M est homologiquement nul.

Écrivons $\partial^2 = 0$:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ou encore :

$$\begin{array}{rcl} \alpha^2 & = & 0 \\ \beta\alpha + \gamma\beta & = & 0 \\ \gamma^2 & = & 0 \end{array}$$

Autrement-dit, α et γ sont des différentielles sur A et B respectivement, et β (qui est de degré -1) est un DG-homomorphisme. De plus M s'identifie à $C(\beta)$. Le résultat découle alors de (1.20). □

(1.26) **Définition** : *Nous dirons que M est acyclique si :*

$$\varepsilon : M \longrightarrow \Lambda$$

induit un isomorphisme en homologie, et qu'il est contractile si ε est une équivalence d'homotopie.

Il résulte des lemmes précédents que si M est acyclique, projectif et minoré, il est contractile.

(1.27) **Lemme** : *Si M et N sont contractiles, il en est de même de $M \otimes N$.*

Soient $h : M \longrightarrow M$ et $k : N \longrightarrow N$ des contractions. Alors,

$$h \otimes 1 + \varepsilon \otimes k \qquad \text{et} \qquad h \otimes \varepsilon + 1 \otimes k$$

sont des contractions pour $M \otimes N$. C'est une simple vérification. □

(1.28) **Définition** : *On notera $T : M \otimes N \longrightarrow N \otimes M$ l'application définie par :*

$$T(x \otimes y) = (-1)^{|x||y|} y \otimes x$$

1.4 DGA-algèbres et DGA-coalgèbres.

(1.29) **Définition** : *Une DGA-algèbre (resp. DGA-coalgèbre) est un DGA-module A (resp. C) muni d'un morphisme de DGA-modules :*

$$\begin{array}{ll} \mu : A \otimes A \longrightarrow A & \textit{(produit)} \\ \textit{(resp. } D : C \longrightarrow C \otimes C) & \textit{(coproduit)} \end{array}$$

vérifiant la propriété d'associativité :

$$\begin{array}{rcl} \mu(1 \otimes \mu) & = & \mu(\mu \otimes 1) \\ \textit{(resp. } (D \otimes 1)D & = & (1 \otimes D)D) \end{array}$$

et pour lequel η (resp. ε) est une unité bilatérale :

$$\begin{array}{rcl} \mu(\eta \otimes 1) & = & \mu(1 \otimes \eta) = 1 \\ \textit{(resp. } (1 \otimes \varepsilon)D & = & (\varepsilon \otimes 1)D = 1) \end{array}$$

Elle est dite commutative si de plus :

$$\begin{array}{rcl} \mu T & = & \mu \\ \textit{(resp. } TD & = & D) \end{array}$$

(1.30) **Définition** : *Un morphisme de DGA-algèbres $f : A \longrightarrow A'$ (resp. de DGA-coalgèbres $f : C \longrightarrow C'$) est un homomorphisme de DGA-modules vérifiant :*

$$\begin{array}{rcl} \mu(f \otimes f) & = & f\mu \\ \textit{(resp. } (f \otimes f)D & = & Df) \end{array}$$

(1.31) **Lemme** : *Si A et A' sont des DGA-algèbres (resp. C et C' des DGA-coalgèbres), on fait de $A \otimes A'$ (resp. $C \otimes C'$) une DGA-algèbre (resp. DGA-coalgèbre) en posant :*

$$\begin{array}{rcl} \mu & = & (\mu \otimes \mu)(1 \otimes T \otimes 1) \\ \textit{(resp. } D & = & (1 \otimes T \otimes 1)(D \otimes D)) \end{array}$$

La vérification est laissée au lecteur. □

(1.32) **Définition** : *Une DGA-algèbre de Hopf est une DGA-algèbre A munie d'un morphisme de DGA-algèbres :*

$$D : A \longrightarrow A \otimes A$$

faisant de A une DGA-coalgèbre.

Cette définition est trivialement équivalente à la suivante :

(1.33) **Définition** : *Une DGA-algèbre de Hopf est une DGA-coalgèbre A munie d'un morphisme de DGA-coalgèbres :*

$$\mu : A \otimes A \longrightarrow A$$

faisant de A une DGA-algèbre.

On a en particulier la relation :

$$D\mu = (\mu \otimes \mu)(1 \otimes T \otimes 1)(D \otimes D)$$

(1.34) **Définition** : *Un DGA-A-module (resp. DGA-C-comodule) à gauche sur une DGA-algèbre A (resp. DGA-coalgèbre C) est un DGA-Λ-module M muni d'un DGA-homomorphisme :*

$$\begin{array}{rcl} \mu & : & A \otimes M \longrightarrow M \\ \text{(resp. } D & : & M \longrightarrow C \otimes M) \end{array}$$

vérifiant :

$$\begin{array}{rcl} \mu(1 \otimes \mu) & = & \mu(\mu \otimes 1) \\ \text{(resp. } (D \otimes 1)D & = & (1 \otimes D)D) \\ \mu(\eta \otimes 1) & = & 1 \\ \text{(resp. } (\varepsilon \otimes 1)D & = & 1) \end{array}$$

On définit d'une façon analogue des DGA-A-modules (resp. DGA-C-comodules) à droite.

(1.35) **Lemme** : *Soit C une DGA-coalgèbre, A une DGA-algèbre, M un DGA-C-comodule à droite, N un DGA-A-module à gauche. Alors,* $\mathrm{Hom}(C, A)$ *est une DGA-algèbre avec le produit :*

$$\smile : \mathrm{Hom}(C, A) \otimes \mathrm{Hom}(C, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, A)$$

défini par :

$$\alpha \smile \beta = \mu(\alpha \otimes \beta)D$$

et $M \otimes N$ est un DGA-$\mathrm{Hom}(C, A)$*-module à gauche avec le produit :*

$$\frown : \mathrm{Hom}(C, A) \otimes M \otimes N \longrightarrow M \otimes N$$

défini par :

$$\alpha \frown x \otimes y = (1 \otimes \mu)(1 \otimes \alpha \otimes 1)(D \otimes 1)(x \otimes y)$$

La vérification est laissée au lecteur. □

$\smile$ est appelé cup-produit et $\frown$ est appelé cap-produit. Les affirmations du lemme (1.35) se traduisent par les formules :

$$\begin{array}{rcl} (\alpha \smile \beta) \smile \gamma & = & \alpha \smile (\beta \smile \gamma) \\ \eta\varepsilon \smile \alpha = \alpha \smile \eta\varepsilon & = & \alpha \text{ (cf. Lemme (1.15))} \\ d(\alpha \smile \beta) & = & (d\alpha) \smile \beta + (-1)^{|\alpha|}\alpha \smile (d\beta) \\ (\alpha \smile \beta) \frown x & = & \alpha \frown (\beta \frown x) \\ \eta\varepsilon \frown x & = & x \\ \partial(\alpha \frown x) & = & (d\alpha) \frown x + (-1)^{|\alpha|}\alpha \frown (\partial x) \end{array}$$

pour α, β et γ dans $\mathrm{Hom}(C, A)$ et x dans $M \otimes N$.

Si maintenant on pose, pour tout x de C, ou tout x de M :

$$D(x) = \sum_i x_i \otimes y_i$$

on a :

$$\begin{aligned}(\alpha \smile \beta)(x) &= \sum_i (-1)^{|\beta||x_i|}\, \alpha(x_i)\beta(y_i) \\ \alpha \frown (x \otimes y) &= \sum_i (-1)^{|\alpha||x_i|}\, x_i \otimes \alpha(y_i)y\end{aligned}$$

pour α et β dans $\mathrm{Hom}(C, A)$ et y dans N (où le produit μ est noté par simple juxtaposition). Pour les signes, voir les conventions de Koszul.

Si C est une DGA-coalgèbre connexe (voir (1.14)), on notera $*$ l'unique élément de C_0 tel que $\varepsilon(*) = 1$. Soit x un élément de C, de degré $n > 0$. La composante de bidegré $(0, n)$ de $D(x)$ s'écrit nécessairement sous la forme $* \otimes y$ pour un certain y de C_n, puisque $C_0 \otimes C_n = \Lambda \otimes C_n$, mais par ailleurs :

$$(\varepsilon \otimes 1)D(x) = x$$

donc $y = x$. La même chose étant vraie pour la composante de bidegré $(n, 0)$, on a :

$$D(x) = * \otimes x + x \otimes * + \sum_i x_i \otimes y_i$$

où les x_i et y_i sont de degrés strictement compris entre 0 et n.

(1.36) **Lemme** : *Si C est une DGA-coalgèbre graduée positivement et connexe, si A est une DGA-algèbre graduée positivement et connexe, soit $G(C, A)$ le sous-ensemble de* $\mathrm{Hom}(C, A)_0$ *des α tels que $\varepsilon(\alpha) = 1$ (ou encore tels que $\varepsilon\alpha\eta = 1_\Lambda$ (voir (1.15)). Alors $G(C, A)$ est un groupe pour le cup-produit d'élément neutre $\eta(1) = \eta\varepsilon$.*

On sait déjà que $\smile$ est associatif et que $\eta\varepsilon$ est neutre. Il reste seulement à prouver que tout α de $G(C, A)$ a un inverse pour le cup-produit. α, qui est de degré 0, est en fait une famille de flèches :

$$\alpha_i : C_i \longrightarrow A_i$$

telle que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "\eta"', "\simeq"] & A_0 \arrow[d, "\varepsilon"', "\simeq"] \\ \Lambda \arrow[r, "1"'] & \Lambda \end{tikzcd}$$

soit commutatif. On construit $\beta(x)$ par récurrence sur le degré de x. On pose $\beta_0 = \alpha_0$. Si x est de degré n, on a :

$$D(x) = * \otimes x + D'(x)$$

où $D'(x)$ est une somme de tenseurs $x_i \otimes y_i$, avec $|y_i| \leq n - 1$. On doit alors avoir :

$$0 = \eta\varepsilon(x) = \mu(\alpha \otimes \beta)D(x)$$

donc :

$$\begin{aligned}-\mu(\alpha \otimes \beta)D'(x) &= \mu(\alpha \otimes \beta)(* \otimes x) \\ &= \mu(1 \otimes \beta(x)) \\ &= \beta(x)\end{aligned}$$

ce qui définit β par récurrence, tel que $\alpha \smile \beta = \eta\varepsilon$. □

Si X est un ensemble simplicial, on peut considérer le composé :([3])

$$D : C_*^N(X) \xrightarrow{\Delta_*} C_*^N(X \times X) \xrightarrow{\Phi} C_*^N(X) \otimes C_*^N(X)$$

3. Où C_*^N désigne le complexe des chaînes normalisées, voir May [9], page 95.

où Δ est la diagonale de X, et où Φ est donné par le théorème des modèles acycliques. Avec ce même théorème, on prouve facilement que D est un coproduit homotopiquement associatif et homotopiquement commutatif. Mais c'est un fait remarquable qu'il existe parmi tous les coproduits qu'on obtient de cette façon, un coproduit associatif.([4])

(1.37) **Définition** : *Soit X un ensemble simplicial. Le coproduit d'Alexander-Whitney :*

$$D : C_*^N(X) \longrightarrow C_*^N(X) \otimes C_*^N(X)$$

est donné pour les vecteurs de la base canonique par :

$$D(x) = \sum_{i=0}^{|x|} \tilde{\partial}^i(x) \otimes \partial_0^{|x|-i}(x)$$

où $\tilde{\partial}$ est l'opérateur de dernière face, c'est-à-dire :

$$\tilde{\partial}(x) = \partial_{|x|}(x)$$

(1.38) **Lemme** : *Le coproduit d'Alexander-Whitney est naturel et fait de $C_*^N(X)$ une DGA-coalgèbre.*

Noter que si x est dégénéré, l'un des deux simplexes $\tilde{\partial}^i(x)$, $\partial_0^{|x|-i}(x)$ l'est aussi. D est donc bien défini. La naturalité est claire. La relation :

$$(\partial \otimes 1 + 1 \otimes \partial)D = D\partial$$

se vérifie facilement par le calcul.

Si on note $(a_0, \dots, a_p)$ le p-simplexe de Δ_n dont les sommets sont $a_0, \dots, a_p$, on a :

$$D(0, \dots, n) = \sum_{i=0}^{n} (0, \dots, i) \otimes (i, \dots, n)$$

Comme D est naturel, il suffit de vérifier l'associativité sur $e_n = (0, \dots, n)$, mais avec cette notation, c'est parfaitement évident. Enfin, notons que :

$$\begin{aligned} (\varepsilon \otimes 1)D(0, \dots, n) &= (\varepsilon \otimes 1)((0) \otimes (0, \dots, n)) \\ &= (0, \dots, n) \end{aligned}$$

Par la suite, quand nous parlerons de $C_*^N(X)$ comme d'une DGA-coalgèbre, il s'agira toujours du coproduit d'Alexander-Whitney.

Soit maintenant G un groupe simplicial. On peut considérer le composé :

$$\mu : C_*^N(G) \otimes C_*^N(G) \xrightarrow{\mathcal{M}} C_*^N(G \times G) \xrightarrow{\times_*} C_*^N(G)$$

où $\mathcal{M}$ est la flèche de Mac Lane,([5]) et $\times$ la multiplication de G.

(1.39) **Définition** : *Soit G un groupe simplicial. La multiplication :*

$$\mu : C_*^N(G) \otimes C_*^N(G) \longrightarrow C_*^N(G)$$

définie ci-dessus s'appelle la multiplication de Pontrjagin. Elle fait de $C_*^N(G)$ une DGA-algèbre, qui est commutative si G est commutatif. Comme G est pointé (par son élément neutre), on a une coaugmentation canonique :

$$\eta : \Lambda \longrightarrow C_*^N(G)$$

4. Voir aussi [27] et [28].
5. Voir [27] pour une définition et une preuve rapide des principales propriétés.

qui est élément neutre pour cette multiplication.

L'associativité de μ résulte de la commutativité du diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
C_*^N(G)\otimes C_*^N(G)\otimes C_*^N(G) \arrow[r, "\mathcal{M}\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\mathcal{M}"'] \arrow[dr, phantom, "\textcircled{1}"] & C_*^N(G\times G)\otimes C_*^N(G) \arrow[r, "\times_*\otimes 1"] \arrow[d, "\mathcal{M}"'] \arrow[dr, phantom, "\textcircled{2}"] & C_*^N(G)\otimes C_*^N(G) \arrow[d, "\mathcal{M}"] \\
C_*^N(G)\otimes C_*^N(G\times G) \arrow[r, "\mathcal{M}"] \arrow[d, "1\otimes\times_*"'] \arrow[dr, phantom, "\textcircled{3}"] & C_*^N(G\times G\times G) \arrow[r, "(\times\times 1)_*"] \arrow[d, "(1\times\times)_*"'] \arrow[dr, phantom, "\textcircled{4}"] & C_*^N(G\times G) \arrow[d, "\times_*"] \\
C_*^N(G)\otimes C_*^N(G) \arrow[r, "\mathcal{M}"'] & C_*^N(G\times G) \arrow[r, "\times_*"'] & C_*^N(G)
\end{tikzcd}
$$

La commutativité de ① a été prouvée dans [27]. Celles de ② et ③ sont dues à la naturalité de $\mathcal{M}$, celle de ④ au fait que la multiplication de G est associative.

On prouve de même les autres assertions en considérant les diagrammes suivants (où $t : G\times G \longrightarrow G\times G$ est défini par $t(x,y) = (y,x)$) :

$$
\begin{tikzcd}
C_*^N(G)\otimes C_*^N(G) \arrow[r, "\mathcal{M}"] \arrow[dd, "T"'] & C_*^N(G\times G) \arrow[dd, "t_*"'] \arrow[dr, "\times_*"] & \\
 & & C_*^N(G) \\
C_*^N(G)\otimes C_*^N(G) \arrow[r, "\mathcal{M}"'] & C_*^N(G\times G) \arrow[ur, "\times_*"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
C_*^N(G)\otimes C_*^N(*) \arrow[r, "\mathcal{M}", "\simeq"'] \arrow[dd, "1\otimes\eta"'] & C_*^N(G\times *) \arrow[dd, "(1\times *)_*"'] \arrow[dr, "1"] & \\
 & & C_*^N(G) \\
C_*^N(G)\otimes C_*^N(G) \arrow[r, "\mathcal{M}"'] & C_*^N(G\times G) \arrow[ur, "\times_*"'] &
\end{tikzcd}
$$

De plus, μ est naturelle en ce sens que si $f : G \longrightarrow H$ est un homomorphisme, on a le carré commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
C_*^N(G)\otimes C_*^N(G) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "f_*\otimes f_*"'] & C_*^N(G) \arrow[d, "f_*"] \\
C_*^N(H)\otimes C_*^N(H) \arrow[r, "\mu"'] & C_*^N(H)
\end{tikzcd}
$$

et en particulier, on a $\varepsilon\mu = \varepsilon\otimes\varepsilon$. $\square$

(1.40) **Théorème** : *Soit G un groupe simplicial agissant à gauche sur un ensemble simplicial F. Alors $C_*^N(F)$ est un DGA-module à gauche sur la DGA-algèbre $C_*^N(G)$.*

On définit l'action comme le composé :

$$\mu : C_*^N(G)\otimes C_*^N(F) \xrightarrow{\mathcal{M}} C_*^N(G\times F) \xrightarrow{\times_*} C_*^N(F)$$

On prouve le théorème comme précédemment. $\square$

1.5 Cochaînes de Brown.

(1.41) **Définition** : *Soit C une DGA-coalgèbre et A une DGA-algèbre. On appelle cochaîne de Brown (ou cochaîne tordante), un homomorphisme homogène de degré -1 :*

$$t : C \longrightarrow A$$

tel que :

$$\begin{aligned} \partial t + t\partial + \mu(t \otimes t)D &= 0 \\ \varepsilon t &= 0 \\ t\eta &= 0 \end{aligned}$$

La relation de Brown $\partial t + t\partial + \mu(t \otimes t)D = 0$ peut encore s'écrire (voir (1.15) et (1.35)) :

$$dt + t \smile t = 0$$

(1.42) **Lemme** : *Soit M un DGA-comodule à droite sur la DGA-coalgèbre C, N un DGA-module à gauche sur la DGA-algèbre A, $t : C \longrightarrow A$ une cochaîne de Brown. On définit :*

$$\partial_t : M \otimes N \longrightarrow M \otimes N$$

par :

$$\begin{aligned} \partial_t(x \otimes y) &= \partial(x \otimes y) + t \frown x \otimes y \\ &= \partial x \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes \partial y + t \frown x \otimes y \end{aligned}$$

Alors, ∂_t est une différentielle, et $M \otimes N$ muni de cette différentielle et de l'augmentation et de la coaugmentation définies en (1.15), est un DGA-module qu'on notera $M \otimes_t N$. De plus les flèches :

$$\begin{aligned} 1 \otimes \varepsilon : M \otimes_t N &\longrightarrow M \\ \eta \otimes 1 : N &\longrightarrow M \otimes_t N \end{aligned}$$

sont des homomorphismes de DGA-modules. $M \otimes_t N$ s'appelle un produit tensoriel tordu.

Nous vérifions que $\partial_t^2 = 0$. Soit $x \in M \otimes_t N$. On a :

$$\begin{aligned} \partial_t^2(x) &= \partial_t(\partial x + t \frown x) \\ &= \partial\partial(x) + t \frown \partial x + \partial(t \frown x) + t \frown (t \frown x) \\ &= t \frown \partial x + (dt) \frown x - t \frown \partial x + (t \smile t) \frown x \\ &= (dt + t \smile t) \frown x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les autres vérifications sont laissées au lecteur. □

Soit $x \otimes y \in M \otimes_t N$. En posant $D(x) = \sum_i x_i \otimes y_i$, on obtient explicitement :

$$\partial_t(x \otimes y) = \partial x \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes \partial y + \sum_i (-1)^{|x_i|} x_i \otimes t(y_i)y$$

(1.43) **Définition** : *Si $M = C$ (resp. $N = A$), on dira que le produit tensoriel tordu $M \otimes_t N$ est coprincipal (resp. principal).*

(1.44) **Lemme** : *Soit $t : C \longrightarrow A$ une cochaîne de Brown, $\phi : A \longrightarrow A'$ un morphisme de DGA-algèbres, $\psi : C' \longrightarrow C$ un morphisme de DGA-coalgèbres, alors les composés :*

$$\begin{aligned} \phi t &: C \longrightarrow A' \\ t\psi &: C' \longrightarrow A \end{aligned}$$

sont des cochaînes de Brown et les flèches :

$$\begin{array}{rcl} 1\otimes\phi & : & C\otimes_t A \longrightarrow C\otimes_{\phi t} A' \\ \psi\otimes 1 & : & C'\otimes_{t\psi} A \longrightarrow C\otimes_t A \end{array}$$

sont des homomorphismes de DGA-modules.

La vérification est sans difficulté. □

(1.45) **Définition** : *Soient $t : C \longrightarrow A$, $t' : C' \longrightarrow A'$ deux cochaînes de Brown. On appelle somme cartésienne de t et t', la flèche :*

$$t * t' = t\otimes\eta\varepsilon + \eta\varepsilon\otimes t'$$

de $C\otimes C'$ dans $A\otimes A'$.

(1.46) **Lemme** : *$t*t'$ est une cochaîne de Brown et la flèche :*

$$1\otimes T\otimes 1 : (C\otimes_t F)\otimes(C'\otimes_{t'} F') \longrightarrow (C\otimes C')\otimes_{t*t'}(F\otimes F')$$

où F (resp. F') est un DGA-A-module (resp. DGA-A'-module) à gauche, est un isomorphisme de DGA-modules.

La vérification ne pose aucune difficulté. On doit seulement faire attention aux signes, compte tenu des conventions de Koszul (1.4). □

Remarquer que si $C\otimes_t F$ et $C'\otimes_{t'} F'$ sont acycliques, il en est de même de $(C\otimes C')\otimes_{t*t'}(F\otimes F')$.

(1.47) **Définition** : *Une cochaîne de Brown $t : C \longrightarrow A$ est dite « sans holonomie », si sa restriction à C_1 est nulle.*

C'est par exemple le cas si C est simplement connexe.

1.6 Générateurs et primitifs.

Soit A une DGA-algèbre. $I(A) = \mathrm{Ker}(\varepsilon : A \longrightarrow \Lambda)$ l'idéal d'augmentation de A.

(1.48) **Définition** : *Soit A une DGA-algèbre. Le module des générateurs de A, $Q(A)$, est défini par la suite exacte :*

$$I(A)\otimes I(A) \xrightarrow{\mu} I(A) \longrightarrow Q(A) \longrightarrow 0$$

Il est clair que la différentielle ∂ de A respecte $I(A)$. Comme elle est compatible avec μ, elle induit une différentielle $Q(\partial)$ sur $Q(A)$. De même, si $f : A \longrightarrow A'$ est un morphisme de DGA-algèbres, f induit une flèche $Q(f) : Q(A) \longrightarrow Q(A')$.

(1.49) **Lemme** : *Soit $f : A \longrightarrow A'$ un morphisme de DGA-algèbres graduées positivement, et tel que A' soit connexe. Alors, f est surjectif si et seulement si $Q(f)$ est surjectif.*

Un peu de chasse dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I(A) \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f"'] & \Lambda \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I(A') \arrow[r] & A' \arrow[r, "\varepsilon"'] & \Lambda \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

montre que f est surjectif de A vers A' si et seulement s'il l'est de $I(A)$ vers $I(A')$. Il est clair qu'il envoie alors surjectivement $Q(A)$ vers $Q(A')$. Réciproquement, le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} I(A)\otimes I(A) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "f\otimes f"'] & I(A) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Q(A) \arrow[r] \arrow[d, "Q(f)"] & 0 \\ I(A')\otimes I(A') \arrow[r, "\mu"'] & I(A') \arrow[r] & Q(A') \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

et le lemme des cinq montrent par récurrence sur le degré que f est surjective. En effet, comme A' est connexe, $I(A')$ est en degrés ≥ 1, donc les tenseurs élémentaires de $I(A')\otimes I(A')$ ont des composantes de degré strictement inférieur. □

Soit C une DGA-coalgèbre, $J(C) = \mathrm{Coker}(\eta : \Lambda \longrightarrow C)$.

(1.50) **Définition** : *Soit C une DGA-coalgèbre. Le module des primitifs de C est défini par la suite exacte :*

$$0 \longrightarrow P(C) \longrightarrow J(C) \xrightarrow{D} J(C)\otimes J(C)$$

La différentielle respecte $J(C)$ et est compatible avec D. Elle induit donc une différentielle sur $P(C)$. De même, si $f : C \longrightarrow C'$ est un morphisme de DGA-coalgèbres, f induit $P(f) : P(C) \longrightarrow P(C')$.

(1.51) **Lemme** : *Soit $f : C \longrightarrow C'$ un morphisme de DGA-coalgèbres graduées positivement, tel que C soit connexe et que C et C' soient plats (comme Λ-modules). Alors f est injectif si et seulement si $P(f)$ est injectif.*

La démonstration est analogue à celle de (1.49). □

(1.36), (1.49) et (1.50) sont tirés de Milnor-Moore [22], un document de référence sur les algèbres de Hopf.

(1.52) **Définition** : *Soit A une DGA-algèbre et M un DGA-A-module (à droite). Le « module associé » est défini par $\overline{M} = M/MI(A)$.*

(1.53) **Lemme** : *Soit $f : A \longrightarrow A'$ un morphisme de DGA-algèbres, M un DGA-A-module, M' un DGA-A'-module, $g : M \longrightarrow M'$ un morphisme de DGA-modules compatible avec f (i.e. $g(xa) = g(x)f(a)$). Alors g induit une flèche $\overline{g} : \overline{M} \longrightarrow \overline{M'}$ sur les modules associés.* □

Chapitre 2

Fibrations, constructions.

2.1 Fibrations principales et fonctions tordantes.

Notre but étant l'étude des fibrations principales de fibre $K(\mathbb{Z}/p, n)$, nous nous limiterons dans ces rappels aux fibrations principales dont la fibre est un groupe simplicial H. Une telle fibration est la donnée d'un ensemble simplicial E (espace total), muni d'une action (à droite) libre de H. Si $X = E/H$ est la base de cette fibration, on la notera généralement $H \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} X$, où, un point de base $*$ étant fixé dans E, donc dans X par projection, H est $\pi^{-1}(*)$.

Rappellons que H est de Kan, et que π est une fibration de Kan. Une section de π est une application simpliciale $\sigma : X \longrightarrow E$, telle que $\pi\sigma = 1_X$. Une telle section n'existe que si la fibration est triviale (i.e. isomorphe à $\mathrm{pr}_1 : X \times H \longrightarrow X$).

Par contre, si on ne demande pas à σ de respecter l'opérateur ∂_0, il n'y a plus d'obstruction à la construction de σ (May [21], page 73). Une telle flèche (qui commute aux s_i, $i \geq 0$ et aux ∂_i, $i \geq 1$) s'appelle une pseudo-section et est l'analogue simplicial d'une connexion.

Remarquons maintenant que si la fibration $E \xrightarrow{\pi} X$ est munie d'une pseudo-section σ, on a :

$$\begin{array}{rcl} \pi\sigma\partial_0(x) & = & \partial_0(x) \\ \pi\partial_0\sigma(x) & = & \partial_0\pi\sigma(x) = \partial_0(x) \end{array}$$

autrement-dit, $\sigma\partial_0(x)$ et $\partial_0\sigma(x)$ se projettent sur le même simplexe de X, et il existe donc un unique élément $\tau(x)$ de H, tel que :

$$\partial_0\sigma(x) = \sigma\partial_0(x).\tau(x)$$

(2.1) **Lemme** : *L'application $\tau : X \longrightarrow H$ définie ci-dessus est de degré -1 ($\tau(X_n) \subset H_{n-1}$), et satisfait les relations :*

$$\begin{array}{rcll} \partial_0\tau(x) & = & [\tau(\partial_0(x))]^{-1}.\tau(\partial_1(x)) & \\ \partial_i\tau(x) & = & \tau(\partial_{i+1}x) & i \geq 1 \\ s_i\tau(x) & = & \tau(s_{i+1}x) & i \geq 0 \\ \tau(s_0(x)) & = & 1 & \end{array}$$

τ s'appelle la fonction tordante associée à σ.

La vérification est sans difficulté. □

Le lecteur vérifiera facilement que la donnée de $\tau : X \longrightarrow H$ suffit à retrouver à isomorphisme près la fibration $E \xrightarrow{\pi} X$ et sa pseudo-section σ. Il suffit de poser $E = X \times_\tau H$, où, dans le « produit cartésien tordu » $X \times_\tau H$, l'opérateur ∂_0 est donné par :

$$\partial_0(x, h) = (\partial_0 x, \tau(x)\partial_0 h)$$

On pose de plus $\pi(x, h) = x$ et $\sigma(x) = (x, 1)$.

La composition d'une fonction tordante à gauche par un morphisme de groupes simpliciaux, ou à droite par un morphisme d'ensembles simpliciaux, est encore une fonction tordante.

2.2 Constructions W (Eilenberg-Mac Lane) et G (Kan).

Considérons maintenant un groupe simplicial H, et soit $\mathcal{C}_H$ la catégorie dont les objets sont les couples (X, τ), où X est un ensemble simplicial, et $\tau : X \longrightarrow H$ une fonction tordante, et dont les morphismes sont les triangles commutatifs :

$$\begin{tikzcd} & H & \\ X \arrow[ur, "\tau"] \arrow[rr, "f"'] & & X' \arrow[ul, "\tau'"'] \end{tikzcd}$$

où $f : X \longrightarrow X'$ est une application simpliciale. Alors, la catégorie $\mathcal{C}_H$ a un objet final noté :

$$W(H) \xrightarrow{\tau} H$$

et appelé construction W (dûe à Eilenberg et Mac Lane).

On prouve (May [21]) que $W(H)$ et $W(H) \times_\tau H$ sont de Kan, et que $W(H) \times_\tau H$ est contractile. On a donc une fibration universelle de fibre H :

$$H \longrightarrow W(H) \times_\tau H \longrightarrow W(H)$$

et $W(H)$ est un classifiant pour H.([1])

Si maintenant H est commutatif, la multiplication $m : H \times H \longrightarrow H$ est un morphisme de groupes simpliciaux, et comme on vérifie aisément que $\tau \times \tau : W(H) \times W(H) \longrightarrow H \times H$ est une fonction tordante, on voit qu'il existe un unique morphisme d'ensembles simpliciaux :

$$W(m) : W(H) \times W(H) \longrightarrow W(H)$$

tel que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} H \times H \arrow[r, "m"] & H \\ W(H) \times W(H) \arrow[u, "\tau\times\tau"] \arrow[r, "W(m)"'] & W(H) \arrow[u, "\tau"'] \end{tikzcd}$$

soit commutatif. La propriété universelle de τ montre encore que $W(H)$ est un groupe simplicial commutatif. Cette remarque permet d'itérer la construction W et en particulier, on peut voir $K(\pi, n)$, comme le groupe simplicial $W^n(\pi)$.

D'une façon analogue, soit maintenant X un ensemble simplicial réduit (ayant un seul 0-simplexe), et soit $\mathcal{C}_X$ la catégorie dont les objets sont les couples (H, τ), où H est un groupe simplicial, et où

1. Ici, le mot « classifiant » est pris dans le sens usuel en topologie algébrique. Précisément, il s'agit du classifiant homotopique des classes d'isomorphisme de H-fibrés principaux.

$\tau : X \longrightarrow H$ est une fonction tordante, et dont les morphismes sont les triangles commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[rr, "\Phi"] & & H' \\
& X \arrow[ul, "\tau"] \arrow[ur, "\tau'"'] &
\end{tikzcd}$$

où Φ est un homomorphisme de groupes simpliciaux. Alors la catégorie $\mathcal{C}_X$ a un objet initial :

$$X \xrightarrow{\tau} G(X)$$

qu'on appelle construction G (dûe à Kan). On prouve (May [21]) que $X \times_\tau G(X)$ est contractile. On voit donc que la fibration :

$$G(X) \longrightarrow X \times_\tau G(X) \longrightarrow X$$

fait apparaître le groupe $G(X)$ comme un espace des lacets pour X.

Si H est un groupe simplicial, et X un ensemble simplicial réduit, on a des morphismes canoniques :

$$\begin{aligned} \Phi : GW(H) &\longrightarrow H \\ \Psi : X &\longrightarrow WG(X) \end{aligned} \tag{2.2}$$

qui sont les seuls qui rendent commutatifs les diagrammes :

$$\begin{tikzcd}
GX(X) \arrow[rr, "\Phi"] & & H \\
& W(H) \arrow[ul, "\tau"] \arrow[ur, "\tau"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& G(X) & \\
X \arrow[ur, "\tau"] \arrow[rr, "\Psi"'] & & WG(X) \arrow[ul, "\tau"']
\end{tikzcd}$$

Ils induisent les morphismes de fibrations :

$$\begin{tikzcd}
GW(X) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & H \arrow[d] \\
W(H) \times_\tau GW(H) \arrow[r, "1\times\Phi"] \arrow[d] & W(H) \times_\tau H \arrow[d] \\
W(H) \arrow[r, "1"'] & W(H)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G(X) \arrow[r, "1"] \arrow[d] & G(X) \arrow[d] \\
X \times_\tau G(X) \arrow[r, "\Psi\times 1"] \arrow[d] & WG(X) \times_\tau G(X) \arrow[d] \\
X \arrow[r, "\Psi"'] & WG(X)
\end{tikzcd}$$

qui prouvent que Φ et Ψ sont des équivalences d'homotopie.

2.3 Cochaîne de Brown naturelle.

Soit X un ensemble simplicial réduit. La méthode des modèles acycliques permet de construire une cochaîne de Brown :

$$t_X : C_*(X) \longrightarrow C_*(G(X)) \tag{2.3}$$

(où $C_*(X)$ est muni du coproduit d'Alexander-Whitney, et $C_*(G(X))$ du produit de Pontrjagin), qui est naturelle en X, et vérifie :

$$t_X(x) = 1 - \tau(x)$$

pour tout 1-simplexe x de X.(2)

Soit $H \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} X$ une fibration principale, munie d'une pseudo-section σ, et soit $\theta : X \longrightarrow H$ la fonction tordante associée à σ. On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} G(X) \arrow[rr, "\Phi"] & & H \\ & X \arrow[ul, "\tau"] \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

où Φ est un morphisme de groupes simpliciaux. On peut donc considérer la cochaîne de Brown :

$$t(\theta) : \Phi_* t_X : C_*(X) \longrightarrow C_*(H) \tag{2.4}$$

et le produit tensoriel tordu :

$$C_*(X) \otimes_{t(\theta)} C_*(H)$$

Le théorème d'Eilenberg-Zilber tordu (dû à E.H. Brown [6]), qui se prouve par la méthode des modèles acycliques (voir May [21], pour une version simpliciale), nous dit qu'il existe des équivalences d'homotopie naturelles :

$$C_*(X) \otimes_{t(\theta)} C_*(H) \rightleftarrows C_*(E) \tag{2.5}$$

Ce théorème constitue le point de départ de notre étude de l'homologie des fibrations, notre but étant de transformer le produit tensoriel tordu ci-dessus en quelque chose de « calculable ».

2.4 Constructions (Cartan).

Nous passons maintenant aux constructions. La définition que nous donnons est un peu différente de celle de H. Cartan [8]. Nous supposerons désormais que Λ est un corps.

Si $M \otimes N$ est un produit tensoriel de deux modules gradués, nous poserons $F'_p(M \otimes N) = \bigoplus_{q \leq p} M_q \otimes N$.

La filtration ainsi obtenue sera dite standard.

(2.6) **Définition** : *On appelle construction un triplet (M, N, θ), où M et N sont des DGA-modules, et où $\theta : M \otimes N \longrightarrow M \otimes N$ est une flèche de degré -1, telle que :*

$$(1 \otimes \varepsilon)\theta = 0 \qquad \theta(F'_p(M \otimes N)) \subset F'_{p-1}(M \otimes N)$$

et telle que $\partial_\theta = \partial \otimes 1 + 1 \otimes \partial + \theta$ soit une différentielle faisant de $M \otimes N$ un DGA-module. M et N seront appelés respectivement la « base » et la « fibre » de la construction. Si de plus :

$$\theta(F'_p(M \otimes N)) \subset F'_{p-2}(M \otimes N)$$

la construction sera dite « sans holonomie ». Si de plus N est une DGA-algèbre, et $M \otimes N$ un DGA-module à droite sur N, on dit que la construction est principale.

Soit $C \otimes_t F$ un produit tensoriel tordu, où C est une DGA-coalgèbre, F un DGA-module sur une DGA-algèbre A, et $t : C \longrightarrow A$ une cochaîne de Brown. Alors, $(C, F, t \frown)$ est une construction, qui est sans holonomie si t est sans holonomie, et qui est principale si $F = A$.

2. Mon étudiant F. Morace et moi avons montré en 1992 qu'une au moins de ces cochaînes (en fait, celle de Szczarba) commute exactement (et non pas seulement à homotopie près) avec la transformation d'Eilenberg-Mac Lane $\mathcal{M}$. [*Brown's natural twisting cochain and the Eilenberg-Mac lane transformation*, Journal of Pure and Applied Algebra 97 (1994) 81-89.]

(2.7) **Définition** : *Soient (M, N, θ) et (M', N', θ') deux constructions. Un morphisme de (M, N, θ) vers (M', N', θ') est un triplet (f, g, h), où :*

$$\begin{array}{l} f : M \longrightarrow M \\ g : N \longrightarrow N' \end{array}$$

sont des morphismes de DGA-modules, et où :

$$h : M \otimes N \longrightarrow M' \otimes N'$$

vérifie :

$$h(F'_p(M \otimes N)) \subset F'_{p-1}(M' \otimes N')$$

et est tel que $f \otimes g + h$ soit un morphisme de DGA-modules. Si de plus (M, N, θ) et (M', N', θ') sont principales, on demande que $g : N \longrightarrow N'$ soit un morphisme de DGA-algèbres, et que h soit compatible avec g, en ce sens que :

$$h(x \otimes y) = h(x \otimes 1).g(y)$$

Par abus de notation, on désignera généralement une construction (M, N, θ) par $M \otimes_\theta N$, et un morphisme (f, g, h) par $f \otimes g + h$.

Soit $M \otimes_\theta N$ une construction. La suite spectrale de cette construction est celle qui est associée à la filtration standard définie plus haut. Il est clair que :

$$\begin{array}{rcl} E^0(M \otimes_\theta N) & \simeq & M \otimes N \\ E^1(M \otimes_\theta N) & \simeq & M \otimes H_*(N) \end{array}$$

Si nous supposons que la construction est sans holonomie, nous avons aussi :

$$E^2(M \otimes_\theta N) \simeq H_*(M) \otimes H_*(N)$$

(2.8) **Théorème** : *Soit $f \otimes g + h : M \otimes_\theta N \longrightarrow M' \otimes_{\theta'} N'$ un morphisme de constructions, alors :*
– *i) Si f et g induisent des isomorphismes en homologie, il en est de même de $f \otimes g + h$.*
– *ii) Si les constructions sont sans holonomie, et si deux des flèches f, g et $f \otimes g + h$ induisent des isomorphismes en homologie, il en est de même de la troisième.*

La première assertion résulte des propriétés standard des suites spectrales, la deuxième du théorème de comparaison de Moore [8]. Il existe un autre théorème de comparaison très utile dont voici l'énoncé (Cartan [8]) :

(2.9) **Théorème** : *Soient $M \otimes_\theta A$ et $M' \otimes_{\theta'} A$ deux constructions principales et acycliques de même fibre, et soit Φ un morphisme de constructions de la forme :*

$$\Phi = f \otimes 1 + h : M \otimes_\theta A \longrightarrow M' \otimes_{\theta'} A$$

Alors $f : M \longrightarrow M'$ induit un isomorphisme en homologie.

Remarquer que dans une construction principale, le module associé n'est autre que M, puisque :

$$(M \otimes A)/(M \otimes A)\overline{A} \simeq (M \otimes A)/(M \otimes \overline{A}) \simeq M \otimes (A/\overline{A}) \simeq M$$

2.5 Bar-construction et cobar-construction.

Nous passons maintenant aux bar et cobar-constructions, et nous étudions avec quelques détails les algèbres et coalgèbres différentielles libres.

(2.10) **Théorème** : *Soit A une DGA-algèbre. On considère la catégorie $\mathcal{C}_A$ dont les objets sont les couples (C,t), où C est une DGA-coalgèbre, et :*

$$t : C \longrightarrow A$$

une cochaîne de Brown, et dont les flèches sont les triangles commutatifs :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "\Psi"'] & & A \\ & C' \arrow[ur, "t'"'] & \end{tikzcd}$$

où Ψ est un morphisme de DGA-coalgèbres. Alors, la catégorie $\mathcal{C}_A$ contient un objet final, qu'on notera :

$$B(A) \xrightarrow{\beta} A$$

et qu'on appelle la bar-construction de A.

D'une façon duale, on a :

(2.11) **Théorème** : *Soit C une DGA-coalgèbre. On considère la catégorie $\mathcal{C}_C$ dont les objets sont les couples (A,t), où A est une DGA-algèbre, et :*

$$t : C \longrightarrow A$$

une cochaîne de Brown, et dont les flèches sont les triangles commutatifs :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "t'"'] & & A \arrow[dl, "\Phi"] \\ & A' & \end{tikzcd}$$

où Φ est un morphisme de DGA-algèbres. Alors la catégorie $\mathcal{C}_C$ contient un objet initial, qu'on notera :

$$C \xrightarrow{\gamma} \Omega(C)$$

et qu'on appelle la cobar-construction de C.

Bien sûr ces objets sont uniques à isomorphisme près. La propriété universelle signifie que pour toute cochaîne de Brown $t : C \longrightarrow A$, il existe un unique homomorphisme de DGA-coalgèbres Ψ, et un unique homomorphisme de DGA-algèbres Φ, tels que les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "\Psi"'] & A \\ & B(A) \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega(C) \arrow[dr, "\Phi"] & \\ C \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "t"'] & A \end{tikzcd}$$

soient commutatifs. Il en résulte en particulier que si A est une DGA-algèbre, il existe un unique homomorphisme de DGA-algèbres Φ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \Omega(B(A)) \arrow[rr, "\Phi"] & & A \\ & B(A) \arrow[ul, "\gamma"] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd} \tag{2.12}$$

De même, il existe pour toute DGA-coalgèbre C, un unique homomorphisme de DGA-coalgèbres Ψ tel que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & \Omega(C) & \\ C \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[rr, "\Psi"'] & & B\Omega(C) \arrow[ul, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Ces homomorphismes seront dits canoniques.

De même, si

$$f : A \longrightarrow A'$$
$$(\text{resp. } g : C \longrightarrow C')$$

est un morphisme de DGA-algèbres (resp. DGA-coalgèbres), on a le diagramme commmutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & A' \\ B(A) \arrow[u, "\beta"] \arrow[ur, "f\beta"] \arrow[r, "B(f)"'] & B(A') \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd} \qquad (\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} \Omega(C) \arrow[r, "\Omega(g)"] & \Omega(C') \\ C \arrow[u, "\gamma"] \arrow[ur, "\gamma g"] \arrow[r, "g"'] & C' \arrow[u, "\gamma"'] \end{tikzcd} \quad) \tag{2.14}$$

qui définit sans ambiguïté le morphisme de DGA-coalgèbres (resp. DGA-algèbres) $B(f)$ (resp. $\Omega(g)$). On vérifie aisément que B et Ω sont ainsi des foncteurs.

Nous passons maintenant à la preuve des théorèmes (2.10) et (2.11). Nous commençons par quelques lemmes sur les algèbres et coalgèbres libres.

(2.15) **Définition** : *Soit A un Λ-module gradué. Le module tensoriel de A, $T(A)$ est défini par :*

$$T(A) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A^n$$

(où $A^0 = \Lambda$, $A^n = A \otimes \cdots \otimes A$ (n facteurs)). L'élément 1 de A^0 est appelé le mot vide, le tenseur $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ est appelé un mot de longueur n. La graduation de $T(A)$ est définie par :

$$|a_1 \otimes \cdots \otimes a_n| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

L'augmentation ε et la coaugmentation η sont l'identité de $A^0 = \Lambda$. On définit un produit :

$$\mu : T(A) \otimes T(A) \longrightarrow T(A)$$

par :

$$\mu((a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes (a_{n+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+p})) = a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+p}$$

et un coproduit :

$$D : T(A) \longrightarrow T(A) \otimes T(A)$$

par :

$$D(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n} (a_1 \otimes \cdots \otimes a_i) \otimes (a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n)$$

Il est manifeste que ce produit est associatif et admet η pour unité, et que ce coproduit est associatif, et admet ε pour co-unité. μ et D ne font pas de $T(A)$ une algèbre de Hopf. En effet, la relation :

$$D\mu = (\mu \otimes \mu)(1 \otimes T \otimes 1)(D \otimes D)$$

n'est pas vérifiée en général. Suivant que nous la considérerons comme munie de μ ou de D, nous appelerons $T(A)$ l'algèbre ou la coalgèbre tensorielle de A. Si $f : A \longrightarrow B$ est une flèche, on notera $T(f)$ la flèche :

$$T(f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = f^n(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = (f \otimes \cdots \otimes f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)$$

Nous noterons $j_n : A^n \longrightarrow T(A)$ et $\pi_n : T(A) \longrightarrow A^n$ l'injection et la projection canoniques. Noter que A s'identifie au module des générateurs $Q(T(A))$ de l'algèbre tensorielle $T(A)$, de même qu'au module des primitifs $P(T(A))$ de la coalgèbre tensorielle $T(A)$.

(2.16) **Lemme** : *Soit A un Λ-module gradué. $T(A)$ son algèbre (resp. coalgèbre) tensorielle, $\Delta : A \longrightarrow T(A)$ (resp. $m : T(A) \longrightarrow A$) un Λ-homomorphisme de degré -1. Alors il existe une unique dérivation $\partial : T(A) \longrightarrow T(A)$ (c'est-à-dire vérifiant $\partial\mu = \mu(\partial\otimes 1+1\otimes\partial)$ (resp. $D\partial = (\partial\otimes 1+1\otimes\partial)D$)) prolongeant Δ (resp. relevant m) :*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "j_1"'] & T(A) \\ T(A) \arrow[ur, "\partial"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & T(A) \arrow[d, "\pi_1"] \\ T(A) \arrow[ur, "\partial"] \arrow[r, "m"'] & A \end{tikzcd}$$

De plus, les relations $\partial^2 = 0$ et $\partial\Delta = 0$ (resp. $m\partial = 0$) sont équivalentes.

Afin de prouver ce lemme ; nous introduisons certaines notations. Soit $f : M^p \longrightarrow M^q$. On définit :

$$f^{[n]} : M^{p+n-1} \longrightarrow M^{q+n-1}$$

par :

$$\begin{array}{rcll} f^{[n]} & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 1^k \otimes f \otimes 1^{n-k-1} & \text{pour } n \geq 1 \\ f^{[n]} & = & 0 & \text{pour } n \leq 0 \end{array} \tag{2.17}$$

Par exemple : $f^{[1]} = f$, $f^{[2]} = f \otimes 1 + 1 \otimes f$, etc... Soit $f : M \longrightarrow T(M)$ (resp. $T(M) \longrightarrow M$). On définit :

$$f^{[\,]} : T(M) \longrightarrow T(M)$$

en imposant les relations :

$$\begin{array}{rcl} \pi_q f^{[\,]} j_p & = & (\pi_{q-p+1} f)^{[p]} \\ (\text{resp. } \pi_q f^{[\,]} j_p & = & (f j_{p-q+1})^{[q]}) \end{array} \tag{2.18}$$

Démonstration du lemme (2.16) : Si $T(A)$ est l'algèbre tensorielle (resp. coalgèbre tensorielle) de A, il suffit de poser :

$$\begin{array}{rcl} \partial & = & \Delta^{[\,]} \\ (\text{resp. } \partial & = & m^{[\,]}) \end{array}$$

En effet, pour prouver la relation $\Delta^{[\,]}\mu = \mu(\Delta^{[\,]} \otimes 1 + 1 \otimes \Delta^{[\,]})$, il suffit de prouver que pour tous n, p et q :

$$\pi_n \Delta^{[\,]} \mu(j_p \otimes j_q) = \pi_n \mu(\Delta^{[\,]} \otimes 1 + 1 \otimes \Delta^{[\,]})(j_p \otimes j_q)$$

or, ceci peut encore s'écrire :

$$(\pi_{n-(p+q)+1}\Delta)^{[p+q]} = (\pi_{n-(p+q)+1}\Delta)^{[p]} \otimes 1^q + 1^p \otimes (\pi_{n-(p+q)+1}\Delta)^{[q]}$$

ce qui est conséquence immédiate des définitions. L'unicité est claire puisque tout mot est un produit de mots de longueur 1. L'équivalence des relations $\partial^2 = 0$ et $\partial\Delta = 0$ est une conséquence immédiate du fait que ∂ est une dérivation et que Δ est de degré impair. On a une démonstration analogue pour le cas dual. □

(2.19) **Lemme** : *L'algèbre (resp. coalgèbre) tensorielle $T(A)$ est libre, c'est-à-dire que pour toute algèbre (resp. coalgèbre) associative et unitaire B, et toute application linéaire :*

$$\begin{array}{rcl} f & : & A \longrightarrow B \\ \text{(resp. } f & : & B \longrightarrow A) \end{array}$$

il existe un unique prolongement $\overline{f} : T(A) \longrightarrow B$ (resp. relèvement $\overline{f} : B \longrightarrow T(A)$) de f, qui soit un morphisme d'algèbres (resp. de coalgèbres) unitaires.

Si μ est un produit (resp. D un coproduit) associatif, on pose :

$$\begin{array}{rclrclrcl} \mu^{(1)} & = & 1, & \mu^{(2)} & = & \mu, & \mu^{(n)} & = & \mu(1 \otimes \mu^{(n-1)}) \\ \text{(resp. } D^{(1)} & = & 1, & D^{(2)} & = & D, & D^{(n)} & = & (1 \otimes D^{(n-1)})D) \end{array} \tag{2.20}$$

Il suffit alors de poser :

$$\begin{array}{rcl} \overline{f} & = & \eta\varepsilon + \sum_{i \geq 1} \mu^{(i)} f^i \\ \text{(resp. } \overline{f} & = & \eta\varepsilon + \sum_{i \geq 1} f^i D^{(i)}) \ \square \end{array}$$

(2.21) **Lemme** : *Si $T(A)$ et B (resp. A et $T(B)$) sont munies d'une différentielle qui en fait des DGA-algèbres (resp. DGA-coalgèbres), $\overline{f}$ commute aux différentielles si et seulement si :*

$$\begin{array}{rcl} \overline{f}\partial j_1 & = & \partial f \\ \text{(resp.} f\partial & = & \pi_1 \partial \overline{f}) \ \square \end{array}$$

(2.22) **Définition** : *Soit A un Λ-module gradué. On définit la suspension (resp. désuspension) de A par :*

$$\begin{array}{rcl} (\uparrow A)_n & = & A_{n-1} \\ \text{(resp. } (\downarrow A)_n & = & A_{n+1} \end{array}$$

On appelera aussi suspension (resp. désuspension) les isomorphismes canoniques (identités) :

$$\begin{array}{rcl} \uparrow & : & A \longrightarrow \uparrow A \\ \uparrow & : & \downarrow A \longrightarrow A \\ \text{(resp. } \downarrow & : & A \longrightarrow \downarrow A \\ \downarrow & : & \uparrow A \longrightarrow A) \end{array}$$

Remarquer que $|\uparrow| = 1$ et $|\downarrow| = -1$.

Pour prouver les théorèmes (2.10) et (2.11), il suffit d'exhiber une solution au problème universel posé. Soit donc A une DGA-algèbre. Posons :

$$\overline{A} = A/\mathrm{Im}(\eta : \Lambda \longrightarrow A) \simeq \mathrm{Ker}(\varepsilon : A \longrightarrow \Lambda)$$

On notera $\lambda : \overline{A} \longrightarrow A$ et $\rho : A \longrightarrow \overline{A}$, l'inclusion et la projection canoniques. On pose $B(A) = T(\uparrow\overline{A})$. $B(A)$ est ainsi une coalgèbre graduée augmentée et coaugmentée. On définit :

$$\beta : B(A) \longrightarrow A$$

par :

$$\beta = \lambda \downarrow \pi_1 \tag{2.23}$$

ce qui donne explicitement :

$$\begin{cases} \beta(1) = 0 & \\ \beta(a) = \downarrow a & \\ \beta(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

et nous définissons la différentielle de $B(A)$ de telle sorte que β soit une cochaîne de Brown. On doit avoir la relation :

$$\partial\beta + \beta\partial + \mu(\beta\otimes\beta)D = 0$$

Compte tenu de $\rho\lambda = 1_{\overline{A}}$ et $\uparrow\downarrow = 1_{\uparrow\overline{A}}$, on obtient :

$$\pi_1\partial = -\uparrow\rho\partial\beta - \uparrow\rho\mu(\beta\otimes\beta)D$$

Par (2.16), il existe une unique dérivation ∂ de $B(A)$ satisfaisant cette relation. Pour voir que $\partial^2 = 0$, il suffit de vérifier que $\pi_1\partial^2 = 0$, ou encore que $\beta\partial^2 = 0$, mais :

$$\begin{array}{rcl}
\beta\partial^2 & = & (\beta\partial)\partial \\
& = & (-\partial\beta - \beta\smile\beta)\partial \\
& = & -\partial(\beta\partial) - \beta\smile\beta)\partial \\
& = & -\partial(-\partial\beta - \beta\smile\beta) - (\beta\smile\beta)\partial \\
& = & \partial(\beta\smile\beta) - (\beta\smile\beta)\partial \\
& = & d(\beta\smile\beta) \\
& = & -d(d\beta) \\
& = & 0
\end{array}$$

Maintenant, si $t : C \longrightarrow A$ est une cochaîne de Brown, le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\uparrow\rho t"'] & A \\
\uparrow\overline{A} \arrow[ur, "\lambda\downarrow"] \arrow[r, "j_1"'] & B(A) \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif, car la relation $\varepsilon t = 0$ implique $\lambda\rho t = t$.

Par (2.19), la flèche $\uparrow\rho t : C \longrightarrow \uparrow\overline{A}$ se prolonge en un unique homomorphisme de coalgèbres :

$$\Psi : C \longrightarrow B(A)$$

On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "\Psi"'] & A \\
& B(A) \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

Il reste à voir que Ψ commute aux différentielles. D'après (2.21), il suffit que $\uparrow\rho t\partial = \pi_1\partial\Psi$, ou encore, en composant à gauche avec $\lambda\downarrow$, que :

$$t\partial = \beta\partial\Psi$$

mais :

$$\begin{array}{rcl}
\beta\partial\Psi & = & -\partial\beta\Psi - (\beta\smile\beta)\Psi \\
& = & -\partial t - \mu(\beta\otimes\beta)D\Psi \\
& = & -\partial t - \mu(\beta\otimes\beta)(\Psi\otimes\Psi)D \\
& = & -\partial t - \mu(t\otimes t)D \\
& = & t\partial \ \square
\end{array}$$

On prouve dualement l'existence de la cobar-construction en posant, pour toute DGA-coalgèbre C :

$$\overline{C} = C/\mathrm{Im}(\eta) \simeq \mathrm{Ker}(\varepsilon)$$
$$\Omega(C) = T(\downarrow\overline{C})$$

$\Omega(C)$ est alors une algèbre graduée augmentée et coaugmentée. On définit :

$$\gamma : C \longrightarrow \Omega(C)$$

par :

$$\gamma = j_1 {\downarrow} \rho$$

ce qui donne explicitement :

$$\gamma(x) = {\downarrow}\rho x$$

Nous introduisons maintenant les notations classiquement utilisées. Pour la bar-construction, on pose :

$${\uparrow}\rho a_1 \otimes \cdots \otimes {\uparrow}\rho a_n = [a_1|\ldots|a_n], \qquad 1 = [\ ]$$

et pour la cobar-construction :

$${\downarrow}\rho x_1 \otimes \cdots \otimes {\downarrow}\rho x_n = [x_1|\ldots|x_n], \qquad 1 = [\ ]$$

En explicitant la construction précédente, on trouve la formule suivante pour la différentielle de $B(A)$:

$$\begin{aligned} \partial[a_1|\ldots|a_n] &= -\sum_{k=1}^{n}(-1)^{|[a_1|\ldots|a_{k-1}]|}[a_1|\ldots|\partial a_k|\ldots|a_n] \\ &\quad -\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{|[a_1|\ldots|a_k]|}[a_1|\ldots|a_{k-1}|a_k a_{k+1}|a_{k+2}|\ldots|a_n] \end{aligned}$$

et pour celle de $\Omega(C)$ (avec $D(x_k) = \sum_i \alpha_i^k \otimes \beta_i^k$) :

$$\begin{aligned} \partial[x_1|\ldots|x_n] &= -\sum_{k=1}^{n}(-1)^{|[x_1|\ldots|x_{k-1}]|}[x_1|\ldots|\partial x_k|\ldots|x_n] \\ &\quad +\sum_{k=1}^{n}\sum_i(-1)^{|[x_1|\ldots|x_{k-1}|\alpha_i^k]|}[x_1|\ldots|x_{k-1}|\alpha_i^k|\beta_i^k|x_{k+1}|\ldots|x_n] \end{aligned}$$

Les cohaînes de Brown β et γ sont donnés par :

$$\begin{cases} \beta([\ ]) = 0 & \\ \beta([a]) = a & \\ \beta([a_1|\ldots|a_n]) = 0 & n \geq 2 \end{cases}$$

$$\gamma(x) = [x]$$

(2.24) **Théorème** : *Les produits tensoriels tordus :*

$$\begin{gathered} B(A) \otimes_\beta A \\ C \otimes_\gamma \Omega(C) \end{gathered}$$

sont acycliques.

Comme précédemment, pour tout module augmenté M, nous désignons par $\overline{M}$ le noyau de l'augmentation. Il suffit donc de prouver que $H_*(\overline{B(A) \otimes_\beta A}) = 0$. Pour cela, remarquons la décomposition en somme directe :

$$\overline{B(A) \otimes A} = (\overline{B(A)} \otimes \Lambda) \oplus (B(A) \otimes \overline{A})$$

Par ailleurs, la différentielle du produit tensoriel tordu $B(A) \otimes_\beta A$ est donnée par :

$$\partial_\beta(x \otimes y) = \partial x \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes \partial y \pm [a_1|\ldots|a_{n-1}] \otimes a_n y$$

avec $x = [a_1|\dots|a_n]$. Il s'en suit que la différentielle de $\overline{B(A)\otimes_\beta A}$ comporte trois composantes, dont deux sont stables dans chaque terme de la décomposition en somme directe, et dont la troisième :

$$\overline{B(A)}\otimes\Lambda \longrightarrow B(A)\otimes\overline{A}$$

est donnée par :

$$[a_1|\dots|a_n]\otimes 1 \mapsto \pm[a_1|\dots|a_{n-1}]\otimes a_n$$

Or cette dernière flèche est un isomorphisme, et le théorème en résulte par application de (1.25). On prouve de même que $H_*(\overline{C\otimes_\gamma\Omega(C)}) = 0$, grâce à la décomposition :

$$\overline{C\otimes\Omega(C)} = (\overline{C}\otimes\Omega(C))\oplus(\Lambda\otimes\overline{\Omega(C)})\ \square$$

(2.25) **Théorème** : *Soit $f : T(A)\longrightarrow T(B)$ un morphisme d'algèbres (resp. de coalgèbres) tensorielles, où A et B sont en degrés ≥ 1. Alors f est un isomorphisme si et seulement si $Q(f) : A\longrightarrow B$ (resp. $P(f) : A\longrightarrow B$) en est un.*

Ceci résulte immédiatement, par récurrence sur le degré, du lemme des cinq et du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I(T(A))\otimes I(T(A)) \arrow[r] \arrow[d, "f\otimes f"'] & I(T(A)) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & A \arrow[r] \arrow[d, "Q(f)"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I(T(B))\otimes I(T(B)) \arrow[r] & I(T(B)) \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Le cas dual se traite de même. $\square$

(2.26) **Théorème** : *Soit X un ensemble simplicial simplement connexe réduit. Il existe un morphisme de DGA-algèbres :*

$$\Phi_X : \Omega(C_*(X))\longrightarrow C_*(G(X))$$

naturel en X, et induisant un isomorphisme en homologie.

(Ce théorème est dû à Adams [1].) Nous avons construit en (2.3) une cochaîne de Brown naturelle en X :

$$t = t(\tau) : C_*(X)\longrightarrow C_*(G(X))$$

et le théorème de Brown (2.5) nous dit que le produit tensoriel tordu :

$$C_*(X)\otimes_t C_*(G(X))$$

a l'homologie de $X\times_\tau G(X)$ et est donc acyclique. La propriété universelle de γ nous donne le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Omega C_*(X) \arrow[rr, "\Phi_X"] & & C_*(G(X)) \\ & C_*(X) \arrow[ul, "\gamma"] \arrow[ur, "t"'] & \end{tikzcd}$$

dans lequel Φ_X est un morphisme de DGA-algèbres. On a donc un morphisme de constructions acycliques sans holonomie :

$$1\otimes\Phi_X : C_*(X)\otimes_\gamma \Omega C_*(X)\longrightarrow C_*(X)\otimes_t C_*(G(X))$$

ce qui prouve par (2.8) que Φ_X induit un isomorphisme en homologie. $\square$

(2.27) **Théorème** : *Soit H un groupe simplicial (non nécessairement connexe). Il existe un morphisme de DGA-coalgèbres :*

$$\Psi_H : C_*(W(H))\longrightarrow BC_*(H)$$

naturel en H et induisant un isomorphisme en homologie.

Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & C_*(H) & \\ C_*(W(H)) \arrow[ur, "t=t(\tau)"] \arrow[rr, "\Psi_H"'] & & BC_*(H) \arrow[ul, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

où Ψ_H est donné par la propriété universelle de β. Comme :

$$C_*(W(H)) \otimes_t C_*(H)$$
$$BC_*(H) \otimes_\beta C_*(H)$$

sont acycliques, il résulte de (2.9) que Ψ_H induit un isomorphisme en homologie. $\square$

Ces deux théorèmes montrent que la bar et la cobar-construction sont des analogues algébriques du classifiant et de l'espace des lacets.

(2.28) **Théorème** : *Soit A une DGA-algèbre connexe (resp. DGA-coalgèbre connexe). Le morphisme canonique :*

$$\Phi : \Omega B(A) \longrightarrow A$$
$$\text{(resp. } \Psi : C \longrightarrow B\Omega(C))$$

induit un isomorphisme en homologie.

En effet, on a les morphismes de constructions acyliques :

$$B(A) \otimes_\gamma \Omega B(A) \xrightarrow{1\otimes\Phi} B(A) \otimes_\beta A$$
$$C \otimes_\gamma \Omega(C) \xrightarrow{\Psi\otimes 1} B\Omega(C) \otimes_\beta \Omega(C)$$

Le résultat est donc une conséquence de (2.8) et (2.9).

les mêmes techniques montrent que si $f : A \longrightarrow A'$ est un morphisme de DGA-algèbres (non nécessairement connexes), ou $f : C \longrightarrow C'$ un morphisme de DGA-coalgèbres simplement connexes, induisant un isomorphisme en homologie, il en est de même des morphismes :

$$B(f) : B(A) \longrightarrow B(A')$$
$$\Omega(f) : \Omega(C) \longrightarrow \Omega(C')$$

2.6 Les petites constructions de Cartan et l'homologie de $K(\mathbb{Z}/p,n)$.

Nous allons maintenant montrer que si A est commutative, on peut itérer la bar-construction. On peut, comme H. Cartan [8], utiliser exactement la technique qui nous a permis d'itérer la construction W pour un groupe simplicial commutatif, mais nous allons donner une présentation différente, car dans le cas présent il se produit un phénomène inattendu : le produit qu'on obtient sur $B(A)$ est indépendant du produit de A (ce qui n'était pas le cas pour la construction W). Comme ce produit ne dépend manifestement pas non plus de la différentielle de A, on voit que la coalgèbre tensorielle $T(\uparrow\overline{A})$ est équipée canoniquement d'un produit. Évidemment, une question vient aussitôt à l'esprit : si le produit de $B(A)$ est indépendant de celui de A, à quoi sert la commutativité de ce dernier ? La réponse est simple : la différentielle de $B(A)$ (qui dépend du produit de A) n'est compatible avec le produit canonique de $B(A)$ que si A est commutative.

(2.29) **Théorème** : *Soit A un Λ-module gradué, $T(A)$ l'algèbre (resp. coalgèbre) tensorielle de A. Alors il existe sur $T(A)$ un unique coproduit D (resp. produit μ), tel que $T(A)$ soit une algèbre de Hopf* *unitaire, co-unitaire et que :*

$$\begin{array}{rcl} Dj_1 & = & \eta \otimes j_1 + j_1 \otimes \eta \\ (\text{resp. } \pi_1\mu & = & \pi_1 \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \pi_1) \end{array}$$

Ce coproduit (resp. produit) sera dit canonique.([3])

D doit être un homomorphisme d'algèbres unitaires :

$$D : T(A) \longrightarrow T(A) \otimes T(A)$$

Il est donc complètement déterminé, d'après (2.19), par Dj_1, qui nous est déjà donné, ce qui définit parfaitement D. De plus :

$$\begin{array}{rcl} (D \otimes 1)Dj_1 & = & (D \otimes 1)(\eta \otimes j_1 + j_1 \otimes \eta) \\ & = & \eta \otimes \eta \otimes j_1 + \eta \otimes j_1 \otimes \eta + j_1 \otimes \eta \otimes \eta \end{array}$$

L'associativité de D résulte donc immédiatement du fait que $(D \otimes 1)D$ et $(1 \otimes D)D$ sont des homomorphismes d'algèbres. La commutativité se prouve de même. On raisonne de façon duale pour le cas de la coalgèbre tensorielle $T(A)$. □

On peut donner une formule explicite pour D et μ. Nous donnons simplement des exemples :

$$\begin{array}{rcl} D[a] & = & [\ ] \otimes [a] + [a] \otimes [\ ] \\ D[a,b] & = & [\ ] \otimes [a,b] + [a] \otimes [b] + (-1)^{|a||b|}[b] \otimes [a] + [a,b] \otimes [\ ] \\ \mu([\ ] \otimes [a]) & = & [a] \\ \mu([a] \otimes [b]) & = & [a,b] + (-1)^{|a||b|}[b,a] \end{array}$$

(2.30) **Lemme** : *Si A (resp. C) est commutative, le produit canonique de $B(A)$ (resp. le coproduit canonique de $\Omega(C)$) est le seul morphisme de DGA-coalgèbres (resp. DGA-algèbres) tel que :*

$$\begin{array}{rcl} \beta\mu & = & \mu(\beta * \beta) \\ (\text{resp. } (\gamma * \gamma)D & = & D\gamma) \end{array}$$

où β et γ sont les cochaînes de Brown canoniques.

En effet, $\beta = \lambda{\downarrow}\pi_1$, donc :

$$\begin{array}{rcl} \beta\mu & = & \lambda{\downarrow}\pi_1\mu \\ & = & \lambda{\downarrow}(\pi_1 \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \pi_1) \\ & = & \mu(\lambda{\downarrow}\pi_1 \otimes \eta\varepsilon + \eta\varepsilon \otimes \lambda{\downarrow}\pi_1) \\ & = & \mu(\beta * \beta) \end{array}$$

Réciproquement, il existe un unique morphisme de DGA-coalgèbres μ de $B(A) \otimes B(A)$ dans $B(A)$, tel que :

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\mu"] & A \\ B(A) \otimes B(A) \arrow[u, "\beta * \beta"] \arrow[r, "\mu"'] & B(A) \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

soit commutatif, par finalité de β, et parce que, A étant commutative,

$$\mu : A \otimes A \longrightarrow A$$

est un morphisme de DGA-algèbres. C'est donc nécessairement le produit canonique. Le cas dual se traite de même. □

3. Il est aussi appelé shuffle-(co)produit.

(2.31) **Lemme** : *Si $f : A \longrightarrow A'$ (resp. $g : C \longrightarrow C'$) est un morphisme de DGA-algèbres (resp. DGA-coalgèbres) commutatives,*

$$\begin{array}{rcl} B(f) & : & B(A) \longrightarrow B(A') \\ (\text{resp. } \Omega(g) & : & \Omega(C) \longrightarrow \Omega(C')) \end{array}$$

est un morphisme d'algèbres de Hopf.

La vérification est laissée au lecteur. □

(2.32) **Définition** : *Une construction principale $M \otimes_\theta A$ est dite multiplicative, si A est commutative, si M est une DGA-algèbre commutative, et si θ est tel que l'algèbre produit $M \otimes A$, munie de la différentielle ∂_θ est une DGA-algèbre.*

Noter qu'alors les flèches :

$$A \xrightarrow{\eta\otimes 1} M \otimes_\theta A \xrightarrow{1\otimes\varepsilon} M$$

sont des morphismes de DGA-algèbres. En particulier, A est une sous-DGA-algèbre de $M \otimes_\theta A$.

(2.33) **Définition** : *Soit A une DGA-algèbre, M une DGA-algèbre de Hopf,*

$$t : M \longrightarrow A$$

une cochaîne de Brown. On dit que t est coprimitive si $\mu(t * t) = t\mu$.

Remarquer que pour A commutative, $\beta : B(A) \longrightarrow A$ est coprimitive.

(2.34) **Lemme** : *Soit A une DGA-algèbre commutative, M une DGA-algèbre de Hopf dont le produit est commutatif,*

$$t : M \longrightarrow A$$

une cochaîne de Brown coprimitive. Alors

$$M \otimes_t A$$

est une construction multiplicative.

La seule chose à vérifier est que ∂_t commute au produit de $M \otimes A$. Or, considérons les flèches :

$$\begin{array}{c} (M \otimes_t A) \otimes (M \otimes_t A) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle 1\otimes T\otimes 1} \\ (M \otimes M) \otimes_{t*t} (A \otimes A) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle 1\otimes\mu} \\ (M \otimes M) \otimes_{\mu(t*t)} A \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \mu\otimes 1} \\ M \otimes_t A \end{array}$$

La composition de ces trois flèches est par définition le produit de $M \otimes A$. La première flèche commute aux différentielles, par définition de $t * t$, la deuxième, parce que A étant commutative,

$$\mu : A \otimes A \longrightarrow A$$

est un morphisme de DGA-algèbres, la troisième, parce que M étant une algèbre de Hopf,

$$\mu : M \otimes M \longrightarrow M$$

est un morphisme de DGA-coalgèbres, et parce que t étant coprimitive, on a :

$$t\mu = \mu(t * t) \ \square$$

(2.35) **Corollaire** : *Si A est une DGA-algèbre commutative, $B(A) \otimes_\beta A$ est une construction multiplicative.* $\square$

(2.36) **Théorème** : *Soit $M \otimes_\theta A$ une construction multiplicative. Il existe un unique morphisme de DGA-algèbres :*

$$\Phi : M \otimes_\theta A \longrightarrow B(A) \otimes_\beta A$$

qui soit l'identité sur A, et qui envoie M dans $B(A)$.

(2.37) **Théorème** : *Soit $M \otimes_\theta A$ une construction multiplicative, telle que $A = C_*(H)$, où H est un groupe simplicial commutatif. Alors il existe un unique morphisme de DGA-algèbres :*

$$\Phi : M \otimes_\theta A \longrightarrow C_*(W(H) \times_\tau H)$$

qui soit l'identité sur A, et qui envoie M dans $C_*(W(H))$.

Noter que si H est commutatif, $W(H) \times_\tau H$ est aussi un groupe simplicial commutatif (même preuve que pour $W(H)$), et que H est un sous-groupe de $W(H) \times_\tau H$. Par ailleurs, la pseudo-section $\sigma(x) = (x, 1)$ permet de voir $C_*(W(H))$ comme un sous-module de $C_*(W(H) \times_\tau H)$ (mais non pas comme un sous-complexe).

Les deux théorèmes précédents se prouvent de la même manière, en utilisant le fait que tout cycle d'augmentation nulle de $B(A) \otimes_\beta A$ (resp. $C_*(W(H) \times_\tau H)$ est d'une façon unique le bord d'un élément de $B(A)$ (resp. $C_*(W(H))$) (voir H. Cartan [8]). De ces théorèmes on déduit :

(2.38) **Théorème** : *Soit π un groupe commutatif (non simplicial), et $(A_{i+1} \otimes_{\theta_i} A_i)_{i \geq 0}$ une suite de constructions multiplicatives acycliques, telles que $A_0 = \Lambda[\pi]$. Alors il existe un morphisme de DGA-algèbres :*

$$A_n \longrightarrow C_*(K(\pi, n))$$

induisant un isomorphisme en homologie. En conséquence, l'algèbre (de Pontrjagin) $H_*(K(\pi, n); \Lambda)$ est isomorphe à $H_*(A_n)$.

Pour calculer les algèbres $H_*(K(\pi, n); \Lambda)$ il suffit donc d'exhiber ces constructions. C'est ce qui a été fait par H. Cartan pour π quelconque, et pour $\Lambda = \mathbb{Z}/p$ ou $\mathbb{Z}$. Nous en redonnons ci-dessous une description pour $\pi = \mathbb{Z}/p$ et $\Lambda = \mathbb{Z}/p$. Dans toute la suite, l'entier p est un nombre premier fixé. L'algèbre $H_*(K(\mathbb{Z}/p, n); \mathbb{Z}/p)$ sera notée $H_*(n)$. Nous introduisons quelques algèbres utiles à cette description.

(2.39) **Définition** : *On désigne par $V(x, n)$ ($n \geq 1$) le $\mathbb{Z}/p$-espace vectoriel gradué dont une base est constituée de l'unique vecteur x, qui est de degré n. On définit les DGA-algèbres de Hopf (à différentielles nulles) suivantes :*

- *$E(x, n)$ est l'algèbre extérieure de $V(x, n)$. Son coproduit est défini par $D(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$.*
- *$P(x, n)$ est l'algèbre tensorielle de $V(x, n)$, qui est une algèbre de Hopf par (2.29).*
- *$\Gamma(x, n)$ est la coalgèbre tensorielle de $V(x, n)$, qui est une algèbre de Hopf par (2.29).*

Noter que dans chacune des ces trois algèbres, le produit et le coproduit sont commutatifs, et que x est primitif, c'est-à-dire :

$$D(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

De plus, l'algèbre de Hopf duale de $E(x, n)$ est isomorphe à $E(x, n)$, et $P(x, n)$ et $\Gamma(x, n)$ sont mutuellement duales. La formule :

$$D\mu = (\mu \otimes \mu)(1 \otimes T \otimes 1)(D \otimes D)$$

nous montre par récurrence, que le coproduit de $P(x, n)$ est donné par :

$$D(x^q) = \sum_{\alpha+\beta=q} (\alpha, \beta) x^\alpha \otimes x^\beta \tag{2.40}$$

où (α,β) est le coefficient du binôme $\dfrac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\beta!}$ réduit modulo p. D'une façon duale, et en posant :

$$\gamma_i(x) = [x|\dots|x] \qquad\qquad (i \text{ fois la lettre } x)$$

le produit de $\Gamma(x,n)$ est donné par :

$$\gamma_i(x)\gamma_j(x) = (i,j)\gamma_{i+j}(x)$$

En particulier :

$$x\gamma_i(x) = i\gamma_{i+1}(x)$$

et par réccurrence :

$$x^i = i!\gamma_i(x)$$

C'est pourquoi les $\gamma_i(x)$ s'appellent les « puissances divisées de x ».

Nous donnons maintenant un procédé de fabrication de constuctions multiplicatives. On a vu en (2.34) que si A est une DGA-algèbre commutative, M une DGA-algèbre de Hopf, dont le produit est commutatif, t une cochaîne de Brown coprimitive de M dans A, alors $M \otimes_t A$ est une construction multiplicative.

(2.41) **Définition** : *Une DGA-algèbre A est dite strictement commutative si elle est commutative et si en caractéristique 2 (i.e. si $\Lambda = \mathbb{Z}/2$), tout élément de degré strictement positif est de carré nul.*

Remarquer que $E(x,n)$ et $\Gamma(x,n)$ sont des algèbres strictement commutatives.

(2.42) **Lemme** : *Soit A une DGA-algèbre strictement commutative, z un $(n-1)$-cycle $(n \geq 1)$ de A, d'augmentation nulle, M la DGA-algèbre de Hopf $E(x,n)$ si n et p sont impairs, $\Gamma(x,n)$ sinon, et :*

$$t : M \longrightarrow A$$

l'application définie par $t(x) = z$ et nulle en toute autre dimension que celle de x. Alors t est une cochaîne de Brown coprimitive, et en conséquence

$$M \otimes_t A$$

est une construction multiplicative, qui est de plus strictement commutative.

En effet, comme $\varepsilon(z) = 0$, on a $\varepsilon t = 0$. De plus, $\partial t(u)$ est nul pour tout u de M, puisque z est un cycle. $t(\partial u)$ est nul, puisque la différentielle de M est nulle, et $\mu(t\otimes t)D(u)$ est clairement nul si le degré de u n'est pas deux fois celui de x. Si maintenant $|u| = 2|x|$, u est nul si p et n sont impairs, et sinon $\mu(t\otimes t)D(u)$ est un multiple de z^2, qui est nul car si n est pair, z est de degré impair et sinon (si n est impair) p est pair et $z^2 = 0$ par commutativité stricte. t est donc une cochaîne de Brown. Par ailleurs, pour u et v homogènes dans M,

$$\mu(t * t)(u\otimes v) = \mu(t\otimes \eta\varepsilon + \varepsilon\otimes t)(u\otimes v)$$

est non nul seulement si u et v vérifient $\varepsilon(u) \neq 0$ et $t(v) \neq 0$, ou $t(u) \neq 0$ et $\varepsilon(v) \neq 0$, auquel cas on peut supposer que $u = x$ et $v = 1$ ou $u = 1$ et $v = x$, ce qui donne :

$$\mu(t * t)(u\otimes v) = t(x)$$

Mais $t\mu(u\otimes v)$ est non nul dans les mêmes conditions, et est clairement égal à $t(x)$. □

(2.43) **Théorème** : *$H_*(1)$ est isomorphe à $\Gamma(y,2)\otimes E(x,1)$ (comme DGA-algèbre).*

Il suffit d'après (2.38) de montrer qu'il existe une construction multiplicative acyclique de fibre $\mathbb{Z}/p[\mathbb{Z}/p]$ et de base $\Gamma(y,2)\otimes E(x,1)$. On notera les éléments de $\mathbb{Z}/p[\mathbb{Z}/p]$ comme des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}/p$ des symboles e^α, où $\alpha \in \mathbb{Z}/p$. Les règles de calcul sont celles de la fonction exponentielle. Considérons le cycle d'augmentation nulle $e^1 - e^0$ dans $\mathbb{Z}/p[\mathbb{Z}/p]$. Posons $t(x) = e^1 - e^0$, et considérons la construction multiplicative :

$$E(x,1)\otimes_t \mathbb{Z}/p[\mathbb{Z}/p]$$

Dans cette algèbre, $x \otimes \omega$ (où $\omega = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}/p} e^\alpha$) est un 1-cycle. En effet :

$$\begin{aligned} \partial_t(x \otimes \omega) &= t \frown x \otimes \omega \\ &= 1 \otimes t(x)\omega \\ &= 1 \otimes (e^1 - e^0) \sum_\alpha e^\alpha \\ &= 0 \end{aligned}$$

Posons $t'(y) = x \otimes \omega$, et considérons la construction multiplicative :

$$\Gamma(y, 2) \otimes_{t'} (E(x, 1) \otimes_t \mathbb{Z}/p[\mathbb{Z}/p])$$

Comme $\mathbb{Z}/p[\mathbb{Z}/p]$ est une sous-DGA-algèbre de $E(x, 1) \otimes_t \mathbb{Z}/p[\mathbb{Z}/p]$, on peut aussi considérer cette dernière construction comme une construction multiplicative de fibre $\mathbb{Z}/p[\mathbb{Z}/p]$, qu'on notera :

$$(\Gamma(y, 2) \otimes (E(x, 1)) \otimes_\theta \mathbb{Z}/p[\mathbb{Z}/p] \tag{2.44}$$

(mais qui n'est plus un produit tensoriel tordu).

Il est clair que $\Gamma(y, 2) \otimes E(x, 1) \otimes \mathbb{Z}/p[\mathbb{Z}/p]$ est un $\mathbb{Z}/p[\mathbb{Z}/p]$-module, admettant pour base les éléments :

$$1,\ x,\ y,\ xy,\ \gamma_2(y),\ x\gamma_2(y),\ \gamma_3(y),\ \ldots$$

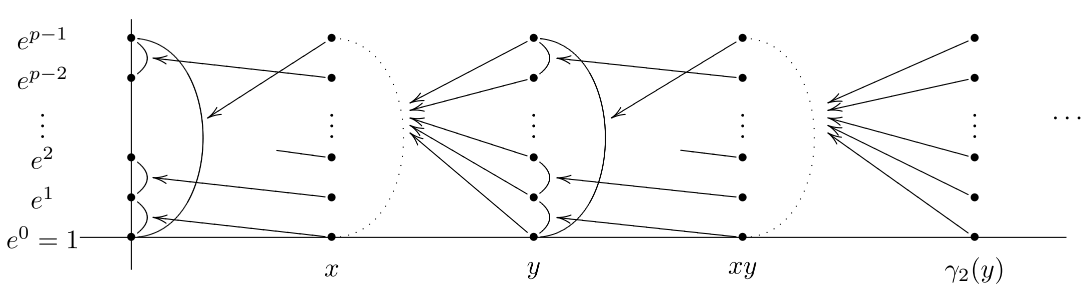
qui sont de degrés respectifs $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$. La différentielle de la construction, qui est $\mathbb{Z}/p[\mathbb{Z}/p]$-linéaire (car la différentielle de la fibre est nulle), est donnée par :

$$\begin{aligned} \partial_\theta(\gamma_i(y)) &= \partial_{t'}(\gamma_i(y) \otimes 1) \\ &= t' \frown \gamma_i(y) \otimes 1 \\ &= \gamma_i(y) \otimes x\omega \\ &= \gamma_{i-1}(y)x \otimes \omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_\theta(\gamma_i(y)x) &= \partial_{t'}(\gamma_i(y) \otimes x) \\ &= \gamma_i(y) \otimes \partial_t(x) + t' \frown \gamma_i(y) \otimes x \\ &= \gamma_i(y) \otimes t \frown (x \otimes 1) + \gamma_{i-1}(y) \otimes x^2\omega \\ &= \gamma_i(y) \otimes 1 \otimes (e^1 - e^0) \\ &= \gamma_i(y) \otimes (e^1 - e^0) \end{aligned}$$

Nous sommes donc en présence de la classique résolution de $\mathbb{Z}/p$ par des $\mathbb{Z}/p[\mathbb{Z}/p]$-modules libres. L'acyclicité est dûe au fait que dans $\mathbb{Z}/p[\mathbb{Z}/p]$ un élément est multiple de ω (resp. de $e^1 - e^0$) si et seulement si son produit par $e^1 - e^0$ (resp. ω) est nul.

Nous donnons une représentation graphique de cette construction, dans laquelle une flèche suivie d'une parenthèse (resp. parenthèse en pointillés) signifie que l'élément qui se trouve à sa source a pour bord la différence des deux éléments aux extrémités de la parenthèse (resp. la somme de tous les élements rassemblés par la parenthèse en pointillés). Sur le dessin, l'acyclicité est nettement visible.



Remarquer enfin que $\varepsilon(\omega) = 0$ et $\varepsilon(e^1 - e^0) = 0$, donc que $(1 \otimes \varepsilon)\partial_\theta$ est nul. En conséquence, la différentielle de la base $\Gamma(y, 2) \otimes E(x, 1)$ est nulle. □

Nous passons maintenant au calcul des algèbres $H_*(n)$ pour $n \geq 1$.

(2.45) **Définition** : *Soit I l'idéal de l'algèbre $P(x, n)$ engendré par x^q. On notera $Q_q(x, n)$ l'algèbre quotient $P(x, n)/I$, et on l'appelera l'algèbre des polynômes en x tronquée à la hauteur q.*

Remarquer que $Q_2(x, n)$ n'est autre que $E(x, n)$ (comme DGA-algèbre).

(2.46) **Lemme** : *L'algèbre $E(x, n)$ est la fibre d'une construction multiplicative acyclique dont la base est $\Gamma(y, n + 1)$.*

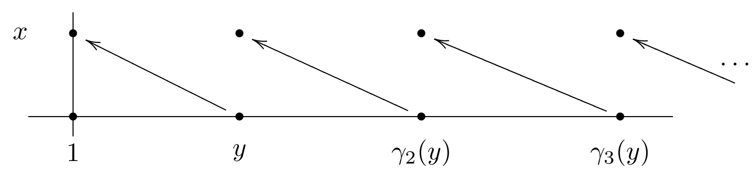
Posons $t(y) = x$. Le lemme (2.42) nous donne la construction multiplicative :

$$\Gamma(y, n + 1) \otimes_t E(x, n) \tag{2.47}$$

La différentielle, qui est $E(x, n)$-linéaire, est donnée par :

$$\begin{aligned} \partial_t(\gamma_i(y)) &= t \frown \gamma_i(y) \otimes 1 \\ &= \gamma_{i-1}(y) \otimes x \end{aligned}$$

ce qui est illustré par le dessin suivant, sur lequel l'acyclicité est visible.



(2.48) **Lemme** : *Pour p premier impair, l'algèbre $Q_p(x, 2q)$ est la fibre d'une construction multiplicative acyclique de base :*

$$\Gamma(z, 2pq + 2) \otimes E(y, 2q + 1)$$

Posons $t(y) = x$. On obtient la construction multiplicative :

$$E(y, 2q + 1) \otimes_t Q_p(x, 2q)$$

qui contient le $(2pq + 1)$-cycle $y \otimes x^{p-1}$. En effet :

$$\begin{aligned} \partial_t(y \otimes x^{p-1}) &= t \frown y \otimes x^{p-1} \\ &= 1 \otimes t(y)x^{p-1} \\ &= 1 \otimes x^p \\ &= 0 \end{aligned}$$

On peut donc poser $t'(z) = y \otimes x^{p-1}$, et on obtient la construction multiplicative :

$$\Gamma(z, 2pq + 2) \otimes_{t'} (E(y, 2q + 1) \otimes_t Q_p(x, 2q))$$

que nous pouvons considérer comme une construction multiplicative de fibre $Q_p(x, 2q)$, et que nous notons :

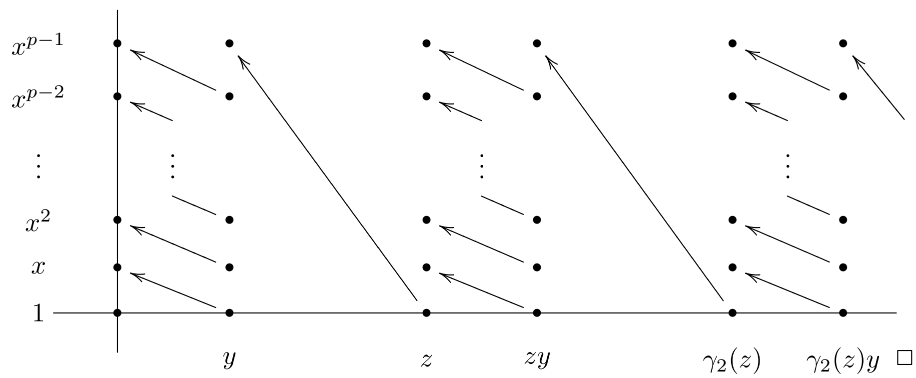
$$(\Gamma(z, 2pq + 2) \otimes E(y, 2q + 1)) \otimes_\theta Q_p(x, 2q) \tag{2.49}$$

Comme précédemment, la différentielle est $Q_p(x, 2q)$-linéaire, et nous avons :

$$\begin{aligned}
\partial_\theta(\gamma_i(z)) &= \partial_{t'}(\gamma_i(z) \otimes 1) \\
&= t' \frown \gamma_i(z) \otimes 1 \\
&= \gamma_{i-1}(z) \otimes y \otimes x^{p-1} \\
&= \gamma_{i-1}(z) y \otimes x^{p-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\theta(\gamma_i(z)y) &= \partial_{t'}(\gamma_i(z) \otimes y) \\
&= \gamma_i(z) \otimes \partial_t(y) + t' \frown \gamma_i(z) \otimes y \\
&= \gamma_i(z) \otimes t \frown (y \otimes 1) + \gamma_{i-1}(z) \otimes y^2 x^{p-1} \\
&= \gamma_i(z) \otimes 1 \otimes x \\
&= \gamma_i(z) \otimes x
\end{aligned}$$

ce qui donne le dessin suivant sur lequel on voit bien l'acyclicité :



□

(2.50) **Lemme** : *La catégorie des DGA-algèbres commutatives a des sommes infinies (qu'on appelera des produits tensoriels infinis).*

En effet, soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille éventuellement infinie de DGA-algèbres commutatives. Alors la famille :

$$\left(\bigotimes_{i \in J} A_i \right)_{J \in \mathcal{P}_{\mathrm{f}}(I)}$$

où $\mathcal{P}_{\mathrm{f}}(I)$ est l'ensemble de toutes les parties finis de I, est un système inductif d'algèbres (pour $J \subset J'$, le morphisme de $\bigotimes_{i \in J} A_i$ dans $\bigotimes_{i \in J'} A_i$ est obtenu en tensorisant avec les unités des A_i pour les i qui ne sont pas dans J). La limite inductive de ce système sera notée :

$$\bigotimes_{i \in I} A_i$$

et on a une inclusion canonique de A_i dans cette limite. Il est clair que c'est une somme dans la catégorie des DGA-algèbres commutatives. □

Sur un tenseur de la forme :

$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$$

l'augmentation et la différentielle sont définies comme en (1.15), c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\varepsilon(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &= \varepsilon(a_1) \dots \varepsilon(a_n) \\
\partial(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &= \partial^{[n]}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)
\end{aligned}$$

(voir (2.17) pour la notation $\partial^{[n]}$).

(2.51) **Lemme** : *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille éventuellement infinie de DGA-algèbres commutatives. Si chaque A_i est la fibre d'une construction multiplicative acyclique, dont la base est la DGA-algèbre M_i, alors $\bigotimes_{i\in I} A_i$ est la fibre d'une construction multiplicative acyclique dont la base est $\bigotimes_{i\in I} M_i$.*

On peut en effet, considérer le produit infini :

$$\bigotimes_{i\in I}(M_i \otimes_{\theta_i} A_i)$$

où chaque $M_i \otimes_{\theta_i} A_i$ est une construction multiplicative acyclique. On peut réécrire ce produit sous la forme :

$$(\bigotimes_{i\in I} M_i) \otimes_\theta (\bigotimes_{i\in I} A_i)$$

et il est clair qu'il s'agit d'une construction multiplicative. L'acyclicité vient du fait que l'homologie commute aux limites inductives. □

(2.52) **Lemme** : *Si $\Lambda = \mathbb{Z}/p$ (p premier), la flèche :*

$$\Phi : \bigotimes_{i=1}^{\infty} Q_p(y_i, p^i n) \longrightarrow \Gamma(x, n)$$

définie par :

$$\Phi(y_i) = \gamma_{p^i}(x)$$

est un isomorphisme de DGA-algèbres (à différentielles nulles).

Pour voir que Φ est bien définie, il suffit de prouver que $(\Phi(y_i))^p = 0$, or :

$$\begin{aligned}(\Phi(y_i))^p &= \gamma_{p^i}(x)^p \\ &= (p^i, p^i)(2p^i, p^i)(3p^i, p^i)\dots((p-1)p^i, p^i)\gamma_{p^{i+1}}(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

car le coefficient du binôme $((p-1)p^i, p^i)$ est zéro modulo p, comme on peut le constater à l'aide de l'égalité modulo p :

$$(x+y)^{p^{i+1}} = x^{p^{i+1}} + y^{p^{i+1}}$$

Par ailleurs, l'égalité modulo p suivante :

$$(x+y)^{kp^i} = (x^{p^i} + y^{p^i})^k$$

montre que $((k-1)p^i, p^i) = (k-1, 1) = k$ modulo p. On en déduit plus généralement que :

$$(\gamma_{p^i}(x))^k = k!\gamma_{kp^i}(x)$$

De plus, si k est strictement plus petit que p, et si h est un entier quelconque, on a :

$$(hp^{i+1}, kp^{i+1}) = (k, 0) = 1 \qquad \text{modulo } p$$

comme le montre l'égalité suivante :

$$(x+y)^{kp^i + hp^{i+1}} = (x^{p^i} + y^{p^i})^k (x^{p^{i+1}} + y^{p^{i+1}})^h$$

Soit maintenant :

$$k = k_0 + k_1 p + \dots + k_i p^i$$

l'écriture en base p de k. Les $k_0, \dots, k_i$ non nuls sont plus petits que p, donc inversibles dans $\mathbb{Z}/p$, et :

$$\begin{aligned}\gamma_k(x) &= \gamma_{k_0 + k_1 p + \dots + k_i p^i}(x) \\ &= \gamma_{k_0}(x)\gamma_{k_1 p}(x)\dots\gamma_{k_i p^i}(x) \\ &= \frac{x^{k_0}}{k_0!}\frac{\gamma_p(x)^{k_1}}{k_1!}\dots\frac{\gamma_{p^i}(x)^{k_i}}{k_i!} \qquad (0! = 1)\end{aligned}$$

et bien sûr, cette décomposition de $\gamma_k(x)$ sous forme d'un monôme en :

$$x,\ \gamma_p(x),\ \dots,\ \gamma_{p^i}(x)$$

avec des exposants strictement plus petits que p, est unique pour des raisons de degré. Ceci prouve que Φ est bijectif. □

Nous donnons maintenant les éléments nécessaires à la description de $H_*(n)$.

Pour $p = 2$, on considère l'alphabet composé des deux lettres σ et γ, et pour p impair, l'alphabet composé des trois lettres σ, ϕ et γ. On appelle « mot » une suite finie (éventuellement vide, auquel cas on parle de « mot vide ») de lettres de l'alphabet. Les lettres peuvent bien sûr se répéter. La première lettre est celle de gauche, la dernière celle de droite.

(2.53) **Définition** : *Un mot est dit admissible, s'il est non vide, et si :*

- *Dans le cas $p = 2$, il commence et se finit par σ.*
- *Dans le cas p impair, il commence et se finit par σ ou ϕ, et pour chaque lettre γ ou ϕ du mot, le nombre de lettres σ situées à droite de cette lettre est pair.*

La hauteur d'un mot α est le nombre total de lettres de ce mot égales à σ ou à ϕ. Le degré des mots est défini par récurrence, par les formules :

$$\begin{cases} |\emptyset| = 0 \\ |\sigma\alpha| = |\alpha| + 1 \\ |\gamma\alpha| = p|\alpha| \\ |\phi\alpha| = p|\alpha| + 2 \end{cases}$$

(2.54) **Définition** : *On désigne par A_n l'ensemble des mots admissibles de hauteur n. Soit α un mot admissible de hauteur $n-1$. On désigne par $\mathcal{F}(\alpha)$ le sous-ensemble de A_n des mots se terminant par le mot α.*

(2.55) **Lemme** : *Avec les notations de la définition ci-dessus, A_n est la réunion disjointe de la famille :*

$$(\mathcal{F}(\alpha))_{\alpha \in A_{n-1}}$$

Il est clair que les $\mathcal{F}(\alpha)$ sont disjoints. Soit β un mot admisible de hauteur n, α le mot obtenu en enlevant à β toutes les lettres qui sont à gauche de la deuxième lettre de β égale à σ ou ϕ. α est clairement admissible de hauteur $n-1$. □

(2.56) **Lemme** : *Soit α un mot admissible de hauteur $n-1$. Alors $\mathcal{F}(\alpha)$ est formé des mots suivants :*

$$\begin{array}{lll} \sigma\gamma^k\alpha & (k \in \mathbb{N}) & \text{si } p = 2 \\ \sigma\alpha & & \text{si } p \neq 2 \text{ et } |\alpha| \text{ impair} \\ \sigma\gamma^k\alpha,\ \phi\gamma^k\alpha & (k \in \mathbb{N}) & \text{si } p \neq 2 \text{ et } |\alpha| \text{ pair} \end{array}$$

où $\gamma^k = \gamma \dots \gamma$ (k fois γ).

Ceci est une conséquence immédiate de la définition. □

(2.57) **Définition** : *Si α est un mot admissible, on définit l'algèbre $U(\alpha)$ par :*

$$\begin{array}{lcll} U(\alpha) & = & \Gamma(\alpha, |\alpha|) & \text{si } p = 2 \\ U(\alpha) & = & E(\alpha, |\alpha|) & \text{si } p \neq 2 \text{ et } |\alpha| \text{ impair} \\ U(\alpha) & = & \Gamma(\alpha, |\alpha|) & \text{si } p \neq 2 \text{ et } |\alpha| \text{pair} \end{array}$$

(2.58) **Théorème** : *L'algèbre $H_*(n)$ est isomorphe à $\displaystyle\bigotimes_{\alpha \in A_n} U(\alpha)$, pour $n \geq 1$.*

Nous prouvons ce théorème par récurrence sur n. Pour $p = 2$, A_1 est réduit au seul mot σ. Par ailleurs, on a les isomorphismes :

$$\begin{array}{rcl} H_*(1) & \simeq & \Gamma(y, 2) \otimes E(x, 1) \\ & \simeq & \bigotimes_{k=0}^{\infty} Q_2(y_k, 2^{k+1}) \otimes E(x, 1) \\ & \simeq & \bigotimes_{k=0}^{\infty} Q_2(z_k, 2^k) \\ & \simeq & \Gamma(x, 1) \\ & \simeq & U(\sigma) \end{array}$$

avec $z_k = y_{k-1}$, pour $k \geq 1$.

Pour p impair, A_1 ne contient que les mots σ et ϕ, de degrés respectifs 1 et 2. Or $H_*(1)$ est isomorphe à $\Gamma(y, 2) \otimes E(x, 1)$, c'est-à-dire à :

$$U(\phi) \otimes U(\sigma)$$

Le théorème est donc prouvé pour $n = 1$.

(2.59) **Lemme** : *Soit α un mot admissible de hauteur au moins égale à 1. Alors il existe une construction multiplicative acyclique, de fibre $U(\alpha)$ et de base* $\bigotimes_{\beta \in \mathcal{F}(\alpha)} U(\beta)$.

Si $p = 2$, ou si $p \neq 2$ et $|\alpha|$ pair, $U(\alpha)$ est l'algèbre $\Gamma(\alpha, |\alpha|)$. Elle est isomorphe, d'après (2.52), à :

$$\bigotimes_{k=0}^{\infty} Q_p(\gamma^k \alpha, p^k |\alpha|)$$

Mais $Q_p(\gamma^k \alpha, p^k |\alpha|)$ est la fibre d'une construction multiplicative acyclique, de base :

$$\begin{array}{cl} \Gamma(\sigma\gamma^k \alpha, p^k |\alpha| + 1) & \text{si } p = 2 \\ \Gamma(\phi\gamma^k \alpha, p^{k+1} |\alpha| + 2) \otimes E(\sigma\gamma^k \alpha, p^k |\alpha| + 1) & \text{si } p \neq 2 \text{ et } |\alpha| \text{ pair} \end{array}$$

d'après (2.46) et (2.48). Pour ces deux cas, le lemme résulte donc du lemme (2.51). Si $p \neq 2$ et $|\alpha|$ impair, $U(\alpha)$ est $E(\alpha, |\alpha|)$, qui est la fibre d'une construction multiplicative acyclique de base $\Gamma(\sigma\alpha, |\alpha| + 1)$, ce qui prouve le lemme. □

Les lemmes (2.59), (2.51) et (2.55) prouvent donc que $\bigotimes_{\alpha \in A_{n-1}} U(\alpha)$ est la fibre d'une construction multiplicative acyclique de base :

$$\bigotimes_{\alpha \in A_n} U(\alpha)$$

ce qui, en vertu de (2.38), suffit à prouver (2.58). □

Chapitre 3

A_∞-structures

3.1 Deux définitions des A_∞-algèbres et A_∞-coalgèbres.

Désormais, $T(M)$ désignera l'algèbre tensorielle d'un module gradué M, et $\Theta(M)$ sa coalgèbre tensorielle.

(3.1) **Définition** : *Une A_∞-algèbre (resp. A_∞-coalgèbre) est un couple (A, m) (resp. (C, Δ)), où A (resp. C) est un Λ-module gradué, et*

$$\begin{array}{rcl} m & : & \Theta(A) \longrightarrow A \\ \text{(resp. } \Delta & : & C \longrightarrow T(C)) \end{array}$$

une application linéaire telle que

$$\begin{array}{rcl} \partial = -(\uparrow m \Theta(\downarrow))^{[\ ]} & : & \Theta(\uparrow A) \longrightarrow \Theta(\uparrow A) \\ \text{(resp. } \partial = -(T(\downarrow)\Delta\uparrow)^{[\ ]} & : & T(\downarrow C) \longrightarrow T(\downarrow C)) \end{array}$$

fasse de $\Theta(\uparrow A)$ (resp. $T(\downarrow C)$) une DGA-coalgèbre (resp. DGA-algèbre).

Nous poserons :

$$\begin{array}{rclr} m_i & = & m j_i & (i \geq 1) \\ \Delta_i & = & \pi_i \Delta & (i \geq 1) \end{array}$$

La donnée de m est équivalente à celle de la famille des m_i, et celle de Δ à celle de la famille localement finie des Δ_i.(1)

La définition suivante est équivalente à (3.1).

(3.2) **Définition** : *Une A_∞-algèbre (resp. A_∞-coalgèbre) est un Λ-module gradué A (resp. C) muni d'une famille de flèches $m_i : A^i \longrightarrow A$ ($i \geq 1$) (resp. une famille localement finie de flèches $\Delta_i : C \longrightarrow C^i$ ($i \geq 1$)), telle que m_i (resp. Δ_i) soit de degré $i-2$ et telles que (pour $n \geq 1$) :*

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{\lambda=0}^{n-k}(-1)^{k+\lambda+k\lambda} m_{n-k+1}(1^\lambda \otimes m_k \otimes 1^{n-k-\lambda}) & = & 0 \\ \text{(resp. } \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{\lambda=0}^{n-k}(-1)^{k+\lambda+k\lambda}(1^{n-k-\lambda} \otimes \Delta_k \otimes 1^\lambda)\Delta_{n-k+1} & = & 0) \end{array}$$

1. $T(C)$ est une somme directe infinie, mais un vecteur de $T(C)$ est une somme finie d'éléments pris dans les termes de cette somme directe. On peut donc voir $\Delta : C \longrightarrow T(C)$ comme la somme infinie des Δ_i, mais cette somme devient finie quand on l'applique à un élément de C. C'est le sens de l'expression « localement finie », qui sera réutilisée chaque fois qu'on aura des sommes infinies de fonctions, dont l'évaluation sur un élément quelconque devient une somme finie. En fait, les sommes localement finies de fonctions sont celles qui convergent simplement quand la cible est munie de la topologie discrète.

Démonstration de l'équivalence de (3.1) et (3.2) : Soit (A, m) une A_∞-algèbre au sens de (3.1). Comme $\uparrow m\Theta(\downarrow)$ est de dégré -1, il est clair que m_i est de degré $i-2$. La relation $\uparrow m\Theta(\downarrow)(\uparrow m\Theta(\downarrow))^{[\ ]} = 0$ peut encore s'écrire :

$$\sum_{k=1}^{n} (\uparrow m_{n-k+1} \downarrow^{n-k+1})(\uparrow m_k \downarrow^k)^{[n-k+1]} = 0 \qquad (n \geq 1)$$

ou encore :

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\lambda=0}^{n-k} \uparrow m_{n-k+1} \downarrow^{n-k+1} (1^\lambda \otimes \uparrow m_k \downarrow^k \otimes 1^{n-k-\lambda}) = 0 \qquad (n \geq 1)$$

qui n'est autre que la relation de la définition (3.2). La réciproque est conséquence immédiate du lemme (2.16). Le cas dual se traite de même. □

Remarquons que pour $n = 1, 2, 3$, les relations de (3.2) s'écrivent :

$$\begin{aligned} m_1 m_1 &= 0 \\ -m_2(m_1 \otimes 1 + 1 \otimes m_1) + m_1 m_2 &= 0 \\ m_3(m_1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes m_1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes m_1) - m_2(m_2 \otimes 1) + m_2(1 \otimes m_2) + m_1 m_3 &= 0 \end{aligned}$$

m_1 est donc une différentielle sur A, m_2 un produit respectant la différentielle. La troisième relation dit que m_2 est associatif à homotopie près. On peut donc parler de l'homologie de A (relativement à m_1), qui est une algèbre associative. Nous verrons plus loin comment cette homologie peut, elle aussi, recevoir une structure de A_∞-algèbre.

Si A est une DGA-algèbre (associative), nous la considérerons comme une A_∞-algèbre, en posant :

$$m_1 = \partial,\ m_2 = \mu,\ m_i = 0\ (i \geq 3)$$

De même, si C est une DGA-coalgèbre (associative), nous la considérerons comme une A_∞-coalgèbre, en posant :

$$\Delta_1 = \partial,\ \Delta_2 = D,\ \Delta_i = 0\ (i \geq 3)$$

En particulier, Λ est une A_∞-algèbre et une A_∞-coalgèbre.

3.2 A_∞-morphismes.

(3.3) **Définition** : *Soient (A, m) et (A', m') deux A_∞-algèbres (resp. (C, Δ) et (C', Δ') deux A_∞-coalgèbres). Un A_∞-morphisme de A vers A' (resp. de C vers C') est une flèche :*

$$\begin{aligned} f &: \Theta(A) \longrightarrow A' \\ \textit{(resp. } f &: C \longrightarrow T(C')) \end{aligned}$$

telle que l'unique relèvement (resp. prolongement) de $\uparrow f\Theta(\downarrow)$ (resp. $T(\downarrow)f\uparrow$) dans $\Theta(\uparrow A')$ (resp. $T(\downarrow C)$) soit un morphisme de DGA-coalgèbres (resp. DGA-algèbres).

Nous posons $f_i = f j_i$ (resp. $f_i = \pi_i f$). La définition suivante est équivalente à (3.3).

(3.4) **Définition** : *Soient (A, m) et (A', m') deux A_∞-algèbres (resp. (C, Δ) et (C', Δ') deux A_∞-coalgèbres). Un A_∞-morphisme de A vers A' (resp. de C vers C') est une famille de flèches :*

$$f_i : A^i \longrightarrow A' \qquad (i \geq 1)$$

(resp. une famille localement finie de flèches :

$$f_i : C \longrightarrow {C'}^i \qquad (i \geq 1) \qquad)$$

où f_i est de degré $i-1$ et satisfaisant les relations ($q \geq 1$) :

$$\sum_{j=1}^{q} \sum_{k_1+\cdots+k_j=q} (-1)^{\sum_{1\leq\alpha<\beta\leq j} k_\alpha(k_\beta+1)} m'_j(f_{k_1} \otimes \cdots \otimes f_{k_j}) = \sum_{j=1}^{q} \sum_{\lambda=0}^{q-j} (-1)^{q+j+\lambda+j\lambda} f_{q-j+1}(1^\lambda \otimes m_j \otimes 1^{q-j-\lambda})$$

(resp.

$$\sum_{j=1}^{q} \sum_{k_1+\cdots+k_j=q} (-1)^{\sum_{1\leq\alpha<\beta\leq j} (k_\alpha+1)k_\beta} (f_{k_1} \otimes \cdots \otimes f_{k_j})\Delta_j = \sum_{j=1}^{q} \sum_{\lambda=0}^{q-j} (-1)^{q+j+\lambda+j\lambda} (1^{q-j-\lambda} \otimes \Delta'_j \otimes 1^\lambda) f_{q-j+1} \qquad)$$

Démonstration de l'équivalence de (3.3) et (3.4) : Soit $f : \Theta(A) \longrightarrow A'$ un A_∞-morphisme au sens de (3.3). Comme $\uparrow f\Theta(\downarrow)$ est de degré 0, il est clair que f_i est de degré $i-1$. L'hypothèse implique que pour tout $q \geq 1$:

$$\pi_1(\uparrow m'\Theta(\downarrow))^{[\ ]}\overline{\uparrow f\Theta(\downarrow)} j_q = \pi_1 \overline{\uparrow f\Theta(\downarrow)}(\uparrow m\Theta(\downarrow))^{[\ ]} j_q$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\sum_{j=1}^{q} \uparrow m'_j(\downarrow)^j (\uparrow f\Theta(\downarrow))^j D^{(j)} = \sum_{j=1}^{q} \uparrow f_{q-j+1}(\downarrow)^{q-j+1}(\uparrow m_j\Theta(\downarrow))^{[q-j+1]}$$

ou encore :

$$\sum_{j=1}^{q} \sum_{k_1+\cdots+k_j=q} \uparrow m'_j(\downarrow)^j(\uparrow f_{k_1}\downarrow^{k_1} \otimes \cdots \otimes \uparrow f_{k_j}\downarrow^{k_j}) = \sum_{j=1}^{q}\sum_{\lambda=0}^{q-j} \uparrow f_{q-j+1}(\downarrow)^{q-j+1}(1^\lambda \otimes \uparrow m_j(\downarrow)^j \otimes 1^{q-j-\lambda})$$

ce qui implique les relations de la définition (3.4). La réciproque résulte du lemme (2.21). On prouve de même le cas dual. □

Les relations (3.4) donnent pour $q = 1, 2$:

$$\begin{aligned} m'_1 f_1 &= f_1 m_1 \\ m'_1 f_2 + m'_2(f_1 \otimes f_1) &= -f_2(m_1 \otimes 1 + 1 \otimes m_1) + f_1 m_2 \end{aligned}$$

Autrement-dit, f_1 commute aux différentielles et respecte les produits à homotopie près. Nous ne nous étendrons pas sur la composition des A_∞-morphismes, qui correspond tout simplement à la composition des morphismes d'algèbres ou de coalgèbres libres de la définition (3.3). Nous avons ainsi défini les catégories des A_∞-algèbres et des A_∞-coalgèbres.

Un morphisme de A_∞-algèbres n'est pas une application de A vers A', mais une famille de flèches de A^i vers A'. Aussi, le noterons-nous de la façon suivante :

$$f : A \Vvdash\!\!\longrightarrow A'$$

et de même pour les morphismes de A_∞-coalgèbres.

3.3 Unité et co-unité.

(3.5) **Définition** : *Une A_∞-algèbre (A, m) (resp. A_∞-coalgèbre (C, Δ)) est dite unitaire (resp. co-unitaire), si on s'est donné une application linéaire :*

$$\begin{aligned} \eta &: \Lambda \longrightarrow A \\ \text{(resp. } \varepsilon &: C \longrightarrow \Lambda) \end{aligned}$$

telle que :

$$\begin{array}{lrcll} & m_2(\eta\otimes 1) = m_2(1\otimes\eta) & = & 1 & \\ & m_i(1^\lambda\otimes\eta\otimes 1^{i-\lambda-1}) & = & 0 & \text{(pour tout } i\neq 2 \text{ et tout } \lambda) \\ \text{(resp.} & & & & \\ & (\varepsilon\otimes 1)\Delta_2 = (1\otimes\varepsilon)\Delta_2 & = & 1 & \\ & (1^\lambda\otimes\varepsilon\otimes 1^{i-\lambda-1})\Delta_i & = & 0 & \text{(pour tout } i\neq 2 \text{ et tout } \lambda)) \end{array}$$

(3.6) **Définition** : *Un A_∞-morphisme $(f_i)_{i\geq 1}$ est dit strict si $f_i = 0$ pour $i \geq 2$.*

(3.7) **Définition** : *Soit (A, m) une A_∞-algèbre unitaire (resp. (C, Δ) une A_∞-coalgèbre co-unitaire). Une augmentation (resp. coaugmentation) est un morphisme strict :*

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon & : & A \longrightarrow \Lambda \\ \text{(resp. } \eta & : & \Lambda \longrightarrow C) \end{array}$$

tel que $\varepsilon\eta = 1$.

Désormais, et sauf mention du contraire, toute A_∞-algèbre unitaire sera supposée augmentée et toute A_∞-coalgèbre co-unitaire sera supposée coaugmentée.

(3.8) **Lemme** : *Soit A une A_∞-algèbre unitaire. Posons $\overline{A} = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$. Alors $\overline{A}$ est une A_∞-algèbre.*

Il suffit de vérifier que $\overline{A}$ est stable par les m_i. Comme ε est un morphisme strict, on a :

$$\begin{array}{rcll} \varepsilon\otimes\varepsilon & = & \varepsilon m_2 & \\ \varepsilon m_i & = & 0 & \qquad \text{(pour } i\neq 2) \end{array}$$

ce qui entraîne cette stabilité. □

(3.9) **Lemme** : *Soit C une A_∞-coalgèbre co-unitaire. Posons $\overline{C} = \mathrm{Coker}(\eta)$. Alors $\overline{C}$ est une A_∞-coalgèbre.*

Il suffit de vérifier que les Δ_i passent au quotient. Comme η est strict, les relations (3.4) donnent :

$$\begin{array}{rcll} \Delta_2\eta & = & \eta\otimes\eta & \\ \Delta_i\eta & = & 0 & \qquad \text{(pour } i\neq 2) \end{array}$$

et les Δ_i passent au quotient. □

$\overline{A}$ (resp. $\overline{C}$) introduit ci-dessus est appelé la « réduction de A (resp. C) ».

(3.10) **Lemme** : *Toute A_∞-algèbre (resp. A_∞-coalgèbre) est d'une façon canonique la réduction d'une A_∞-algèbre unitaire (resp. A_∞-coalgèbre co-unitaire).*

Soit A une A_∞-algèbre. Posons $A^\bullet = \Lambda \oplus A$. Définissons η et ε comme l'inclusion et la projection canonique du facteur Λ. Il est clair que la définition (3.5) nous impose un choix unique pour prolonger les m_i à $A^\bullet$. Il nous reste à vérifier les relations de la définition (3.2) pour $A^\bullet$. Il suffit de le faire sur les tenseurs de la forme $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$, où $n \geq 1$ et où l'un au moins de x_i est $\eta(1)$. Pour $n = 1$, la relation $m_1 m_1 \eta(1) = 0$ résulte de $m_1\eta(1) = 0$. Pour $n = 2$, on a :

$$m_2(m_2\otimes 1)(x_1\otimes x_2\otimes x_3) - m_2(1\otimes m_2)(x_1\otimes x_2\otimes x_3)$$

qui vaut 0 car $\eta(1)$ est neutre pour m_2. Pour $n \geq 3$, il reste l'expression :

$$m_2(m_{n-1}\otimes 1) - m_2(1\otimes m_{n-1}) + \sum_{\lambda=0}^{n-2}(-1)^\lambda m_{n-1}(1^\lambda\otimes m_2\otimes 1^{n-2-\lambda})$$

appliquée à $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$.

- Premier cas : $x_1 = \eta(1)$. Il reste :

$$-m_{n-1}(x_2 \otimes \cdots \otimes x_n) + m_{n-1}(x_2 \otimes \cdots \otimes x_n)$$

- Deuxième cas : l'un des éléments $x_2, \dots, x_{n-1}$ est $\eta(1)$, disons x_i. Il reste (où $\hat{x_i}$ dénote l'absence de x_i) :

$$(-1)^i m_{n-1}(x_1 \otimes \cdots \otimes \hat{x_i} \otimes \cdots \otimes x_n) - (-1)^i m_{n-1}(x_1 \otimes \cdots \otimes \hat{x_i} \otimes \cdots \otimes x_n)$$

Le troisième cas : $x_n = \eta(1)$, se traite comme le premier. Le cas des A_∞-coalgèbres se traite de façon similaire. □

(3.11) **Définition** : *Soient (A, m) et (A', m') deux A_∞-algèbres unitaires (resp. (C, Δ) et (C', Δ') deux A_∞-coalgèbres co-unitaires.) Un morphisme $f : A \Rrightarrow A'$ (resp. $f : C \Rrightarrow C'$) est un morphisme au sens de la définition (3.4) qui vérifie de plus :*

$$\begin{array}{rcll} f_1\eta &=& \eta & \\ f_i(1^\lambda \otimes \eta \otimes 1^{i-\lambda-1}) &=& 0 & \textit{(pour } i \geq 2 \textit{ et tout } \lambda) \\ \varepsilon f_1 &=& \varepsilon & \\ \varepsilon f_i &=& 0 & \textit{(pour } i \geq 2) \end{array}$$

(resp.

$$\begin{array}{rcll} \varepsilon f_1 &=& \varepsilon & \\ (1^\lambda \otimes \varepsilon \otimes 1^{i-\lambda-1}) f_i &=& 0 & \textit{(pour } i \geq 2 \textit{ et tout } \lambda) \\ f_1\eta &=& \eta & \\ f_i\eta &=& 0 & \textit{(pour } i \geq 2)) \end{array}$$

Soit $f : A \Rrightarrow A'$ un morphisme de A_∞-algèbres unitaires. Soit $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ un tenseur de $\overline{A}$. Alors, $f_i(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \in \overline{A'}$. Ceci résulte immédiatement de la définition (3.11). Il en résulte un morphisme (au sens de (3.4)) $\overline{f} : \overline{A} \Rrightarrow \overline{A'}$. De même, si $f : C \Rrightarrow C'$ est un morphisme de A_∞-coalgèbres co-unitaires, f_i passe au quotient, et il en résulte un morphisme $\overline{f} : \overline{C} \Rrightarrow \overline{C'}$.

(3.12) **Lemme** : *Soit $f : A \Rrightarrow A'$ (resp. $f : C \Rrightarrow C'$) un morphisme de A_∞-algèbres (resp. A_∞-coalgèbres). Alors il existe un unique morphisme $f^\bullet : A^\bullet \Rrightarrow A'^\bullet$ (resp. $f^\bullet : C^\bullet \Rrightarrow C'^\bullet$) de A_∞-algèbres unitaires (resp. de A_∞-coalgèbres co-unitaires), tel que $\overline{f^\bullet} = f$.*

Les relations $f_1^\bullet \eta = \eta$ et $f_i^\bullet(1^\lambda \otimes \eta \otimes 1^{i-\lambda-1}) = 0$ imposent un choix unique pour les $f_i^\bullet$. Les relations $\varepsilon f_1^\bullet = \varepsilon$ et $\varepsilon f_i^\bullet = 0$ sont alors satisfaites. Il reste à vérifier les relations pour les $f_i^\bullet$. Il suffit de le faire sur les tenseurs $x_1 \otimes \cdots \otimes x_q$ où l'un au moins de x_i est $\eta(1)$. Pour $q = 1$, il reste seulement $m'_1 f_1^\bullet(\eta(1)) = f_1^\bullet m_1(\eta(1))$. Cette relation est vérifiée, car $m_1\eta(1) = 0$. Pour $q = 2$, il reste la relation :

$$m_2(f_1^\bullet \otimes f_1^\bullet)(x_1 \otimes x_2) = -f_2^\bullet(m_1 \otimes 1 + 1 \otimes m_1)(x_1 \otimes x_2) + f_1^\bullet m_2(x_1 \otimes x_2)$$

Le terme $f_2^\bullet(m_1 \otimes 1 + 1 \otimes m_1)(x_1 \otimes x_2)$ est nul, et il reste $f_1^\bullet(x_1) = f_1^\bullet(x_1)$ si par exemple $x_2 = \eta(1)$. Pour $q \geq 3$, dans le membre de gauche de (3.4), seuls les termes pour lesquels $j = 2$ peuvent subsister, de même à droite.

- Premier cas : $x_1 = \eta(1)$. Il reste :

$$(-1)^q f_{q-1}^\bullet(x_2 \otimes \cdots \otimes x_q) = (-1)^q f_{q-1}^\bullet(x_2 \otimes \cdots \otimes x_q)$$

- Deuxième cas : $x_i = \eta(1)$ avec $2 \leq i \leq q-1$. Il reste :

$$(-1)^{q+i} f_{q-1}^\bullet(x_1 \otimes \cdots \otimes \hat{x_i} \otimes \cdots \otimes x_q) + (-1)^{q+i+1} f_{q-1}^\bullet(x_1 \otimes \cdots \otimes \hat{x_i} \otimes \cdots \otimes x_q)$$

Le troisième cas : $x_q = \eta(1)$ se traite comme le premier. On a une preuve analogue pour les A_∞-coalgèbres. □

3.4 Bar et cobar-constructions de Stasheff.

(3.13) **Définition** : *Soit A une A_∞-algèbre unitaire (resp. C une A_∞-coalgèbre co-unitaire). La bar-construction de A (resp. la cobar-construction de C) est la DGA-coalgèbre $B(A) = \Theta(\uparrow\overline{A})$ (resp. la DGA-algèbre $\Omega(C) = T(\downarrow\overline{C})$), où la différentielle est celle de la définition (3.1).*

Il résulte de (3.3) et (3.11) que B est un foncteur de la catégorie des A_∞-algèbres unitaires vers celle des DGA-coalgèbres libres. De même, Ω est un foncteur de la catégorie des A_∞-coalgèbres co-unitaires vers celle des DGA-algèbres libres. Il s'agit même d'isomorphismes de catégories. Cette définition généralise bien sûr (2.10). Nous conservons donc les mêmes notations.

(3.14) **Définition** : *Les cochaînes de Brown canoniques :*

$$\begin{array}{rcl}\beta & : & B(A) \longrightarrow A \\ \gamma & : & C \longrightarrow \Omega(C)\end{array}$$

sont définies par :

$$\begin{array}{rcl}\beta & = & \lambda\downarrow\pi_1 \\ \gamma & = & j_1\downarrow\rho\end{array}$$

(voir page 37)

(3.15) **Lemme** : *Les cochaînes de Brown canoniques β et γ satisfont les relations :*

$$\begin{array}{rcl}\beta\partial + \sum_{i=1}^{\infty} m_i\beta^i D^{(i)} & = & 0 \\ \partial\gamma + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^{(i)}\gamma^i\Delta_i & = & 0\end{array}$$

Il suffit de vérifier cette relation sur le mot $[a_1|\dots|a_n]$. Pour $n = 0$, on a $\partial([\,]) = 0$, $D^{(i)}([\,]) = [\,]\otimes\cdots\otimes[\,]$ (i facteurs), donc $\beta^i D^{(i)}([\,]) = 0$. pour $n \geq 1$, la différentielle de $[a_1|\dots|a_n]$ est donnée par :

$$\begin{array}{rcl}\partial([a_1|\dots|a_n]) & = & -(\uparrow m\Theta(\downarrow))^{[\,]}([a_1|\dots|a_n]) \\ & = & -\sum_{q=1}^{\infty}(\uparrow m\Theta(\downarrow))^{[q]}([a_1|\dots|a_n]) \\ & = & -\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{q-1}(1^\lambda\otimes\uparrow m_{n-q+1}(\downarrow)^{n-q+1}\otimes 1^{q-\lambda-1})([a_1|\dots|a_n])\end{array}$$

β étant non nul seulement sur les mots à une lettre, on a :

$$\beta\partial([a_1|\dots|a_n]) = -\beta\uparrow m_n(\downarrow)^n([a_1|\dots|a_n])$$

Mais $\beta = \downarrow$ sur les mots à une lettre, donc :

$$\beta\partial([a_1|\dots|a_n]) = -m_n\beta^n D^{(n)}([a_1|\dots|a_n])$$

Les autres termes $\beta^i D^{(i)}([a_1|\dots|a_n])$ sont nuls pour $i \neq n$. Il en résulte la relation annoncée. On prouve de même le résultat dual. □

3.5 β-cochaînes et γ-cochaînes.

(3.16) **Définition** : *Soit C une DGA-coalgèbre et A une A_∞-algèbre (resp. C une A_∞-coalgèbre et A une DGA-algèbre). Une β-cochaîne de Brown (resp. γ-cochaîne de Brown) est une application linéaire* *de degré* -1, $t : C \longrightarrow A$, *telle que :*

$$\begin{aligned} t\partial + \sum_{i=1}^{\infty} m_i t^i D^{(i)} &= 0 \\ \text{(resp. } \partial t + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^{(i)} t^i \Delta_i &= 0) \end{aligned}$$

et telle que $\varepsilon t = 0$.

Remarquons que $\sum_{i=1}^{\infty} m_i t^i D^{(i)}$ est une somme localement finie, car t est nul en dimension 0. Évidemment, les cochaînes canoniques de la définition (3.14) sont respectivement une β-cochaîne et une γ-cochaîne. Le lemme suivant montre leur caractère universel.

(3.17) **Lemme** : *Soit* $t : C \longrightarrow A$ *une* β*-cochaîne (resp.* γ*-cochaîne). Alors il existe un unique morphisme de DGA-coalgèbres :*

$$\Psi : C \longrightarrow B(A)$$

(resp. un unique morphisme de DGA-algèbres :

$$\Phi : \Omega(C) \longrightarrow A$$

tel que $\beta\Psi = t$ *(resp.* $\Phi\gamma = t$*).*

Remarquons que l'image de $\beta : B(A) \longrightarrow A$ est contenue dans $\overline{A}$. Alors β est simplement la projection canonique π_1, donc la relation $\beta\Psi = t$ s'écrit aussi $\pi_1\Psi = t$. Le lemme (2.19) montre qu'il existe un unique morphisme de coalgèbres associatives $\Psi : C \longrightarrow B(A)$ relevant t. De plus, celui-ci commute aux différentielles si et seulement si $\pi_1\Psi\partial = \pi_1\partial\Psi$. Or :

$$\begin{aligned} \pi_1\Psi\partial = t\partial &= -\sum_{i=1}^{\infty} m_i t^i D^{(i)} \\ &= -\sum_{i=1}^{\infty} m_i (\beta\Psi)^i D^{(i)} \\ &= -\sum_{i=1}^{\infty} m_i \beta^i D^{(i)} \Psi \\ &= \beta\partial\Psi = \pi_1\partial\Psi \end{aligned}$$

Le cas dual se prouve de même. □

Il est par ailleurs clair que si $\Psi : C \longrightarrow B(A)$ est un morphisme de DGA-coalgèbres, $\beta\Psi : C \longrightarrow A$ est une β-cochaîne. On a donc une correspondance biunivoque entre les morphismes de DGA-coalgèbres de C vers $B(A)$ et les β-cochaînes de C vers A. De même, on a une correspondance biunivoque entre les morphismes de DGA-algèbres de $\Omega(C)$ vers A et les γ-cochaînes de C vers A.

3.6 β-produits et γ-produits.

(3.18) **Définition** : *Soit* C *une DGA-coalgèbre (resp. une* A_∞*-coalgèbre), et* A *une* A_∞*-algèbre (resp. une DGA-algèbre). Soit* $t : C \longrightarrow A$ *une* β*-cochaîne (resp.* γ*-cochaîne). On définit la différentielle tordue :*

$$\partial_t : C \otimes A \longrightarrow C \otimes A$$

par :

$$\begin{aligned}\partial_t &= \partial\otimes 1+\sum_{i=1}^{\infty}(1\otimes m_i)(1\otimes t^{i-1}\otimes 1)(D^{(i)}\otimes 1)\\ \textit{(resp. }\partial_t &= 1\otimes\partial+\sum_{i=1}^{\infty}(1\otimes \mu^{(i)})(1\otimes t^{i-1}\otimes 1)(\Delta_i\otimes 1)\textit{)}\end{aligned}$$

$C\otimes A$ muni de cette différentielle sera noté $C\otimes_t A$ et appelé un β-produit tordu (resp. γ-produit tordu).

Il faut vérifier que $\partial_t^2=0$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\partial_t^2=\partial^2\otimes 1 &+ \sum_{i=1}^{\infty}(\partial\otimes 1)(1\otimes m_i)(1\otimes t^{i-1}\otimes 1)(D^{(i)}\otimes 1)\\ &+ \sum_{i=1}^{\infty}(1\otimes m_i)(1\otimes t^{i-1}\otimes 1)(D^{(i)}\otimes 1)(\partial\otimes 1)\\ &+ \sum_{i,j=1}^{\infty}(1\otimes m_i)(1\otimes t^{i-1}\otimes 1)(D^{(i)}\otimes 1)(1\otimes m_j)(1\otimes t^{j-1}\otimes 1)(D^{(j)}\otimes 1)\end{aligned}$$

Le terme $\partial^2\otimes 1$ est évidemment nul. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{\infty}(1\otimes m_i)(1\otimes t^{i-1}\otimes 1)(D^{(i)}\otimes 1)(\partial\otimes 1)\\ &\qquad= \sum_{i=1}^{\infty}(1\otimes m_i)(1\otimes t^{i-1}\otimes 1)(\partial^{[i]}D^{(i)}\otimes 1)\\ &\qquad= -\sum_{i=1}^{\infty}(\partial\otimes 1)(1\otimes m_i)(1\otimes t^{i-1}\otimes 1)(D^{(i)}\otimes 1)\\ &\qquad\qquad+\sum_{i=1}^{\infty}(1\otimes m_i)(1\otimes t^{i-1}\otimes 1)(1\otimes\partial^{[i-1]}\otimes 1)(D^{(i)}\otimes 1)\end{aligned}$$

La première somme de cette dernière expression vient tuer la première somme de l'expression de ∂_t^2. Nous calculons la deuxième :

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{i-2}(-1)^{i-\lambda}(1\otimes m_i)(1\otimes t^{\lambda}\otimes t\partial\otimes t^{i-\lambda-2}\otimes 1)(D^{(i)}\otimes 1)\\ &\quad= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{i-2}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{i-\lambda+1}(1\otimes m_i)(1\otimes t^{\lambda}\otimes m_j t^j D^{(j)}\otimes t^{i-\lambda-2}\otimes 1)(D^{(i)}\otimes 1)\\ &\quad= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{i-2}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{i-\lambda+1+j\lambda}(1\otimes m_i)(1\otimes t^{\lambda}\otimes m_j\otimes 1^{i-\lambda-1})(1\otimes t^{i+j-2}\otimes 1)(D^{(i+j)}\otimes 1)\\ &\quad= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\lambda=0}^{n-j+1}(-1)^{n+j+\lambda+\lambda j}(1\otimes m_{n-j+1}(1^{\lambda}\otimes m_j\otimes 1^{n-j-\lambda}))(1\otimes t^{n-1}\otimes 1)(D^{(n+1)}\otimes 1)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{(en posant } n=i+j-1)\\ &\quad= -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{(n-j)j}(1\otimes m_{n-j+1}(1^{n-j}\otimes m_j))(1\otimes t^{n-1}\otimes 1)(D^{(n+1)}\otimes 1)\end{aligned}$$

Nous calculons par ailleurs la dernière somme de l'expression de ∂_t^2 :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{\infty}(1\otimes m_i)(1\otimes t^{i-1}\otimes 1)(D^{(i)}\otimes 1)(1\otimes m_j)(1\otimes t^{j-1}\otimes 1)(D^{(j)}\otimes 1)\\
&\quad = \sum_{i,j=1}^{\infty}(1\otimes m_i)(1\otimes t^{i-1}\otimes 1)(1^i\otimes m_j)(1^i\otimes t^{j-1}\otimes 1)(D^{(i+j)}\otimes 1)\\
&\quad = \sum_{i,j=1}^{\infty}(-1)^{j(i-1)}(1\otimes m_i)(1^i\otimes m_j)(1\otimes t^{i+j-2}\otimes 1)(D^{(i+j)}\otimes 1)\\
&\quad = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{(n-j)j}(1\otimes m_{n-j+1}(1^{n-j}\otimes m_j))(1\otimes t^{n-1}\otimes 1)(D^{(n+1)}\otimes 1)
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\partial_t^2 = 0$. Le cas dual se prouve de même. □

En particulier, on a les DGA-modules $B(A)\otimes_\beta A$ et $C\otimes_\gamma \Omega(C)$.

(3.19) **Théorème** : *Soit A une A_∞-algèbre (resp. C une A_∞-coalgèbre). Alors $B(A)\otimes_\beta A$ (resp. $C\otimes_\gamma \Omega(C)$) est acyclique.*

Il suffit de prouver que $\overline{B(A)\otimes_\beta A}$ est homologiquement nul. On a la décomposition en somme directe :

$$\overline{B(A)\otimes A} = (\overline{B(A)}\otimes\Lambda)\oplus(B(A)\otimes\overline{A})$$

La différentielle $\partial_\beta = \partial\otimes 1 + \sum_{i=1}^{\infty}(1\otimes m_i)(1\otimes\beta^{i-1}\otimes 1)(D^{(i)}\otimes 1)$ laisse stable $B(A)\otimes\overline{A}$, puisque β prend ses valeurs dans $\overline{A}$, et que $\overline{A}$ est stable par les m_i. Soit g la composante de ∂_β qui envoie $\overline{B(A)}\otimes\Lambda$ dans $B(A)\otimes\overline{A}$. On a :

$$g = (1\otimes m_2)(1\otimes\beta\otimes 1)(D\otimes 1)$$

en vertu de (3.5), et g est clairement un isomorphisme. Le théorème en résulte puisque $\overline{B(A)\otimes_\beta A}$ est simplement le cône de g.

En ce qui concerne C, on utilise la décomposition :

$$\overline{C\otimes\Omega(C)} = (\overline{C}\otimes\Omega(C))\oplus(\Lambda\otimes\overline{\Omega(C)})$$

∂_γ lasse stable $\Lambda\otimes\overline{\Omega(C)}$ et la composante de ∂_γ qui envoie $\overline{C}\otimes\Omega(C)$ dans $\Lambda\otimes\overline{\Omega(C)}$ est :

$$(\varepsilon\otimes 1)\partial_\gamma = \mu(\gamma\otimes 1)$$

qui est un isomorphisme. □

3.7 Changement de base ou de fibre.

(3.20) **Lemme** : *Soit $t : C \longrightarrow A$ une β-cochaîne (resp. γ-cochaîne), $\Psi : C' \longrightarrow C$ un morphisme de DGA-coalgèbres (resp. $\Phi : A \longrightarrow A'$ un morphisme de DGA-algèbres). Alors la flèche :*

$$\begin{array}{rcl}
\Psi\otimes 1 & : & C'\otimes_{t\Psi} A \longrightarrow C\otimes_t A\\
(\text{resp. } 1\otimes\Phi & : & C\otimes_t A \longrightarrow C\otimes_{\Phi t} A')
\end{array}$$

est un morphisme de DGA-modules.

La vérification est immédiate. □

(3.21) **Définition** : *Soient $f : C \longrightarrow C'$ (resp. $f : A \longrightarrow A'$) un morphisme de A_∞-coalgèbres (resp. A_∞-algèbres), et $t : C' \longrightarrow A$ (resp. $t : C \longrightarrow A$) une γ-cochaîne (resp. β-cochaîne). On définit la cochaîne composée :*

$$\begin{array}{rcl} tf & : & C \longrightarrow A \\ \text{(resp. } ft & : & C \longrightarrow A') \end{array}$$

en imposant le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Omega(C) \arrow[r, "\Omega(f)"] & \Omega(C') \arrow[dr, "\Phi"] & \\ & & A \\ C \arrow[uu, "\gamma"] \arrow[r, "f"'] & C' \arrow[uu, "\gamma"] \arrow[ur, "t"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{(resp.} \qquad \begin{tikzcd} & A \arrow[r, "f"] & A' \\ C \arrow[ur, "t"] \arrow[dr, "\Psi"'] & & \\ & B(A) \arrow[uu, "\beta"'] \arrow[r, "B(f)"'] & B(A') \arrow[uu, "\beta"'] \end{tikzcd} \quad)$$

dans lequel Φ (resp. Ψ) est obtenu par initialité de γ (resp. finalité de β).

(3.22) **Lemme** : *Les composés ci-dessus sont donnés explicitement par :*

$$\begin{array}{rcl} tf & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mu^{(i)} t^i f_i \\ ft & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} f_i t^i D^{(i)} \end{array}$$

Soit x un élément de C. On a successivement :

$$\begin{array}{rcl} \gamma(x) = [x] & = & \downarrow\rho(x) \\ \Omega(f)\gamma(x) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \downarrow^k f_k \uparrow\downarrow\rho(x) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \downarrow^k \rho^k f_k(x) \\ \Phi\Omega(f)\gamma(x) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mu^{(k)} \Phi^k \downarrow^k \rho^k f_k(x) \end{array}$$

ce qui prouve le lemme. Idem dans le cas dual. □

(3.23) **Théorème** : *Sous les mêmes hypothèses que précédemment, la flèche :*

$$\begin{array}{rcl} f \otimes_t 1 & : & C \otimes_{tf} A \longrightarrow C' \otimes_t A \\ \text{(resp. } 1 \otimes_t f & : & C \otimes_t A \longrightarrow C \otimes_{ft} A') \end{array}$$

définie par :

$$\begin{array}{rcl} f \otimes_t 1 & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} (1 \otimes \mu^{(i)})(1 \otimes t^{i-1} \otimes 1)(f_i \otimes 1) \\ \text{(resp. } 1 \otimes_t f & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} (1 \otimes f_i)(1 \otimes t^{i-1} \otimes 1)(D^{(i)} \otimes 1)) \end{array}$$

où f_i est la composante de longueur i de f, est un morphisme de DGA-modules.

$f \otimes_t 1$ est clairement de degré 0, puisque f_i est de degré $i-1$ et t de degré -1. $f \otimes_t 1$ commute visiblement à η et ε. Il reste à voir que $f\otimes_t 1$ commute aux différentielles. On a :

$$\begin{aligned}
\partial_t(f\otimes_t 1) &= \sum_{j=1}^{\infty}(1\otimes\mu^{(j)}\partial^{[j]})(1\otimes t^{j-1}\otimes 1)(f_j\otimes 1)\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(1\otimes\mu^{(i)})(1\otimes t^{i-1}\otimes 1)(\Delta_i\otimes 1)(1\otimes\mu^{(j)})(1\otimes t^{j-1}\otimes 1)(f_j\otimes 1)\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{j-2}(-1)^{\lambda}(1\otimes\mu^{(j)})(1\otimes t^{\lambda}\otimes\partial t\otimes t^{j-\lambda-2}\otimes 1)(f_j\otimes 1)\\
&\qquad+\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j-1}(1\otimes\mu^{(j)})(1\otimes t^{j-1}\otimes\partial)(f_j\otimes 1)\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{i(j-1)}(1\otimes\mu^{(i+j-1)})(1\otimes t^{i-1}\otimes t^{j-1}\otimes 1)((\Delta_i\otimes 1^{j-1})f_j\otimes 1)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\partial t+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{(k)}t^k\Delta_k=0$. Donc :

$$\begin{aligned}
\partial_t(f\otimes_t 1) &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{j-2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{\lambda+1}(1\otimes\mu^{(j)})(1\otimes t^{\lambda}\otimes\mu^{(k)}t^k\Delta_k\otimes t^{j-\lambda-2}\otimes 1)(f_j\otimes 1)\\
&\qquad+\sum_{j=1}^{\infty}(1\otimes\mu^{(j)})(1\otimes t^{j-1}\otimes 1)(f_j\otimes 1)\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{i(j-1)}(1\otimes\mu^{(i+j-1)})(1\otimes t^{i+j-2}\otimes 1)((\Delta_i\otimes 1^{j-1})f_j\otimes 1)
\end{aligned}$$

Dans la deuxième somme de cette expression, on reconnait $(f\otimes_t 1)(1\otimes\partial)$. Nous nous occupons maintenant de la triple somme dans l'expression de $\partial_t(f\otimes_t 1)$, qui est égale à :

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{j-2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{\lambda+1+k(j-\lambda)}(1\otimes\mu^{(j+k-1)})(1\otimes t^{j+k-2}\otimes 1)((1^{\lambda+1}\otimes\Delta_k\otimes 1^{j-\lambda-2})f_j\otimes 1)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\partial_t(f\otimes_t 1) &= (f\otimes_t 1)(1\otimes\partial)\\
&+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{j-1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{\lambda+k(j-\lambda-1)}(1\otimes\mu^{(j+k-1)})(1\otimes t^{j+k-2}\otimes 1)((1^{\lambda}\otimes\Delta_k\otimes 1^{j-\lambda-1})f_j\otimes 1)
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
(f\otimes_t 1)\partial_{tf} &= (f\otimes_t 1)(1\otimes\partial)\\
&+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(1\otimes\mu^{(i)})(1\otimes t^{i-1}\otimes 1)(f_i\otimes 1)(1\otimes\mu^{(j)})(1\otimes(tf)^{j-1}\otimes 1)(\Delta_j\otimes 1)
\end{aligned}$$

La double somme dans l'expression de $(f\otimes_t 1)\partial_{tf}$ devient, compte tenu de (3.22) :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_{j-1}=1}^{\infty}(-1)^{(i-1)(k_1+\cdots+k_{j-1})+(k_1-1)(k_2+\cdots+k_{j-1})+\cdots+(k_{j-2}-1)k_{j-1}}\\
&\qquad(1\otimes\mu^{(i+k_1+\cdots+k_{j-1})})(1\otimes t^{i+k_1+\cdots+k_{j-1}-1}\otimes 1)((f_i\otimes f_{k_1}\otimes\cdots\otimes f_{k_{j-1}})\Delta_j\otimes 1)
\end{aligned}$$

Fixons un entier q. Il suffit pour terminer de prouver que :

$$\begin{aligned}\sum_{j+k=q+1}\sum_{\lambda=0}^{j-1}(-1)^{\lambda+k(j-\lambda-1)}(1^\lambda\otimes\Delta_k\otimes 1^{j-\lambda-1})f_j \\ = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k_0+\cdots+k_{j-1}=q}(-1)^{\sum_{0\leq\alpha<\beta\leq j-1}(k_\alpha-1)k_\beta}(f_{k_0}\otimes\cdots\otimes f_{k_{j-1}})\Delta_j\end{aligned}$$

et pour cela, de reconnaître dans cette égalité la définition (3.4). Le cas dual se prouve de même. □

3.8 Théorèmes de comparaison.

(3.24) **Théorème** : *Soit $f : C \Vvdash\!\!\longrightarrow C'$ un morphisme de A_∞-coalgèbres. On suppose C et C' simplement connexes. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.*

- *i) La composante de longueur 1 de f induit un isomorphisme en homologie.*
- *ii) $\Omega(f) : \Omega(C) \longrightarrow \Omega(C')$ induit un isomorphisme en homologie.*
- *iii) Le γ-produit $C \otimes_{\gamma f} \Omega(C')$ est acyclique.*

Le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Omega(C) \arrow[r, "\Omega(f)"] & \Omega(C') \\ C \arrow[u, "\gamma"] \arrow[ur, "\gamma f"] \arrow[r, "f"'] & C' \arrow[u, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

nous donne deux morphismes de DGA-modules :

$$C\otimes_\gamma\Omega(C) \xrightarrow{1\otimes\Omega(f)} C\otimes_{\gamma f}\Omega(C') \xrightarrow{f\otimes_\gamma 1} C'\otimes_\gamma\Omega(C')$$

Or on peut écrire :

$$\begin{aligned} f\otimes_\gamma 1 &= f_1\otimes 1+\sum_{i=2}^{\infty}(1\otimes\mu^{(i)})(1\otimes\gamma^{i-1}\otimes 1)(f_i\otimes 1) \\ &= f_1\otimes 1 + h \end{aligned}$$

et il est clair que $h(F'_p(C\otimes_{\gamma f}\Omega(C')))\subset F'_{p-1}(C'\otimes_\gamma\Omega(C'))$. On a donc mis $f\otimes_\gamma 1$ sous la forme d'un morphisme de constructions. Par ailleurs, C' étant simplement connexe, la fonction définie par l'expression :

$$\sum_{i=2}^{\infty}(1\otimes\mu^{(i)})(1\otimes\gamma^{i-1}\otimes 1)(\Delta_i\otimes 1)$$

envoie $F'_p(C'\otimes_\gamma\Omega(C'))$ dans $F'_{p-2}(C'\otimes_\gamma\Omega(C'))$. La construction est donc sans holonomie, et il en est de même des deux autres pour la même raison. On peut donc appliquer le théorème de comparaison de Moore, et on voit, comme $C'\otimes_\gamma\Omega(C')$ est acyclique, que *i)* est équivalent à *iii)*. De la même façon, le morphisme $1\otimes\Omega(f)$ montre que *ii)* est équivalent à *iii)*. □

(3.25) **Théorème** : *Soit $f : A \Vvdash\!\!\longrightarrow A'$ un morphisme de A_∞-algèbres. On suppose que A et A' sont connexes. Alors les proposition suivantes sont équivalentes :*

- *i) La composante de longueur 1 de f induit un isomorphisme en homologie.*
- *ii) $B(f) : B(A) \longrightarrow B(A')$ induit un isomorphisme en homologie.*

- *iii) Le β-produit $B(A) \otimes_{f\beta} A'$ est acyclique.*

La démonstration est identique à la précédente, avec les morphismes de constructions :

$$B(A) \otimes_\beta A \xrightarrow{1 \otimes_\beta f} B(A) \otimes_{f\beta} A' \xrightarrow{B(f) \otimes 1} B(A') \otimes_\beta A'$$

(Remarquer que $B(A)$ et $B(A')$ sont simplement connexes.) $\square$

Chapitre 4

Théorie homotopique des cochaînes de Brown

4.1 L'intervalle et la notion d'homotopie.

On désigne par I (l'« intervalle ») la DGA-coalgèbre $C_*^N(\Delta_1)$. Les éléments $\overline{0}$, $\overline{1}$ et i forment une base du Λ-module $C_*^N(\Delta_1)$. La différentielle ∂ et l'augmentation ε sont données par :

$$\begin{array}{rcl} \partial(\overline{0}) = \partial(\overline{1}) & = & 0 \\ \partial(i) & = & \overline{1} - \overline{0} \\ \varepsilon(\overline{0}) = \varepsilon(\overline{1}) & = & 1 \\ \varepsilon(i) & = & 0 \end{array}$$

et le coproduit (d'Alexander-Whitney) par :

$$\begin{array}{rcl} D(\overline{0}) & = & \overline{0} \otimes \overline{0} \\ D(\overline{1}) & = & \overline{1} \otimes \overline{1} \\ D(i) & = & \overline{0} \otimes i + i \otimes \overline{1} \end{array}$$

De plus, il existe deux morphismes de DGA-coalgèbres :

$$\begin{array}{rcl} j_0 & : & \Lambda \longrightarrow I \\ j_1 & : & \Lambda \longrightarrow I \end{array}$$

définis par $j_0(1) = \overline{0}$ et $j_1(1) = \overline{1}$.

(4.1) **Définition** : *Soient $f : A \longrightarrow B$ et $g : A \longrightarrow B$ deux morphismes de DGA-coalgèbres. Une homotopie de f à g est un morphisme de DGA-coalgèbres :*

$$H : I \otimes A \longrightarrow B$$

tel que $f = H(j_0 \otimes 1)$ et $g = H(j_1 \otimes 1)$.

(4.2) **Lemme** : *Deux morphismes de DGA-coalgèbres $f, g : A \longrightarrow B$ sont homotopes si et seulement si il existe une flèche de degré +1 :*

$$h : A \longrightarrow B$$

telle que :

$$\begin{array}{rcl} g - f & = & \partial h + h \partial \\ Dh & = & (f \otimes h + h \otimes g)D \end{array}$$

Si f et g sont homotopes au sens de la définition (4.1), il suffit de poser $h(x) = H(i \otimes x)$, et les deux relations du lemme sont simplement conséquences du fait que H commute aux différentielles et aux coproduits. Réciproquement, il suffit de poser $H(\overline{0} \otimes x) = f(x)$, $H(\overline{1} \otimes x) = g(x)$ et $H(i \otimes x) = h(x)$, et la vérification est sans difficulté. □

En fait, ce sont les relations du lemme (4.2) qui nous servirons maintenant de définition, la discussion précédente servant de motivation géométrique. On définit donc dualement :

(4.3) **Définition** : *Soient $f, g : A \longrightarrow B$ deux morphismes de DGA-algèbres. Une homotopie de f à g est une flèche de degré $+1$:*

$$h : A \longrightarrow B$$

telle que :

$$\begin{aligned} g - f &= \partial h + h\partial \\ h\mu &= \mu(f \otimes h + h \otimes g) \end{aligned}$$

(4.4) **Lemme** : *Soient $f, g : A \longrightarrow B$ deux morphismes de DGA-coalgèbres (resp. DGA-algèbres), $h : A \longrightarrow B$ une homotopie de f à g. On a :*

$$\begin{aligned} D^{(i)}h &= \sum_{j=1}^{i} (f^{j-1} \otimes h \otimes g^{i-j}) D^{(i)} \\ (\text{resp. } h\mu^{(i)} &= \sum_{j=1}^{i} \mu^{(i)}(f^{j-1} \otimes h \otimes g^{i-j})) \end{aligned}$$

Ces relations se prouvent par récurrence sur i. Pour $i \leq 1$, elles sont triviales. Pour $i = 2$, elles se résument à la définition. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} D^{(i+1)}h &= (D^{(i)} \otimes 1)Dh \\ &= (D^{(i)} \otimes 1)(f \otimes h + h \otimes g)D \\ &= \left(f^i D^{(i)} \otimes h + \sum_{j=1}^{i} (f^{j-1} \otimes h \otimes g^{i-j}) D^{(i)} \otimes g \right) D \\ &= \sum_{j=1}^{i+1} (f^{j-1} \otimes h \otimes g^{i-j+1}) D^{(i+1)} \end{aligned}$$

Le cas dual se prouve de même. □

4.2 Homotopies entre β-cochaînes ou γ-cochaînes.

(4.5) **Définition** : *Soit C une A_∞-coalgèbre et A une DGA-algèbre (resp. C une DGA-coalgèbre et A une A_∞-algèbre). Soient :*

$$\begin{aligned} t &: C \longrightarrow A \\ t' &: C \longrightarrow A \end{aligned}$$

deux γ-cochaînes (resp. β-cochaînes). Une homotopie de t à t' est une flèche :

$$h : C \longrightarrow A$$

de degré 0*, nulle sur* C_0*, telle que :*

$$\begin{aligned} t - t' &= \partial h + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i}(-1)^j \mu^{(i)}(t^{j-1}\otimes h \otimes t'^{i-j})\Delta_i \\ (\textit{resp. } t' - t &= h\partial + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i}(-1)^j m_i(t^{j-1}\otimes h \otimes t'^{i-j})D^{(i)}) \end{aligned}$$

(4.6) **Lemme** : *Soit* C *une* A_∞*-coalgèbre connexe,* A *une DGA-algèbre,* $f, g : \Omega(C) \longrightarrow A$ *deux morphismes de DGA-algèbres. Alors* f *est homotope à* g *si et seulement si* $f\gamma$ *est homotope à* $g\gamma$*.*

Par hypothèse, on a une flèche :

$$h : \Omega(C) \longrightarrow A$$

telle que :

$$\begin{aligned} g - f &= \partial h + h\partial \\ h\mu &= \mu(f \otimes h + h \otimes g) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} g\gamma - f\gamma &= \partial h\gamma + h\partial\gamma \\ &= \partial h\gamma - \sum_{i=1}^{\infty} h\mu^{(i)}\gamma^i\Delta_i \\ &= \partial h\gamma - \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i}\mu^{(i)}(f^{j-1}\otimes h\otimes g^{i-j})\gamma^i\Delta_i \\ &= \partial h\gamma - \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i}(-1)^{j-1}((f\gamma)^{j-1}\otimes h\gamma\otimes (g\gamma)^{i-j})\Delta_i \end{aligned}$$

$h\gamma$, qui est de degré 0 et nul sur C_0, est donc une homotopie de $f\gamma$ à $g\gamma$.

Réciproquement, soit k une homotopie de $f\gamma$ à $g\gamma$. On définit $h : \Omega(C) \longrightarrow A$, d'abord sur les mots de longueur 1, par $h\gamma = k$, puis sur les mots de longueur i par :

$$h\mu^{(i)} = \sum_{j=1}^{i}\mu^{(i)}(f^{j-1}\otimes h\otimes g^{i-j})$$

ce qui entraîne que h satisfait l'égalité $h\mu = \mu(f\otimes h + h\otimes g)$. Les calculs précédents, lus en sens inverse, montrent que :

$$g\gamma - f\gamma = (\partial h + h\partial)\gamma$$

Pour prouver que $g - f = \partial h + h\partial$, il suffit donc de prouver que $\partial h + h\partial$ et $g - f$ ont le même comportement vis-à-vis de la multiplication :

$$\begin{aligned} (\partial h + h\partial)\mu &= \partial h\mu + h\partial\mu \\ &= \mu((\partial\otimes 1 + 1\otimes\partial)(f\otimes h + h\otimes g) + (f\otimes h + h\otimes g)(\partial\otimes 1 + 1\otimes\partial)) \\ &= \mu((\partial h + h\partial)\otimes g + f\otimes(\partial h + h\partial)) \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} (g - f)\mu &= \mu(g\otimes g - f\otimes f) \\ &= \mu((g - f)\otimes g + f\otimes(g - f)) \end{aligned}$$

Ceci prouve le lemme. □

D'une façon duale, on a :

(4.7) **Lemme** : *Soit* C *une DGA-coalgèbre,* A *une* A_∞*-algèbre, et* $f, g : C \longrightarrow B(A)$ *deux morphismes de DGA-coalgèbres. Alors* f *est homotope à* g *si et seulement si* βf *est homotope à* βg*.* □

(4.8) **Remarque** : Nous avons introduit des relations d'homotopie. On s'attend à ce que ces relations soient des relations d'équivalence. La réflexivité est évidente. La transitivité peut être prouvée par un calcul direct, au niveau de la définition (4.2). Par contre, la symétrie n'est pas évidente et admet des restrictions, comme nous allons le voir plus loin.

Nous examinons maintenant le cas particulier des cochaînes de Brown ordinaires. La définition (4.5) se réduit alors à la relation :

$$t - t' = \partial h + h\partial + \mu(t \otimes h - h \otimes t')D$$

Si nous posons $\overline{h} = h + \eta\varepsilon$, cette relation s'écrit :

$$d(\overline{h}) + t \smile \overline{h} - \overline{h} \smile t' = 0$$

ce qui est une sorte de forme polaire de la relation de Brown. Il est clair que cette relation d'homotopie entre cochaînes de Brown ordinaires est réflexive (avec $h = 0$). Par ailleurs, si :

$$\begin{array}{rcl} dx + t \smile x - x \smile t' & = & 0 \\ dy + t' \smile y - y \smile t'' & = & 0 \end{array}$$

on a :

$$\begin{array}{rcl} d(x \smile y) & = & dx \smile y + x \smile dy \\ & = & (x \smile y) \smile t'' - t \smile (x \smile y) \end{array}$$

Quant à la symétrie, elle résulte du théorème (1.36), qui nous dit que tout élément de $\mathrm{Hom}(C, A)_0$, qui est l'identité en dimension 0, a un inverse pour le cup-produit, quand C et A sont connexes. On a alors :

$$0 = d(x \smile x^{-1}) = dx \smile x^{-1} + x \smile d(x^{-1})$$

donc :

$$dx^{-1} = -x^{-1} \smile dx \smile x^{-1} = x^{-1} \smile t - t' \smile x^{-1}$$

On a donc prouvé :

(4.9) **Théorème** : *Soit C une DGA-coalgèbre connexe, et A une DGA-algèbre connexe. Alors la relation d'homotopie entre cochaînes de Brown de C vers A est une relation d'équivalence.* □

(4.10) **Lemme** : *Soit $C \otimes_t F$ un produit tensoriel tordu (non nécessairement principal, où F est un A-module), et $t' : C \longrightarrow A$ une cochaîne de Brown homotope à t, c'est-à-dire qu'il existe $h : C \longrightarrow A$ tel que $dh + t \smile h - h \smile t' = 0$, avec $h \in G(C, A)$. Alors :*

$$h \frown : C \otimes_{t'} F \longrightarrow C \otimes_t F$$

est un isomorphisme de DGA-modules dont l'inverse est $h^{-1} \frown$.

Le seul point non trivial est de voir que h commute aux différentielles, mais

$$\begin{array}{rcl} (\partial + t \frown)(h \frown x) & = & \partial(h \frown x) + (t \smile h) \frown x \\ & = & dh \frown x + h \frown \partial x + (h \smile t') \frown x - dh \frown x \\ & = & (h \frown)(\partial + t' \frown)(x) \ \square \end{array}$$

4.3 Relèvements et prolongements de cochaînes de Brown.

Nous traitons d'abord le cas des cochaînes ordinaires ((4.11) et (4.13) pour l'existence et l'unicité du relèvement). Le lemme (4.15) permet détendre le résultat aux γ-cochaînes en (4.18), et de prouver le théorème de prolongement pour les γ-cochaînes. Enfin, le lemme (4.21) nous permet de déduire les résultats correspondants pour les β-cochaînes.

(4.11) **Théorème** *Soit $f : A \longrightarrow A'$ un morphisme de DGA-algèbres induisant un isomorphisme en homologie. Soit C une DGA-coalgèbre connexe et $t' : C \longrightarrow A'$ une cochaîne de Brown. Alors il existe une cochaîne de Brown $t : C \longrightarrow A$, telle que ft soit homotope à t'.*

Il s'agit de construire :

$$\begin{array}{rcl} t & : & C \longrightarrow A \\ h & : & C \longrightarrow A' \end{array}$$

satisfaisant les relations :

$$\begin{array}{rcl} \partial t + t\partial + \mu(t \otimes t)D & = & 0 \\ \varepsilon t & = & 0 \\ t' - ft & = & \partial h - h\partial + \mu(ft \otimes h + h \otimes t')D \end{array}$$

t et h sont bien sûr nuls en dimension 0. Soit $\mathcal{B}_n$ une Λ-base de C_n.([1]) Supposons $h(x)$ et $t(x)$ construits pour $|x| \leq n-1$, satisfaisant les relations ci-dessus, et soit x un élément de $\mathcal{B}_n$. On doit avoir :

$$\partial h(x) + ft(x) = t'(x) + h(\partial x) - \mu(ft \otimes h)D(x) + \mu(h \otimes t')D(x) \tag{4.12}$$

Remarquer que dans le membre de droite de cette expression, t et h ne s'appliquent qu'à des éléments de degrés $\leq n-1$. Nous notons $U(x)$ ce membre de droite, et nous calculons son bord :

$$\begin{array}{rcl} \partial U(x) & = & \partial t'(x) + \partial h(\partial x) - \partial\mu(ft \otimes h)D(x) + \partial\mu(h \otimes T')D(x) \\ & = & (\partial t' + \partial h\partial + \partial(ft \smile h) + \partial(h \smile t'))(x) \end{array}$$

par ailleurs :

$$\begin{array}{rcl} \partial t' & = & -t'\partial - t' \smile t' \\ \partial h\partial & = & t'\partial - ft\partial - (ft \smile h)\partial + (h \smile t')\partial \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} -\partial(ft \smile h) & = & ft\partial \smile h + ft \smile ft \smile h - ft \smile ft \\ & & \quad +ft \smile t' + ft \smile h\partial - ft \smile ft \smile h + ft \smile h \smile t' \\ \partial(h \smile t') & = & -ft \smile t' + t' \smile t' + f\partial \smile t' - ft \smile h \smile t' \\ & & \quad +h \smile t' \smile t' - h \smile t'\partial - h \smile t' \smile t' \end{array}$$

Remarquer qu'à cause de la présence de cup-produits avec des flèches nulles en dimension zéro, l'usage de la relation (4.12) est licite, car elle ne s'applique alors qu'à des éléments de degrés $< |x|$. Il reste alors :

$$\begin{array}{rcl} \partial U(x) & = & -ft(\partial x) - (ft \smile ft)(x) \\ & = & f(-t\partial(x) - (t \smile t)(x)) \end{array}$$

Posons $N(x) = -t\partial(x) - (t \smile t)(x)$. Alors $\partial N(x) = 0$. En effet,

$$\begin{array}{rcl} \partial N(x) & = & -\partial t\partial(x) - (\partial t \smile t)(x) + (t \smile \partial t)(x) \\ & = & -\partial t\partial(x) + (t\partial \smile t)(x) + (t \smile t \smile t)(x) - (t \smile t \smile t) - (t \smile \partial t)(x) \\ & = & -\partial t\partial(x) - (t \smile \partial t)(x) \\ & = & +\partial\partial t(x) = 0 \end{array}$$

La même remarque que précédemment montre que l'usage de la relation de Brown pour t est licite. $N(x)$ est donc un cycle de A, et il a une classe d'homologie, mais comme $fN(x) = \partial U(x)$, et comme f est injectif en homologie, on voit que $N(x)$ est un bord. Posons $N(x) = \partial V(x)$. Par ailleurs,

$$\partial(U(x) - fV(x)) = fN(x) - fN(x) = 0$$

$U(x) - fV(x)$ a donc une classe d'homologie dans A'. Comme f est surjectif en homologie, il existe un cycle $W(x)$ de A et un élément $h(x)$ de A' tels que :

$$f(W(x)) = U(x) - fV(x) - \partial h(x)$$

ou encore :

$$\partial h(x) + f(V(x) + W(x)) = U(x)$$

1. Rappelons qu'on suppose que Λ est un corps, typiquement $\mathbb{Z}/p$.

Il reste donc à poser $V(x) + W(x) = t(x)$, et la relation (4.12) est satisfaite pour x. De plus :

$$\partial t(x) = \partial V(x) = N(x) = -t\partial(x) - (t \smile t)(x)$$

La relation de Brown est donc aussi satisfaite par t. On prolonge h et t à C_n par linéarité. $\square$

(4.13) **Théorème** : *Soit $f : A \longrightarrow A'$ un morphisme de DGA-algèbres induisant un isomorphisme en homologie. On suppose que A' est connexe. Soient $t, t' : C \longrightarrow A$ deux cochaînes de Brown. Alors, si ft et ft' sont homotopes, il en est de même de t et t'.*

Montrons d'abord qu'on peut se ramener au cas où f est surjectif. D'après (4.11), il existe une cochaîne de Brown θ telle que le triangle suivant soit homotopiquement commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] & & A' \\
& B(A') \arrow[ul, "\theta"] \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

On en déduit le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] & & A' \\
& B(A') \arrow[ul, "\theta"'] \arrow[ur, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & \\
& \Omega(B(A')) \arrow[uul, "\Psi"] \arrow[uur, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

qui est commutatif, sauf en ce qui concerne le triangle supérieur. Comme A' est connexe, $B(A')$ est simplement connexe. Il en résulte que Φ induit un isomorphisme en homologie, et que $B(A') \otimes_\theta A$ est acyclique, donc que Ψ induit aussi un isomorphisme en homologie. D'après (4.11), il existe deux cochaînes de Brown $\lambda, \lambda' : C \longrightarrow \Omega(B(A'))$, telles que $\Psi\lambda$ soit homotope à t et $\Psi\lambda'$ à t'. Par ailleurs, par (4.6), $f\Psi$ est homotope à Φ. Il en résulte que $\Phi\lambda$ est homotope à ft, donc à ft', donc à $\Phi\lambda'$. Comme Φ est surjectif, et en supposant le théorème démontré dans le cas d'une flèche surjective, on voit que λ est homotope à λ', donc que t est homotope à t'.

Nous prouvons maintenant le théorème dans le cas où f est surjectif. On a une homotopie h telle que :

$$ft' - ft = \partial h - h\partial + \mu(ft \otimes h + h \otimes ft')D$$

et il s'agit de trouver k tel que :

$$t' - t = \partial k - k\partial + \mu(t \otimes k - k \otimes t')D \tag{4.14}$$

Supposons k construit en degrés $\leq n-1$, et nul en degré zéro, de telle sorte que (4.14) soit satisfait et que $fk = h$. Soit $\mathcal{B}_n$ une Λ-base de C_n, et x un élément de $\mathcal{B}_n$. On doit avoir :

$$\partial k(x) = k\partial(x) + t'(x) - t(x) - \mu(t \otimes k - k \otimes t')D(x)$$

Notons $U(x)$ le membre de droite de cette égalité, dans lequel k ne s'applique qu'à des éléments de degrés $\leq n-1$. On a $\partial U(x) = 0$ par un calcul identique à celui du théorème précédent. $U(x)$ a donc une classe d'homologie, mais :

$$\begin{aligned}
fU(x) &= fk\partial(x) + ft'(x) - ft(x) - \mu(ft \otimes fk - fk \otimes ft')D(x) \\
&= \partial h(x)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, comme f est surjective et induit un isomorphisme en homologie, le complexe $\mathrm{Ker}(f)$ est homologiquement nul. Soit $V(x)$ un antécédent de $h(x)$ par f. Alors, $\partial V(x) - U(x)$ est dans $\mathrm{Ker}(f)$ puisque :

$$f\partial V(x) - fU(x) = \partial h(x) - \partial h(x) = 0$$

De plus, $\partial V(x) - U(x)$ est un cycle. C'est donc le bord d'un élément $W(x)$ de $\mathrm{Ker}(f)$. Posons $k(x) = V(x) - W(x)$. On a :

$$\begin{array}{rcl} fk(x) & = & fV(x) = h(x) \\ \partial k(x) & = & \partial V(x) - \partial W(x) \\ & = & U(x) \end{array}$$

ce qui prouve le théorème. □

(4.15) **Lemme** : *Soit $f : A \longrightarrow A'$ un morphisme surjectif de DGA-algèbres connexes, induisant un isomorphisme en homologie, C une A_∞-coalgèbre connexe, et $t' : C \longrightarrow A'$ une γ-cochaîne. Alors il existe une γ-cochaîne $t : C \longrightarrow A$ telle que $t' = ft$.*

Posons $t(x) = 0$, si $|x| = 0$, et supposons t construit jusqu'en dimension $n-1$. Soit $\mathcal{B}_n$ une Λ-base de C_n et x un élément de $\mathcal{B}_n$. Alors l'expression :

$$U(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^{(i)} t^i \Delta_i(x)$$

qui est bien définie, est un cycle. En effet :

$$\begin{array}{rcl} \partial U(x) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{i-1} (-1)^\lambda \mu^{(i)} (t^\lambda \otimes \partial t \otimes t^{i-\lambda-1})\Delta_i(x) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{i-1}\sum_{\alpha=1}^{\infty} (-1)^\lambda \mu^{(i)} (t^\lambda \otimes \mu^{(\alpha)} t^\alpha \Delta_\alpha \otimes t^{i-\lambda-1})\Delta_i(x) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{i-1}\sum_{\alpha=1}^{\infty} (-1)^{\lambda+\alpha(i-\lambda-1)} \mu^{(\alpha+i-1)} t^{\alpha+i-1} (1^\lambda \otimes \Delta_\alpha \otimes 1^{i-\lambda-1})\Delta_i(x) \\ & = & 0 \end{array}$$

par définition des A_∞-coalgèbres. Par ailleurs, la classe d'homologie de $U(x)$ est nulle, car :

$$\begin{array}{rcl} fU(x) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mu^{(i)} (ft)^i \Delta_i(x) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mu^{(i)} t'^i \Delta_i(x) = -\partial t'(x) \end{array}$$

Noter que dans ces expressions, t ne s'applique qu'à des éléments de degrés $\leq n-1$. En effet, x étant de degré n, $\Delta_i(x)$ est de degré $n+i-2$, mais dans $\Delta_i(x)$ seuls interviennent les tenseurs $a_1 \otimes \cdots \otimes a_i$ tels que $|a_1| > 0 \ldots, |a_i| > 0$. Ceci impose $|a_j| \leq n+i-2-(i-1) = n-1$.

$U(x)$ est donc un bord : $U(x) = \partial V(x)$, et :

$$\begin{array}{rcl} \partial(fV(x) + t'(x)) & = & f(\partial V(x)) + \partial t'(x) \\ & = & fU(x) + \partial t'(x) \\ & = & 0 \end{array}$$

et comme f est surjectif en homologie, on peut écrire :

$$f(z) + fV(x) + t'(x) = \partial y$$

où $\partial z = 0$. Soit w un antécédent de y par f, alors :

$$f(z + V(x) - \partial w) + t'(x) = 0$$

et $\partial(z + V(x) - \partial w) = \partial V(x) = U(x)$. On pose donc $t(x) = z - V(x) + \partial w$, et on a :

$$\begin{aligned} ft(x) &= t'(x) \\ \partial t(x) &= -\sum_{i=1}^{\infty} \mu^{(i)} t^i \Delta_i(x) \end{aligned}$$

On prolonge à C_n par linéarité. □

(4.16) **Corollaire** : *Soit C une A_∞-coalgèbre simplement connexe. Alors l'homomorphisme canonique :*

$$\Omega B\Omega(C) \xrightarrow{\Phi} \Omega(C)$$

admet une section (qui est un morphisme de DGA-algèbres).

En effet, Φ est surjectif et induit un isomorphisme en homologie. Il existe donc une γ-cochaîne t : $C \longrightarrow \Omega B\Omega(C)$ telle que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \Omega B\Omega(C) \arrow[rr, "\Phi"] & & \Omega(C) \\ & C \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Par (3.17), t correspond à un unique morphisme de DGA-algèbres, qui est la section cherchée. □

(4.17) **Corollaire** : *La relation d'homotopie est une relation d'équivalence :*

- *i) pour les morphismes de DGA-algèbres d'une DGA-algèbre libre et connexe vers une DGA-algèbre connexe,*
- *ii) pour les γ-cochaînes d'une A_∞-coalgèbre simplement connexe vers une DGA-algèbre connexe.*

i) et *ii)* sont clairement équivalents d'après (4.6). Noter que *i)* est vrai quand l'algèbre de départ est de la forme $\Omega B\Omega(C)$, où C est une A_∞-coalgèbre connexe, d'après (4.9) et (4.6). Toute DGA-algèbre libre et connexe est de la forme $\Omega(C)$ où C est une A_∞-coalgèbre simplement connexe. Soient donc f et f' deux morphismes de $\Omega(C)$ dans une DGA-algèbre connexe A', avec f homotope à f'. Φ étant comme dans le corollaire précédent, et σ étant la section, on a successivement (où $\sim$ est la relation d'homotopie) :

$$\begin{aligned} f &\sim f' \\ f\Phi &\sim f'\Phi \\ f'\Phi &\sim f\Phi \\ f' = f'\Phi\sigma &\sim f\Phi\sigma = f \end{aligned}$$

ce qui montre que la relation est symétrique. On traite de même la transitivité. □

Nous généralisons maintenant les théorèmes (4.11) et (4.13) aux γ-cochaînes.

(4.18) **Théorème** : *Soit $f : A \longrightarrow A'$ un morphisme de DGA-algèbres induisant un isomorphisme en homologie. Soit C une DGA-coalgèbre simplement connexe. Soit $t' : C \longrightarrow A'$ une γ-cochaîne. Alors il existe une γ-cochaîne $t : C \longrightarrow A$, telle que ft soit homotope à t', et elle est unique à homotopie près.*

L'assertion d'existence résulte de (4.15) quand f est surjective. Dans le cas général, on peut considérer le diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & A' \\ & B(A') \arrow[ul, "\theta"'] \arrow[ur, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & \\ & \Omega(B(A')) \arrow[uul, "\Psi"] \arrow[uur, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

déjà rencontré dans la démonstration de (4.13). Il existe une γ-cochaîne $t'' : C \longrightarrow \Omega B(A')$ telle que Φt soit homotope à t', puisque Φ est surjectif. Mais alors $f\Psi t''$ est homotope à t', et il suffit de poser $t = \Psi t''$.

Pour prouver l'unicité de t à homotopie près,considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\Omega B\Omega(C) \arrow[rr, shift left, "\Phi"] & & \Omega(C) \arrow[ll, shift left, "\sigma"] \arrow[rr, shift left, "g"] \arrow[rr, shift right, "g'"'] & & A \arrow[r, "f"] & A' \\
& B\Omega(C) \arrow[ur, "\beta"'] & & C \arrow[ul, "\gamma"] \arrow[ur, shift left, "t"] \arrow[ur, shift right, "t'"'] & &
\end{tikzcd}$$

où g et g' sont tels que $g\gamma = t$ et $g'\gamma = t'$, où Φ est le morphisme canonique, et où σ est une section de Φ. On a successivement :

$$\begin{array}{rcll}
fg & \sim & fg' & \\
fg\Phi & \sim & fg'\Phi & \\
fg\beta & \sim & fg'\beta & \text{(par (4.6))} \\
g\beta & \sim & g'\beta & \text{(par (4.13))} \\
g\Phi & \sim & g'\Phi & \\
g = g\Phi\sigma & \sim & g'\Phi\sigma = g' & \\
t & \sim & t' &
\end{array}$$

ce qui prouve le théorème. □

Compte tenu de (4.6), le théorème (4.18) entraîne :

(4.19) **Corollaire** : *Soient $f : A \longrightarrow A'$, $g : L \longrightarrow A'$ deux morphismes de DGA-algèbres, où f induit un isomorphisme en homologie, et où L est libre et connexe. Alors il existe un morphisme $h : L \longrightarrow A$, tel que fh soit homotope à g, et un tel h est unique à homotopie près. En conséquence, dans la catégorie des DGA-algèbres libres et connexes, tout morphisme qui induit un isomorphisme en homologie, a un inverse homotopique (Adams-Hilton* [2]*).*

(4.20) **Théorème** : *Soit $f : C \Vvdash\!\!\longrightarrow C'$ un A_∞-morphisme induisant un isomorphisme en homologie, où C et C sont deux A_∞-coalgèbres simplement connexes. Soit $t : C \longrightarrow A$ une γ-cochaîne. Alors il existe une γ-cochaîne $t' : C' \longrightarrow A$, telle que $t'f$ soit homotope à t, et elle est unique à homotopie près.*

Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A & C \arrow[l, "t"'] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma"] & C' \arrow[d, "\gamma"] \\
& \Omega(C) \arrow[ul, "\Phi"] \arrow[r, "\Omega(f)"'] & \Omega(C')
\end{tikzcd}$$

dans lequel Φ est dû à l'initialité de γ. $\Omega(f)$ induit un isomorphisme en homologie. Comme $\Omega(C)$ et $\Omega(C')$ sont libres, $\Omega(f)$ admet un inverse homotopique g. On a alors :

$$\Phi g\gamma f = \Phi g\Omega(f)\gamma \sim \Phi\gamma$$

Il en résulte que la cochaîne $t' = \Phi g\gamma$ convient.

Soient maintenant t et t' deux γ-cochaînes de C' vers A, telles que tf et $t'f$ soient homotopes. Alors :

$$\Phi\Omega(f)\gamma = tf \sim t'f = \Phi'\Omega(f)\gamma$$

où $\Phi\gamma = t$ et $\Phi'\gamma = t'$. Il en résulte que $\Phi\Omega(f)$ est homotope à $\Phi'\Omega(f)$. Mais alors :

$$t = \Phi\gamma \sim \Phi\Omega(f)g\gamma \sim \Phi'\Omega(f)g\gamma \sim \Phi'\gamma = t' \ \square$$

Le lemme suivant est l'analogue de (4.15).

(4.21) **Lemme** : *Soit $f : C \longrightarrow C'$ un morphisme injectif de DGA-coalgèbres simplement connexes, induisant un isomorphisme en homologie. Soit $t : C \longrightarrow A$ une β-cochaîne, où A est une A_∞-algèbre. Alors, il existe une β-cochaîne $t' : C' \longrightarrow A$, telle que $t'f = t$.*

Écrivons C' sous la forme $C' = \mathrm{Im}(f) \oplus S$. Alors, dans cette décomposition en somme directe, la différentielle de C' s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} \partial' & g \\ 0 & \partial'' \end{pmatrix}$$

où ∂' est la différentielle de $\mathrm{Im}(f)$. Alors ∂'' est une différentielle sur S, et S muni de cette différentielle est homologiquement nul, car isomorphe au complexe $C'/\mathrm{Im}(f)$. Posons $K = \mathrm{Ker}(\partial'') = \mathrm{Im}(\partial'') \subset S$, et soit G un supplémentaire de K dans S. On a $C' = \mathrm{Im}(f) \oplus K \oplus G$, et la différentielle de C' s'écrit dans cette décomposition :

$$\begin{pmatrix} \partial' & g' & g'' \\ 0 & 0 & \partial'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De plus, ∂'' est un isomorphisme de G_n sur K_{n-1}. Posons $t' = 0$ en degrés 0 et 1, et supposons t' construit jusqu'à la dimension $n-1$, de telle sorte que :

$$\begin{array}{llcll}
(*) & t'\partial x + \sum_{i=1}^{\infty} m_i t'^i D^{(i)}(x) & = & 0 & (\text{pour } |x| \leq n-1) \\
(**) & t'f(y) & = & t(y) & (\text{pour } |y| \leq n-1) \\
(***) & U(x) = t'\partial x + \sum_{i=2}^{\infty} m_i t'^i D^{(i)}(x) & = & 0 & (\text{pour } x \in G_n)
\end{array}$$

Remarquer que dans l'expression $U(x)$, la sommation commence à $i = 2$, de telle sorte que t' ne s'y applique qu'à des éléments de degrés au plus $n-1$. Définissons t' en degré n par :

$$\begin{array}{lcll}
t'(x) & = & t(f^{-1}(x)) & (\text{si } x \in \mathrm{Im}(f)_n) \\
t'(x) & = & 0 & (\text{si } x \in G_n) \\
t'(x) & = & -\sum_{i=2}^{\infty} m_i t'^i D^{(i)}(y) - t'g''(y) & (\text{si } x \in K_n)
\end{array}$$

où y est l'unique élément de G_{n+1}, tel que $\partial''(y) = x$. Remarquer que dans $\sum_{i=2}^{\infty} m_i t'^i D^{(i)}(y)$, t' ne s'applique qu'à des éléments de degrés au plus $n-1$, car t' est nul en degrés 0 et 1. Par ailleurs, on a $g''(y) \in \mathrm{Im}(f)_n$ et $t'g''(y)$ est donc déjà défini.

Il est clair que $(**)$ est satisfait en degré n. Par ailleurs, pour $x \in G_{n+1}$, on a :

$$t'\partial''(x) = -\sum_{i=2}^{\infty} m_i t'^i D^{(i)}(x) - t'g''(x)$$

ou encore :

$$t'\partial(x) + \sum_{i=2}^{\infty} m_i t'^i D^{(i)}(x) = 0$$

$(***)$ est donc aussi satisfait pour $x \in G_{n+1}$. Pour terminer, nous vérifions $(*)$. Sur $\mathrm{Im}(f)$, $(*)$ résulte immédiatement du fait que t est une β-cochaîne. Sur G, on a $m_1 t'(x) = 0$ et $U(x) = 0$. Enfin, pour x dans K_n, on a $x = \partial''(z)$, avec $z \in G_{n+1}$. Par ailleurs, $\partial\partial''(z) = -\partial g''(z)$, et il existe $y \in C_n$ tel que $g''(z) = f(y)$. On a donc :

$$t'\partial(x) + \sum_{i=1}^{\infty} m_i t'^i D^{(i)}(x) = -t'\partial f(y) + \sum_{i=1}^{\infty} m_i t'^i D^{(i)}(\partial'' z)$$

Par ailleurs :

$$-t'\partial f(y) = -t'f(\partial y) = -t\partial y = \sum_{i=1}^{\infty} m_i t^i D^{(i)}(y)$$

et dans cette dernière expression, t ne s'applique qu'à des éléments de degrés $\leq |y| = n$. On peut donc remplacer t par $t'f$, d'où :

$$-t'\partial f(y) = \sum_{i=1}^{\infty} m_i t'^i D^{(i)}(f(y)) = \sum_{i=1}^{\infty} m_i t'^i D^{(i)}(g''(z))$$

L'expression à calculer se réduit donc à

$$\sum_{i=1}^{\infty} m_i t'^i D^{(i)}(\partial z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{i-1} (-1)^{i-\lambda-1} m_i (t'^{\lambda} \otimes t'\partial \otimes t'^{i-\lambda-1}) D^{(i)}(z)$$

Pour $i \geq 2$, on peut remplacer $t'\partial$ en utilisant $(*)$, puisqu'il ne s'applique qu'à des éléments de degrés au plus $n-1$. Par contre, pour $i = 1$, on peut remplacer $t'\partial(z)$ en utilisant $(***)$, puisque $z \in G_{n+1}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{\infty} -m_1 m_k t'^k D^{(k)}(z) \\
&\qquad + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{i-1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{i-\lambda+\lambda k} m_i (1^{\lambda} \otimes m_k \otimes 1^{i-\lambda-1}) t'^{i+k-1} D^{(i+k-1)}(z) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{i-1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{i-\lambda+\lambda k} m_i (1^{\lambda} \otimes m_k \otimes 1^{i-\lambda-1}) t'^{i+k-1} D^{(i+k-1)}(z) \\
&= 0
\end{aligned}$$

par définition des A_∞-algèbres. □

(4.22) **Corollaire** : *Soit A une A_∞-algèbre (non nécessairement connexe). L'homomorphisme canonique :*

$$\Psi : B(A) \longrightarrow B\Omega B(A)$$

admet une rétraction (qui est un morphisme de DGA-coalgèbres).

La démonstration est tout à fait « duale » de celle de (4.16). □

(4.23) **Corollaire** : *La relation d'homotopie est une relation d'équivalence*

- *i) pour les morphismes de DGA-coalgèbres, d'une DGA-coalgèbre connexe vers une DGA-coalgèbre libre et simplement connexe,*
- *ii) pour les β-cochaînes d'une DGA-coalgèbre connexe vers une A_∞-algèbre connexe.*

La démonstration est semblable à celle de (4.17). □

(4.24) **Théorème** : *Soit $f : C \longrightarrow C'$ un morphisme de DGA-coalgèbres simplement connexes, induisant un isomorphisme en homologie. Soit A une A_∞-algèbre connexe. Soit $t : C \longrightarrow A$ une β-cochaîne. Alors il existe une β-cochaîne $t' : C' \longrightarrow A$ telle que t soit homotope à $t'f$, et elle est unique à homotopie près.*

L'assertion d'existence résulte de (4.21) quand f est injectif. Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & B\Omega(C) \arrow[d, "\beta"] & \\
 & \Omega(C) & \\
C \arrow[uur, "\Psi"] \arrow[ur, "\gamma"'] \arrow[rr, "f"'] & & C' \arrow[uul, "\Psi'"'] \arrow[ul, "\theta"]
\end{tikzcd}$$

où θ est donné par (4.20), et où Ψ et Ψ' sont dûs à la finalité de β. Comme C et C' sont simplement connexes, on voit que Ψ et Ψ' induisent des isomorphismes en homologie. Comme Ψ est injectif, il existe une β-cochaîne $t'' : B\Omega(C) \longrightarrow A$ telle que $t''\Psi = t$. Alors, $t''\Psi' f \sim t''\Psi = t$. $t' = t''\Psi'$ répond donc à la question de l'existence. Pour prouver l'unicité de t' à homotopie près, on considère le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & & A & & \Omega B(A) & \\
C \arrow[r, "f"'] & C' \arrow[ur, shift left, "t"] \arrow[ur, shift right, "t'"'] \arrow[rr, shift left, "g"] \arrow[rr, shift right, "g'"'] & & B(A) \arrow[ul, "\beta"'] \arrow[ur, "\gamma"'] \arrow[rr, shift left, "\Psi"] & & B\Omega B(A) \arrow[ll, shift left, "r"]
\end{tikzcd}$$

dans lequel $t = \beta g$, $t' = \beta g'$, et où r est une rétraction pour Ψ. On procède alors comme pour (4.18). □

Les théorèmes suivants sont analogues à (4.19) et (4.20), et se prouvent de la même manière.

(4.25) **Théorème** : *Soient $f : C \longrightarrow C'$, $g : C \longrightarrow L$ deux morphismes de DGA-coalgèbres simplement connexes, où f induit un isomorphisme en homologie, et où L est libre. Alors il existe un morphisme $h : C' \longrightarrow L$, tel que hf soit homotope à g, et il est unique à homotopie près. En conséquence, dans la catégorie des DGA-coalgèbres libres et simplement connexes, tout morphisme qui induit un isomorphisme en homologie a un inverse homotopique.* □

(4.26) **Théorème** : *Soit $f : A \mathrel{|\!\!|\!\!|\!\!\longrightarrow} A'$ un A_∞-morphisme induisant un isomorphisme en homologie, où A et A' sont des A_∞-algèbres connexes. Soit $t' : C \longrightarrow A'$ une β-cochaîne. Alors il existe une β-cochaîne $t : C \longrightarrow A$, telle que ft soit homotope à t', et elle est unique à homotopie près.* □

En appelant A_∞-équivalence tout A_∞-morphisme dont la composante de longueur 1 induit un isomorphisme en homologie, et compte tenu de (3.4) et (3.5), on peut déduire de (4.19) et (4.25) que :

(4.27) **Théorème** : *Dans la catégorie des A_∞-algèbres connexes, ou des A_∞-coalgèbres simplement connexes, toute A_∞-équivalence peut être inversée.* □

Chapitre 5

Le modèle minimal de Baues-Lemaire.

5.1 Définition et unicité.

(5.1) **Définition** : *Une DGA-algèbre A (resp. DGA-coalgèbre C) est dite « minimale », si elle est libre et si la différentielle $Q(\partial)$ (resp. $P(\partial)$) induite sur $Q(A)$ (resp. $P(C)$) est nulle.*

Il revient au même de dire que pour tout choix d'un module de générateurs pour A, la composante de longueur 1 de ∂ est nulle.

(5.2) **Théorème** : *Tout morphisme de DGA-algèbres minimales et connexes (resp. de DGA-coalgèbres minimales et simplement connexes) qui induit un isomorphisme en homologie est un isomorphisme.*

Soient A et A' deux DGA-algèbres minimales et connexes, et soit $f : A \longrightarrow A'$ un morphisme induisant un isomorphisme en homologie. Alors, par (3.24), $Q(f)$ induit un isomorphisme en homologie, et est donc un isomorphisme, puisque les différentielles de $Q(A)$ et $Q(A')$ sont nulles. Le théorème résulte alors de (2.25). On traite de même le cas des DGA-coalgèbres. $\square$

(5.3) **Définition** : *Soit A une DGA-algèbre connexe (resp. C une DGA-coalgèbre simplement connexe). On appelle « modèle minimal de Baues-Lemaire de A (resp. de C) » un morphisme :*

$$\mathcal{M} \longrightarrow A$$
$$\textit{(resp.}\quad C \longrightarrow \mathcal{N}\textit{)}$$

où $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{N}$) est une DGA-algèbre (resp. DGA-coalgèbre) minimale, et induisant un isomorphisme en homologie.

(5.4) **Théorème** : *Toute DGA-algèbre connexe, et toute DGA-coalgèbre simplement connexe, admet un modèle minimal de Baues-Lemaire, unique à isomorphisme près. De plus, deux tels isomorphismes sont homotopes.*

L'assertion d'unicité signifie que si $\mathcal{M} \longrightarrow A$ et $\mathcal{M}' \longrightarrow A$ sont deux modèles minimaux de A, on a un isomorphisme $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[rr] \arrow[dr, "\simeq"'] & & A \\ & \mathcal{M}' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

soit homotopiquement commutatif. Il résulte de (4.19) que deux tels isomorphismes sont homotopes. De même dans le cas des coalgèbres. La question de l'unicité est donc réglée.

5.2 Existence du modèle minimal pour une algèbre.

(5.5) **Théorème** *Soit C une DGA-coalgèbre simplement connexe. Alors il existe une DGA-algèbre minimale et connexe $\mathcal{M}$, et une cochaîne de Brown $t : C \longrightarrow \mathcal{M}$, telles que le produit tensoriel tordu :*

$$C \otimes_t \mathcal{M}$$

soit acyclique.

Avant de prouver ce théorème, montrons comment il implique l'existence d'un modèle minimal pour toute DGA-algèbre connexe. Soit A une DGA-algèbre connexe. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A & \Omega B(A) \arrow[l, "\Phi"'] \arrow[d, "\Psi"', shift right] \\
B(A) \arrow[u, "\beta"] \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[r, "t"'] & \mathcal{M} \arrow[u, dotted, "\Psi'"', shift right]
\end{tikzcd}$$

dans lequel t est donné par le théorème (5.5) ($B(A)$ est simplement connexe), et Φ et Ψ par initialité de γ. Les trois produits tensoriels tordus :

$$B(A) \otimes_\beta A \qquad\qquad B(A) \otimes_\gamma \Omega B(A) \qquad\qquad B(A) \otimes_t \mathcal{M}$$

sont acycliques. Φ et Ψ induisent donc des isomorphismes en homologie. Mais comme $\mathcal{M}$ est libre, il existe d'après (4.19) un morphisme :

$$\Psi' : M \longrightarrow \Omega B(A)$$

induisant un isomorphisme en homologie. Le composé $\Phi \circ \Psi'$ est un modèle minimal pour A.

Preuve de (5.5) : Soit $V = \downarrow H_*(\overline{C})$ la désuspension de l'homologie du noyau de l'augmentation $\varepsilon : C \longrightarrow \Lambda$, et $\mathcal{M} = T(V)$. Il s'agit de construire la différentielle ∂ de $T(V)$ et la cochaîne de Brown t. Soient :

$$\begin{array}{rcll} \delta_i & : & V \longrightarrow V^i & \\ t_i & : & C \longrightarrow V^i & \qquad\qquad (i \geq 1) \end{array}$$

les composantes de longueur i de ∂ et t. Comme $\mathcal{M}$ doit être minimale, on a $\delta_1 = 0$. Posons :

$$\begin{array}{rcl} \partial_n & = & \delta_2 + \cdots + \delta_n \\ \tau_n & = & t_1 + \cdots + t_n \end{array}$$

Soit I l'idéal d'augmentation de $T(V)$. Alors I^n est simplement le sous-module de $\mathcal{M}$ engendré par les mots de longueur au moins n.

Nous définissons maintenant $t_1 : C \longrightarrow V$. Comme Λ est un corps, la projection canonique :([1])

$$Z_*(\overline{C}) \longrightarrow H_*(\overline{C})$$

se prolonge à C tout entier. On supposera même qu'on a choisi un supplémentaire S de $Z_*(\overline{C})$ dans C, et que le prolongement ζ de cette projection canonique est nul sur S. On définit alors t_1 comme le composé :

$$t_1 : C \xrightarrow{\zeta} H_*(\overline{C}) \xrightarrow{\downarrow} V$$

Soit maintenant n un entier ≥ 2, et supposons que les δ_i et t_i soient définis pour $i \leq n-1$, de telle sorte que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

$$\begin{array}{lll} (P_{n-1}) \qquad & \partial_{n-1}^{[\,]}\tau_{n-1} + \tau_{n-1}\partial + \tau_{n-1} \smile \tau_{n-1} = 0 & \qquad (\text{modulo } I^n) \\ & \tau_{n-1} \text{ est nul sur } S & \end{array}$$

1. $Z_*(\overline{C})$ est le sous-module des cycles de $\overline{C}$.

Considérons alors la relation :

$$(P_n) \qquad \partial_n^{[\,]}\tau_n + \tau_n\partial + \tau_n \smile \tau_n = 0 \qquad (\text{modulo } I^{n+1})$$

Remplaçons ∂_n par $\partial_{n-1} + \delta_n$ et τ_n par $\tau_{n-1} + t_n$. On obtient :

$$\begin{aligned}&\partial_{n-1}^{[\,]}t_n + \partial_{n-1}^{[\,]}\tau_{n-1} + \delta_n^{[\,]}t_n + \delta_n^{[\,]}\tau_{n-1} + \\ &\qquad t_n\partial + \tau_{n-1} \smile \tau_{n-1} + t_n \smile \tau_{n-1} + \tau_{n-1} \smile t_n + t_n \smile t_n = 0 \qquad (\text{modulo } I^{n+1})\end{aligned}$$

Remarquer que δ_1 étant nul, $\partial_{n-1}^{[\,]}$ augmente strictement la longueur des mots. Il en résulte que $\partial_{n-1}^{[\,]}t_n$ prend ses valeurs dans I^{n+1}. Pour les mêmes raisons, $\delta_n^{[\,]}t_n + \delta_n^{[\,]}\tau_{n-1}$ se réduit modulo I^{n+1} à $\delta_n t_1$. Enfin, $t_n \smile \tau_n$, $\tau_n \smile t_n$ et $t_n \smile t_n$ prennent aussi leurs valeurs dans I^{n+1}. Il reste finalement :

$$\partial_{n-1}^{[\,]}\tau_{n-1} + \delta_n t_1 + \tau_{n-1}\partial + t_n\partial + \tau_{n-1} \smile \tau_{n-1} = 0 \qquad (\text{modulo } I^{n+1})$$

(5.6) **Lemme** : $\partial_{n-1}^{[\,]}\tau_{n-1} + \tau_{n-1} \smile \tau_{n-1}$ *envoie les bords de C dans I^{n+1}.*

Soit ∂x un bord. Posons $E = (\partial_{n-1}^{[\,]}\tau_{n-1} + \tau_{n-1} \smile \tau_{n-1})(\partial x)$. On peut supposer que x est dans S. En utilisant (P_{n-1}), et en se souvenant que par minimalité, $\partial_{n-1}^{[\,]}$ envoie I^n dans I^{n+1}, on a, modulo I^{n+1} :

$$\begin{aligned} E &= \partial_{n-1}^{[\,]}\tau_{n-1}\partial x + (\tau_{n-1} \smile \tau_{n-1})\partial x \\ &= -\partial_{n-1}^{[\,]}\partial_{n-1}^{[\,]}\tau_{n-1}(x) - \partial_{n-1}^{[\,]}(\tau_{n-1} \smile \tau_{n-1})(x) + (\tau_{n-1} \smile \tau_{n-1})(\partial x) \\ &= -\partial_{n-1}^{[\,]}(\tau_{n-1} \smile \tau_{n-1})(x) + (\tau_{n-1} \smile \tau_{n-1})(\partial x)\end{aligned}$$

car τ_{n-1} est nul sur S. Par ailleurs, $\partial_{n-1}^{[\,]}$ est une dérivation de $T(V)$ (qui n'est pas de carré nul), et on a :

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}^{[\,]}(\tau_{n-1} \smile \tau_{n-1}) &= \partial_{n-1}^{[\,]}\mu(\tau_{n-1} \otimes \tau_{n-1})D \\ &= \mu(\partial_{n-1}^{[\,]} \otimes 1 + 1 \otimes \partial_{n-1}^{[\,]})(\tau_{n-1} \otimes \tau_{n-1})D \\ &= \mu(\partial_{n-1}^{[\,]}\tau_{n-1} \otimes \tau_{n-1} - \tau_{n-1} \otimes \partial_{n-1}^{[\,]}\tau_{n-1})D\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} (\tau_{n-1} \smile \tau_{n-1})\partial &= \mu(\tau_{n-1} \otimes \tau_{n-1})D\partial \\ &= \mu(\tau_{n-1} \otimes \tau_{n-1})(\partial \otimes 1 + 1 \otimes \partial)D \\ &= \mu(-\tau_{n-1}\partial \otimes \tau_{n-1} + \tau_{n-1} \otimes \tau_{n-1}\partial)D\end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$E = \Big(-(\partial_{n-1}^{[\,]}\tau_{n-1} + \tau_{n-1}\partial) \smile \tau_{n-1} + \tau_{n-1} \smile (\partial_{n-1}^{[\,]}\tau_{n-1} + \tau_{n-1}\partial)\Big)(x) \qquad (\text{modulo } I^{n+1})$$

Comme le cup-produit d'une fonction à valeurs dans I^n avec τ_{n-1} est à valeurs dans I^{n+1}, on obtient finalement :

$$E = (\tau_{n-1} \smile \tau_{n-1} \smile \tau_{n-1} - \tau_{n-1} \smile \tau_{n-1} \smile \tau_{n-1})(x) = 0 \qquad (\text{modulo } I^{n+1})$$

ce qui prouve le lemme. □

Nous revenons maintenant à la construction de t_n et δ_n. Comme $t_1 : Z_*(\overline{C}) \longrightarrow V$ est surjectif, il suffit pour définir δ_n de définir $\delta_n t_1(x)$ pour tout x de $Z_*(\overline{C})$, de façon que $\delta_n t_1(x) = 0$ si $t_1(x) = 0$. C'est ce que nous faisons en imposant la relation :

$$\delta_n t_1(x) = -\partial_{n-1}^{[\,]}\tau_{n-1}(x) - (\tau_{n-1} \smile \tau_{n-1})(x) \qquad (\text{modulo } I^{n+1}) \tag{5.7}$$

Le noyau de $t_1 : Z_*(\overline{C}) \longrightarrow V$ n'est autre que celui de la projection canonique de $Z_*(\overline{C})$ sur $H_*(\overline{C})$, c'est-à-dire $B_*(\overline{C})$,([2]) et le lemme montre que δ_n est bien défini modulo I^{n+1}.

2. $B_*(\overline{C})$ est bien sûr le sous-module des bords dans $\overline{C}$.

Remarquons maintenant que la relation (P_{n-1}) implique que le membre de droite de (5.7) est dans I^n pour x dans $Z_*(\overline{C})$. δ_n prend donc ses valeurs dans $I^n/I^{n+1} = V^n$.

Nous définissons maintenant t_n sur les élements de $B_*(\overline{C})$ en imposant la relation :

$$t_n(\partial x) = -\partial^{[\ ]}_{n-1}\tau_{n-1}(x) - \delta_n t_1(x) - \tau_{n-1}(\partial x) - (\tau_{n-1} \smile \tau_{n-1})(x) \qquad (\text{modulo } I^{n+1}) \tag{5.8}$$

Remarquons que si x est un cycle ($x \in Z_*(\overline{C})$), le membre de droite de (5.8) est nul, car c'est justement la définition de δ_n. t_n est donc bien défini sur $B_*(\overline{C})$. Par ailleurs, (P_{n-1}) implique que le membre de droite de (5.8) prend ses valeurs dans I^n. Il en résulte que t_n est bien défini à valeurs dans $I^n/I^{n+1} = V^n$.

Nous étendons maintenant t_n à tout C en l'étendant d'abord d'une façon quelconque à $Z_*(\overline{C})$, puis en lui demandant d'être nul sur S. Par ailleurs, (P_n), qui n'est autre que (5.8), est satisfaite pour tout x de C.

Prouvons maintenant que les familles des t_n et des δ_n sont localement finies. Comme C est simplement connexe, V est nul en degré 0, donc V^n est nul jusqu'en degré $(n-1)$. Comme les t_n et δ_n sont de degrés -1, ceci assure que $t_n(x) = 0$ et $\delta_n(x) = 0$ pour x fixé (homogène) et n assez grand. On peut donc poser :

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i=1}^{\infty} t_i \\ \delta &= \sum_{i=2}^{\infty} \delta_i \end{aligned}$$

L'ensemble des relations (P_n) implique que :

$$\partial^{[\ ]} t + t\partial + t \smile t = 0$$

t est donc une cochaîne de Brown ($\varepsilon t = 0$ est clairement satisfait). Pour prouver que $(\partial^{[\ ]})^2 = 0$, il suffit de le faire sur un système de générateurs, puisque $\partial^{[\ ]}$ est une dérivation, et pour cela, il suffit de prouver que $(\partial^{[\ ]})^2 t = 0$. En effet, on a la projection canonique :

$$T(V) \xrightarrow{\pi} Q(T(V)) = V$$

et la flèche composée :

$$C \xrightarrow{t} T(V) \xrightarrow{\pi} V$$

est surjective, car elle n'est autre que t_1. Il en résulte que π admet une section s dont l'image est contenue dans l'image de t. s se prolonge donc en un morphisme d'algèbres :

$$\overline{s} : T(V) \longrightarrow T(V)$$

tel que $\overline{s}(V) \subset \mathrm{Im}(t)$. Or, $Q(\overline{s}) = \pi s$ est l'identité de V, et par (1.49) $\overline{s}$ est un surjectif. Il en résulte que l'image de s, donc aussi l'image de t, contient un système de générateurs. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} (\partial^{[\ ]})^2 t &= \partial^{[\ ]}(\partial^{[\ ]} t) \\ &= -\partial^{[\ ]}(t\partial + t \smile t) \\ &= t\partial^2 - (t \smile t)\partial + \partial^{[\ ]}(t \smile t) \\ &= d(t \smile t) \\ &= d(dt) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Il reste à montrer que $C \otimes_t \mathcal{M}$ est acyclique. Le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Omega(C) \arrow[rr, "\Phi"] & & \mathcal{M} \\ & C \arrow[ul, "\gamma"] \arrow[ur, "t"'] & \end{tikzcd}$$

nous fournit un morphisme de constructions :

$$C \otimes_\gamma \Omega(C) \xrightarrow{1\otimes\Phi} C \otimes_t \mathcal{M}$$

dont il suffit de montrer qu'il induit un isomorphisme en homologie. Pour cela, il suffit de montrer que Φ induit un isomorphisme en homologie. Or, $\mathcal{M}$ est libre, et la composante de longueur 1 de Φ n'est autre qu'un prolongement à $\downarrow\overline{C}$ de la flèche canonique de $\downarrow Z_*(\overline{C})$ dans $\downarrow H_*(\overline{C})$, puisqu'elle vérifie :

$$\Phi_1\gamma = t_1$$

L'assertion résulte donc de (3.24) et du fait que ce prolongement induit un isomorphisme en homologie. Ceci termine la preuve de (5.4) pour les algèbres. □

5.3 Existence du modèle minimal pour une coalgèbre.

(5.9) **Théorème** : *Soit A une DGA-algèbre connexe. Alors il existe une DGA-coalgèbre minimale et simplement connexe $\mathcal{N}$, et une cochaîne de Brown $t : \mathcal{N} \longrightarrow A$, telles que le produit tensoriel tordu :*

$$\mathcal{N} \otimes_t A$$

soit acyclique.

Comme précédemment, ce théorème entraîne (5.4) pour les coalgèbres. Soit C une DGA-coalgèbre simplement connexe. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{N} \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\Psi'"'] & \Omega(C) \\ B\Omega(C) \arrow[ur, "\beta"] & C \arrow[l, "\Psi"] \arrow[u, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

Alors Ψ' a un inverse homotopique, et $\Phi'\Psi : C \longrightarrow \mathcal{N}$ est un modèle minimal pour C.

Démonstration de (5.9) : Soit $V = \uparrow H_*(\overline{A})$, et $\mathcal{N} = \Theta(V)$. On doit construire la différentielle ∂ de $\Theta(V)$ et la cochaîne de Brown t. Comme pour (5.5), on pose :

$$\begin{array}{rcl} \partial_n & = & \delta_2 + \cdots + \delta_n \\ \tau_n & = & t_1 + \cdots + t_n \end{array}$$

où $\delta_i : V^i \longrightarrow V$ $(i \geq 2)$, et $t_i : V^i \longrightarrow A$ $(i \geq 1)$ sont les composantes de longueur i de ∂ et t. Soit Θ_n la sous-DGA-coalgèbre de $\Theta(V)$ définie par :

$$\Theta_n = \bigoplus_{0\leq q\leq n} V^q$$

On définit $t_1 : V = \uparrow H_*(\overline{A}) \longrightarrow A$ comme le composé :

$$V \xrightarrow{\downarrow} H_*(\overline{A}) \xrightarrow{\xi} A$$

où ξ est une sélection de cycles, c'est-à-dire que pour chaque x de $H_*(\overline{A})$, $\xi(x)$ est un cycle représentant x. Comme Λ est un corps, ξ peut être supposée linéaire, et telle que $\mathrm{Im}(\xi) \subset \overline{A}$. Soit S un supplémentaire de $Z_*(\overline{A})$ dans $\overline{A}$. Alors, ∂ envoie bijectivement S sur $B_*(\overline{A})$. Soit $n \geq 2$, et supposons que les δ_i et les t_i soient construits pour $i \leq n-1$, tels que :

$$\begin{array}{lll} (P_{n-1}) & \partial\tau_{n-1} + \tau_{n-1}\partial_{n-1}^{[\,]} + \tau_{n-1} \smile \tau_{n-1} = 0 & (\text{sur } \Theta_{n-1}) \\ & \mathrm{Im}(\tau_{n-1}) \subset S & \end{array}$$

Considérons la relation :

$$(P_n) \qquad \partial\tau_n + \tau_n\partial_n^{[\,]} + \tau_n \smile \tau_n = 0 \qquad (\text{sur } \Theta_n)$$

Remplaçons ∂_n par $\partial_{n-1} + \delta_n$ et τ_n par $\tau_{n-1} + t_n$. On a :

$$\partial\tau_{n-1} + \tau_{n-1}\partial_{n-1}^{[\,]} + \partial t_n + t_1\delta_n + \tau_{n-1} \smile \tau_{n-1} = 0 \qquad (\text{sur } \Theta_n)$$

après avoir éliminé les termes qui sont nuls a priori sur Θ_n.

(5.10) **Lemme** : *$\tau_{n-1} \smile \tau_{n-1} + \tau_{n-1}\partial_{n-1}^{[\,]}$ envoie Θ_n dans les cycles de $\overline{A}$.*

Soit $x \in \Theta_n$ et posons $E = (\tau_{n-1} \smile \tau_{n-1} + \tau_{n-1}\partial_{n-1}^{[\,]})(x)$. On a :

$$\begin{aligned} \partial E &= \partial(\tau_{n-1} \smile \tau_{n-1})(x) + \partial\tau_{n-1}\partial_{n-1}^{[\,]}(x) \\ &= \partial(\tau_{n-1} \smile \tau_{n-1})(x) - (\tau_{n-1} \smile \tau_{n-1})\partial_{n-1}^{[\,]}(x) \qquad (\text{modulo } S) \end{aligned}$$

Le même calcul que pour le lemme (5.6) montre que $\partial E = 0$ modulo S, en remarquant que l'usage de la relation (P_{n-1}) est licite, car le cup-produit avec τ_{n-1} nous assure qu'elle ne s'applique alors qu'à des éléments de Θ_{n-1}. Ceci prouve le lemme, puisque $S \cap B_*(\overline{A}) = 0$. □

Soit $\mathcal{B}$ une base de V^n et $x \in \mathcal{B}$. Alors, par le lemme précédent,

$$\alpha(x) = \tau_{n-1}\partial_{n-1}^{[\,]}(x) + (\tau_{n-1} \smile \tau_{n-1})(x)$$

est dans $Z_*(\overline{A})$. Il s'écrit donc $\alpha(x) = -t_1(y)$ modulo $B_*(\overline{A})$. Posons $\delta_n(x) = y$. La relation :

$$t_1\delta_n(x) + \tau_{n-1}\partial_{n-1}^{[\,]}(x) + (\tau_{n-1} \smile \tau_{n-1})(x) = 0$$

est donc vérifiée modulo $B_*(\overline{A})$. Il existe alors un élément qu'on notera $t_n(x)$ dans $\overline{A}$, et qu'on peut prendre dans S, tel que :

$$\partial\tau_{n-1}(x) + \tau_{n-1}\partial_{n-1}^{[\,]}(x) + \partial t_n(x) + t_1\delta_n(x) + (\tau_{n-1} \smile \tau_{n-1})(x) = 0$$

On a donc construit δ_n et t_n satisfaisant (P_n) et tels que $\mathrm{Im}(\tau_n) \subset S$. Posons :

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i=1}^{\infty} t_i \\ \partial &= \sum_{i=2}^{\infty} \delta_i \end{aligned}$$

L'ensemble des relations (P_n) prouve que :

$$\partial t + t\partial^{[\,]} + t \smile t = 0$$

Pour prouver que $(\partial^{[\,]})^2 = 0$, considérons l'injection :

$$V = P(\Theta(V)) \xrightarrow{j} \Theta(V)$$

Alors la flèche composée :

$$V \xrightarrow{j} \Theta(V) \xrightarrow{t} A$$

est injective, car égale à t_1. j admet donc une rétraction r, telle que $\mathrm{Ker}(t) \subset \mathrm{Ker}(r)$. r se prolonge en un morphisme de DGA-coalgèbres :

$$\overline{r} : \Theta(V) \longrightarrow \Theta(V)$$

Or, $P(\overline{r}) = rj = 1_V$, et $\overline{r}$ est un isomorphisme. On peut donc voir $\Theta(V)$ comme la coalgèbre tensorielle $\Theta(\overline{r}^{-1}(V))$. Pour prouver que $(\partial^{[\ ]})^2 = 0$, il suffit alors de prouver que $r(\partial^{[\ ]})^2 = 0$, ou encore que $t(\partial^{[\ ]})^2 = 0$. Cette dernière égalité résulte d'un calcul semblable à celui fait dans la démonstration de (5.5).

Pour montrer enfin que $\mathcal{N} \otimes_t A$ est acyclique, on considère le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & A & \\ \mathcal{N} \arrow[ur, "t"] \arrow[rr, "\Psi"'] & & B(A) \arrow[ul, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

et il suffit de prouver que Ψ induit un isomorphisme en homologie. Mais $\mathcal{N}$ est libre, et :

$$P(\Psi) : P(\mathcal{N}) = \uparrow H_*(\overline{A}) \longrightarrow P(B(A)) = \uparrow\overline{A}$$

est, aux désuspensions près, la sélection de cycles ξ qui induit un isomorphisme en homologie. Le résultat est donc une conséquence de (3.25). □

5.4 Le théorème de Kadeishvili.

On peut évidemment traduire([3]) le théorème (5.4) en termes de A_∞-structures. On retrouve ainsi le théorème de Kadeishvili :

(5.11) **Théorème** : *(Kadeishvili* [19]*) On suppose que Λ est un corps. Soit A une A_∞-algèbre connexe (resp. C une A_∞-coalgèbre simplement connexe). Alors il existe sur $H_*(A)$ (resp. $H_*(C)$) une structure de A_∞-algèbre (resp. A_∞-coalgèbre), et une A_∞-équivalence $H_*(A) \Vvdash\!\longrightarrow A$ (resp. $C \Vvdash\!\longrightarrow H_*(C)$). De plus, cette structure est unique à A_∞-isomorphisme près.* □

La composante de longueur 2 de cette A_∞-structure est bien sûr le produit (resp. coproduit) induit sur l'homologie (quand on part d'une DGA-structure). On a ainsi enrichi la structure multiplicative (resp. comultiplicative) de l'homologie.

(5.12) **Théorème** : *Soit G un groupe simplicial connexe. $C_*(G)$ est une DGA-algèbre, et $H_*(G)$ reçoit une structure de A_∞-algèbre (théorème (5.11)). Soit C une DGA-coalgèbre simplement connexe, et $t : C \longrightarrow H_*(G)$ une β-cochaîne telle que $C \otimes_t H_*(G)$ soit acyclique. Alors C est quasi-isomorphe à la DGA-coalgèbre $C_*(W(G))$ ($W(G)$ est défini au début du chapitre 2).*

En effet, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} H_*(G) \arrow[r, "\Phi"] & C_*(G) & \\ C \arrow[u, "t"] \arrow[ur, "\Phi t"] \arrow[r, "\Psi"'] & BC_*(G) \arrow[u, "\beta"'] & C_*(W(G)) \arrow[l, "\Psi'"] \end{tikzcd}$$

où Ψ' est donné par le théorème (2.27), où Φt est le composé de la A_∞-équivalence Φ et de la β-cochaîne t (définition (3.21)), et où Ψ est dû à la finalité de β. Alors, Ψ et Ψ' induisent des isomorphismes en homologie. □

En particulier, l'homologie du classifiant $W(G)$ est celle de $BH_*(G)$, où la bar-construction est bien sûr celle de la A_∞-structure de $H_*(G)$ (définition (3.13)).

(5.13) **Théorème** : *Soit X un ensemble simplicial* 1*-réduit. $C_*(X)$ est une DGA-coalgèbre, et $H_*(X)$ reçoit une structure de A_∞-coalgèbre (théorème (5.11)). Soit A une DGA-algèbre connexe, et t :*

3. Il paraît que ce n'est pas si évident. Voir l'appendice A pour des détails. (Cette note figurait dans l'original, de même que l'appendice A.)

$H_*(X) \longrightarrow A$ une γ-cochaîne telle que $H_*(X) \otimes_t A$ soit acyclique. Alors A est quasi-isomorphe à la DGA-algèbre $C_*(G(X))$, où $G(X)$ est le groupe des lacets (construction de Kan, chapitre 2) de X.

On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A & C_*(X) \arrow[l, "\Phi"'] \arrow[r, "\Phi'"] & C_*(G(X)) \\
H_*(X) \arrow[u, "t"] & C_*(X) \arrow[l, "\Psi"] \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[ul, "t\Psi"']
\end{tikzcd}$$

où Φ' est donné par (2.26). On raisonne comme précédemment. $\square$

En particulier, l'homologie de $G(X)$ est celle de $\Omega H_*(X)$, où la cobar-construction est celle de la A_∞-structure de $H_*(X)$ (définition (3.13)).

5.5 Une formule de Künneth tordue.

(5.14) **Théorème** : *Soit $G \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} X$ une fibration principale où X est simplement connexe. Supposons que la DGA-algèbre $H_*(G)$ soit quasi-isomorphe à $C_*(G)$. Alors il existe une γ-cochaîne $t : H_*(X) \longrightarrow H_*(G)$ (où $H_*(X)$ reçoit la A_∞-structure de Kadeishvili du théorème (5.11)), telle que :*

$$H_*(E) \simeq H_*(H_*(X) \otimes_t H_*(G)) \qquad \textit{(formule de Künneth tordue)}$$

Autrement-dit, l'homologie de E peut être obtenue en calculant l'homologie du γ-produit $H_*(X) \otimes_t H_*(G)$.

On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H_*(G) & & A \arrow[ll, "\Phi'"'] \arrow[r, "\Phi"] & C_*(G) \\
& H_*(X) \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "t''"] \arrow[urr, "t'\Psi"'] \arrow[rr, "\Psi"'] & & C_*(X) \arrow[u, "t'"']
\end{tikzcd}$$

où Φ et Φ' induisent des isomorphismes en homologie. t' est donné par le théorème de Brown (2.5). On compose t' avec la A_∞-équivalence Ψ (3.2), puis on relève ce composé en une γ-cochaîne t'' (4.18), qu'on compose avec Φ'. Les morphismes de DGA-modules :

$$H_*(X) \otimes_t H_*(G) \xleftarrow{1 \otimes \Phi} H_*(X) \otimes_{t''} A \xrightarrow{1 \otimes \Phi} H_*(X) \otimes_{t'\Psi} C_*(G) \xrightarrow{\Psi \otimes_{t'} 1} C_*(X) \otimes_{t'} C_*(G)$$

induisent des isomorphismes en homologie. Le morphisme $\Psi \otimes_{t'} 1$ est défini par (3.23) et induit sur le terme E^2 des suites spectrales standard, la flèche $\Psi_* \otimes 1$ qui est un isomorphisme. $\square$

On se trouve dans la situation du théorème précédent avec les fibrations de fibre $K(\mathbb{Z}/p, n)$. En effet, nous avons vu dans la démonstration de (2.58), qu'on a une construction acyclique de base $H_*(n+1)$ et de fibre $H_*(n)$ ($n \geq 0$, où $H_*(n) = H_*(K(\mathbb{Z}/p, n); \mathbb{Z}/p)$). Il en résulte d'après (2.38) un morphisme de DGA-algèbres :

$$H_*(n) \longrightarrow C_*(n)$$

(où $C_*(n) = C_*(K(\mathbb{Z}/p, n); \mathbb{Z}/p)$), induisant un isomorphisme en homologie.

On a l'analogue suivant de (5.14).

(5.15) **Théorème** : *Soit $G \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} X$ une fibration principale, où G est connexe et X simplement connexe, et supposons que la DGA-coalgèbre $H_*(X)$ soit quasi-isomorphe à $C_*(X)$. Alors il existe une β-cochaîne $t : H_*(X) \longrightarrow H_*(G)$ telle que le β-produit $H_*(X) \otimes_t H_*(G)$ ait l'homologie de E.*

Chapitre 6

Le modèle minimal de $K(\mathbb{Z}/p, n)$.

Il y a en fait deux modèles minimaux à envisager, car $C_*(n)$ est à la fois une DGA-algèbre et une DGA-coalgèbre. Dans la suite, nous nous référerons à la structure de A_∞-algèbre ou coalgèbre du théorème (5.11) comme à la « structure de Kadeishvili » multiplicative ou comultiplicative.

6.1 Les petites constructions de Cartan sont des γ-produits.

(6.1) **Théorème** : *La structure de Kadeishvili multiplicative de $H_*(n)$ ($n \geq 1$) se réduit à sa structure de DGA-algèbre.*

En effet, on a vu qu'il existe un morphisme de DGA-algèbres :

$$H_*(n) \longrightarrow C_*(n)$$

induisant un isomorphisme en homologie. Ceci peut bien sûr se voir comme une A_∞-équivalence entre $H_*(n)$ et $C_*(n)$. $\square$

(6.2) **Théorème** : *Pour $p = 2$, la structure de Kadeishvili comultiplicative de $H_*(n)$ ($n \geq 2$) se réduit à sa structure de DGA-coalgèbre.*

Ceci résulte immédiatement de (5.12) si on prouve que la construction multiplicative acyclique $H_*(n+1) \otimes_\theta H_*(n)$ construite en (2.58) est un produit tensoriel tordu ordinaire. Or ceci résulte du fait que pour $p = 2$, cette construction est un produit tensoriel infini de constructions du type (2.47), qui sont des produits tensoriels tordus ordinaires. $\square$

Par contre, pour p premier impair, interviennent les constructions du type (2.49), qui ne sont pas des produits tensoriels tordus ordinaires.

(6.3) **Théorème** : *La construction (2.49) est un γ-produit.*

Pour le prouver, nous allons exhiber une structure de A_∞-coalgèbre sur $\Gamma(z, 2pq+2) \otimes E(y, 2q+1)$, et une γ-cochaîne :

$$\zeta : \Gamma(z, 2pq+2) \otimes E(y, 2q+1) \longrightarrow Q_p(x, 2q)$$

Posons $\Gamma(z, 2pq+2) = \Gamma(z)$, $E(y, 2q+1) = E(y)$ et $Q_p(x, 2q) = Q(x)$. Comme $\mathbb{Z}/p$-espace vectoriel, $\Gamma(z) \otimes E(y)$ admet pour base les éléments :

$$\begin{array}{ccccc} y & zy & \gamma_2(z)y & \gamma_3(z)y & \dots \\ 1 & z & \gamma_2(z) & \gamma_3(z) & \dots \end{array}$$

On définit sur $\Gamma(z) \otimes E(y)$ des opérateurs Δ_n en posant :

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= 0 \qquad \text{si } n \neq 2 \text{ et } n \neq p \\
\Delta_2(\gamma_j(z)y^i) &= \sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} \gamma_l(z)y^k \otimes \gamma_{j-l}(z)y^{i-k} \\
\Delta_p(\gamma_j(z)y^i) &= \sum_{k_1+\cdots+k_p=j-1} \gamma_{k_1}(z)y^{i+1} \otimes \cdots \otimes \gamma_{k_p}(z)y^{i+1}
\end{aligned}$$

Comme $y^2 = 0$, seuls les cas $i = 0$ et $i = 1$ sont signifiants dans les formules ci-dessus. Noter que Δ_p ainsi défini est bien de degré $p - 2$. Remarquer également que Δ_2 fait de $\Gamma(z) \otimes E(y)$ une coalgèbre qui est simplement le coproduit des coalgèbres $\Gamma(z)$ et $E(y)$, puisque :

$$\begin{aligned}
D(y^i) &= \sum_{k=0}^{i} y^k \otimes y^{i-k} \\
D(\gamma_j(z)) &= \sum_{\lambda=0}^{j} \gamma_\lambda(z) \otimes \gamma_{j-\lambda}(z)
\end{aligned}$$

Notons (R_n) la relation de la définition (3.2). Comme Δ_2 est associatif et $\Delta_1 = 0$, (R_3) est vérifiée. Comme seuls Δ_2 et Δ_p sont non nuls, les seules relations restant à vérifier sont (R_{p+1}) et (R_{2p-1}). (R_{p+1}) se réduit à :

$$\sum_{\lambda=0}^{p-1}(-1)^\lambda(1^{p-\lambda-1} \otimes \Delta_2 \otimes 1^\lambda)\Delta_p - (\Delta_p \otimes 1 + 1 \otimes \Delta_p)\Delta_2 = 0$$

Or,

$$\begin{aligned}
(1^{p-\lambda-1} \otimes \Delta_2 \otimes 1^\lambda)\Delta_p(\gamma_j(z)) &= \sum_{k_1+\cdots+k_p=j-1} (1^{p-\lambda-1} \otimes \Delta_2 \otimes 1^\lambda)(\gamma_{k_1}(z)y \otimes \cdots \otimes \gamma_{k_p}(z)y) \\
&= \sum_{k_1+\cdots+k_p=j-1} (\gamma_{k_1}(z)y \otimes \cdots \otimes \Delta_2(\gamma_{k_{p-\lambda}}(z)y) \otimes \cdots \otimes \gamma_{k_p}(z)y)
\end{aligned}$$

Donc le premier bloc de (R_{p+1}) s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\lambda=0}^{p-1} \sum_{k_1+\cdots+k_p=j-1} \sum_{l=0}^{k_{p-\lambda}} (-1)^\lambda \gamma_{k_1}(z)y \otimes \cdots \otimes \gamma_l(z)y \otimes \gamma_{k_{p-\lambda}-l}(z) \otimes \cdots \otimes \gamma_{k_p}(z)y \\
&\quad + \sum_{\lambda=0}^{p-1} \sum_{k_1+\cdots+k_p=j-1} \sum_{l=0}^{k_{p-\lambda}} (-1)^\lambda \gamma_{k_1}(z)y \otimes \cdots \otimes \gamma_l(z) \otimes \gamma_{k_{p-\lambda}-l}(z)y \otimes \cdots \otimes \gamma_{k_p}(z)y
\end{aligned}$$

Remarquer que tous ces tenseurs sont de longueur $p + 1$, et que sur tous les facteurs d'un tenseur, un seul ne contient pas la lettre y. Par ailleurs, les indices des γ d'un même tenseur forment une partition de $j - 1$ en $p + 1$ nombres positifs ou nuls. La première triple somme de cette expression s'écrit donc encore :

$$\sum_{\lambda=0}^{p-1} \sum_{k_1+\cdots+k_{p+1}=j-1} (-1)^\lambda \gamma_{k_1}(z)y \otimes \cdots \otimes \gamma_{k_{p-\lambda}+1}(z) \otimes \cdots \otimes \gamma_{k_p}(z)y$$

de même que la deuxième s'écrit :

$$\sum_{\lambda=0}^{p-1} \sum_{k_1+\cdots+k_{p+1}=j-1} (-1)^\lambda \gamma_{k_1}(z)y \otimes \cdots \otimes \gamma_{k_{p-\lambda}}(z) \otimes \cdots \otimes \gamma_{k_p}(z)y$$

On voit donc que la plupart des termes se tuent entre eux, et il ne reste que :

$$\begin{aligned}&\sum_{k_1+\cdots+k_{p+1}=j-1}\gamma_{k_1}(z)y\otimes\cdots\otimes\gamma_{k_p}(z)y\otimes\gamma_{k_{p+1}}(z)\\&\quad+\sum_{k_1+\cdots+k_{p+1}=j-1}\gamma_{k_1}(z)\otimes\gamma_{k_2}(z)y\otimes\cdots\otimes\gamma_{k_{p+1}}(z)y\end{aligned}$$

Nous calculons maintenant le deuxième bloc de (R_{p+1}) :

$$\begin{aligned}(\Delta_p\otimes 1+1\otimes\Delta_p)\Delta_2(\gamma_j(z)) &= \sum_{l=0}^{j}(\Delta_p\otimes 1+1\otimes\Delta_p)(\gamma_l(z)\otimes\gamma_{j-l}(z))\\&= \sum_{l=0}^{j}\sum_{k_1+\cdots+k_p=l-1}\gamma_{k_1}(z)y\otimes\cdots\otimes\gamma_{k_p}(z)y\otimes\gamma_{j-l}(z)\\&\quad+\sum_{l=0}^{j}\sum_{k_1+\cdots+k_p=j-l-1}\gamma_l(z)\otimes\gamma_{k_1}(z)y\otimes\cdots\otimes\gamma_{k_p}(z)y\end{aligned}$$

ce qui prouve que (R_{p+1}) est vérifiée sur les éléments de la forme $\gamma_j(z)$. Nous la vérifons maintenant sur les $\gamma_j(z)y$:

$$\begin{aligned}(\Delta_p\otimes 1+1\otimes\Delta_p)\Delta_2(\gamma_j(z)y) &= \sum_{l=0}^{j}(\Delta_p\otimes 1+1\otimes\Delta_p)(\gamma_l(z)y\otimes\gamma_{j-l}(z)+\gamma_l(z)\otimes\gamma_{j-l}(z)y)\\&= -\sum_{l=0}^{j}\gamma_l(z)y\otimes\Delta_p(\gamma_{j-l}(z))+\sum_{l=0}^{j}\Delta_p(\gamma_l(z))\otimes\gamma_{j-l}(z)y\\&= -\sum_{l=0}^{j}\sum_{k_1+\cdots+k_p=j-l-1}\gamma_l(z)y\otimes\gamma_{k_1}(z)y\otimes\cdots\otimes\gamma_{k_p}(z)y\\&\quad+\sum_{l=0}^{j}\sum_{k_1+\cdots+k_p=l-1}\gamma_{k_1}(z)y\otimes\cdots\otimes\gamma_{k_p}(z)y\otimes\gamma_{j-l}(z)y\\&= 0\end{aligned}$$

ce qui achève de prouver (R_{p+1}). Par ailleurs,

$$\begin{aligned}&\sum_{\lambda=0}^{p-1}(1^{p-\lambda-1}\otimes\Delta_p\otimes 1^{\lambda})\Delta_p(\gamma_j(z))\\&\quad=\sum_{\lambda=0}^{p-1}\sum_{k_1+\cdots+k_p=j-1}(1^{p-\lambda-1}\otimes\Delta_p\otimes 1^{\lambda})(\gamma_{k_1}(z)y\otimes\cdots\otimes\gamma_{k_p}(z)y)=0\end{aligned}$$

ce qui prouve (R_{2p-1}). Nous définissons maintenant la γ-cochaîne :

$$\zeta:\Gamma(z)\otimes E(y)\longrightarrow Q(x)$$

par $\zeta(y)=x$ et $\zeta=0$ sur tous les autres vecteurs de base. Il s'agit de vérifier que :

$$\partial\zeta+\sum_{i=0}^{\infty}\mu^{(i)}\zeta^i\Delta_i=0$$

ce qui dans le cas présent se réduit à :

$$\mu\zeta^2\Delta_2+\mu^{(p)}\zeta^p\Delta_p=0$$

Or,

$$\mu\zeta^2\Delta_2(\gamma_j(z)) = \mu\zeta^2(\sum_{l=0}^{j}\gamma_l(z)\otimes\gamma_{j-l}(z)) = 0$$
$$\mu^{(p)}\zeta^p\Delta_p(\gamma_j(z)) = \mu^{(p)}\zeta^p(\sum\gamma_{k_1}(z)y\otimes\cdots\otimes\gamma_{k_p}(z)y)$$

Le seul terme éventuellement non nul dans cette expression est celui pour lequel $k_1 = \cdots = k_p = 0$, donc $j = 1$, et on a alors :

$$\begin{aligned}\mu^{(p)}\zeta^p\Delta_p(z) &= \mu^{(p)}\zeta^p(y\otimes\cdots\otimes y)\\ &= \pm\mu^{(p)}(x\otimes\cdots\otimes x)\\ &= \pm x^p = 0\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\mu\zeta^2\Delta_2(\gamma_j(z)y) &= 0\\ \mu^{(p)}\zeta^p\Delta_p(\gamma_j(z)y) &= 0\end{aligned}$$

Nous avons donc le γ-produit :

$$(\Gamma(z)\otimes E(y))\otimes_\zeta Q(x)$$

Il reste à voir qu'il est identique à la construction (2.49). En fait, il y a une petite différence de signe pour certaines valeurs de p, mais ceci est sans importance, puisque ce nous importe surtout est que le γ-produit ci-dessus soit acyclique. Dans la construction (2.49), on a :

$$\begin{aligned}\partial_\theta(\gamma_j(z)) &= \gamma_{j-1}(z)\otimes x^{p-1}\\ \partial_\theta(\gamma_j(z)y) &= \gamma_j(z)\otimes x\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\partial_\zeta(\gamma_j(z)) &= (1\otimes\mu)(1\otimes\zeta\otimes 1)(\Delta_2\otimes 1)(\gamma_j(z)\otimes 1)\\ &\quad +(1\otimes\mu^{(p)})(1\otimes\zeta^p\otimes 1)(\Delta_p\otimes 1)(\gamma_j(z)\otimes 1)\\ &= \sum_{l=0}^{j}\gamma_l(z)\otimes\zeta(\gamma_{j-l}(z)) + \sum_{k_1+\cdots+k_p=j-1}\pm\gamma_{k_1}(z)y\otimes\zeta(\gamma_{k_2}(z)y)\ldots\zeta(\gamma_{k_p}(z)y)\\ &= (-1)^{\frac{(p-2)(p-1)}{2}}\gamma_{j-1}(z)y\otimes x^{p-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_\zeta(\gamma_j(z)y) &= (1\otimes\mu)(1\otimes\zeta\otimes 1)(\Delta_2\otimes 1)(\gamma_j(z)y\otimes 1)\\ &\quad +(1\otimes\mu^{(p)})(1\otimes\zeta^p\otimes 1)(\Delta_p\otimes 1)(\gamma_j(z)y\otimes 1)\\ &= (1\otimes\mu)(1\otimes\zeta\otimes 1)(\gamma_j(z)\otimes y\otimes 1)\\ &= \gamma_j(z)\otimes x\end{aligned}$$

6.2 Épilogue et problèmes ouverts.

Le calcul précédent de la structure de Kadeishvili comultiplicative de $H_*(K(\mathbb{Z}/p, n); \mathbb{Z}/p)$ pour p premier impair s'arrête ici pour les raisons expliquées dans l'introduction. Il faudrait en effet pour continuer être capable d'effectuer un produit tensoriel de γ-produits, et en particulier un produit tensoriel (d'ailleurs infini) de A_∞-coalgèbres.

Bibliographie

[1] **J.F. Adams** *On the cobar-construction.* Proc. Nat. Acad. Sci. 42 (1956) 409-412

[2] **J.F. Adams, P.J. Hilton** *On the chain algebra of a loop space.* Comm. Math. Helv. 30 (1956) 309-330

[3] **H.J. Baues** *Geometry of loop spaces and the cobar-construction.* Memoirs Amer. Math. Soc. 25, 230, (1980).

[4] **H.J. Baues** *The double bar and cobar-constructions.* Compositio Mathematica 43, 3, (1981), 331-341.

[5] **H.J. Baues, J.M. Lemaire** *Minimal models in homotopy theory.* Math. Ann. 225 (1977), 219-242.

[6] **E.H. Brown Jr.** *Twisted tensor products I.* Ann. Math. 69, 1, (1959), 223-246.

[7] **R. Brown** *The twisted Eilenberg-Zilber theorem.* Celebrazioni Archimedee del Secolo XX. Simposio di topologia (1964).

[8] **H. Cartan** *Séminaire 1954-55.* E.N.S. Ulm Paris et Œuvres III. Springer Verlag 1979, p. 1309-1394.

[9] **W.H. Cockcroft** *The cohomology groups of a fiber space with fiber a $K(\pi, n)$.* T.A.M.S. 91 (1959), 505-524.

[10] **B. Drachman** *A note on principal constructions.* Duke. Math. J. 39 (1972), 701-710.

[11] **B. Drachman** *A diagonal for the cobar-construction.* Bol. Soc. Math. Mex. (2) 12 (1967), 81-91.

[12] **E. Friedlander, P.A. Griffiths, J. Morgan** *Homotopy theory and differential forms.* Seminario di geometria 1972, Firenze.

[13] **P.P. Grivel** *Sur les fibrés principaux associés aux fibrés algébriques.* Preprint (1981) Université de Genève.

[14] **V.K.A.M. Guggenheim** *On the chain complex of a fibration.* Ill. J. Math. 16 (3) (1972) 398-414.

[15] **V.K.A.M. Guggenheim** *On the perturbation theory for the homology of the loop space.* J. Pure. App. Alg. 25 (1982) 197-205.

[16] **V.K.A.M. Guggenheim, H.J. Munkholm** *On the extended fonctoriality of Tor and Cotor.* J. Pure App. Alg.4 (1974) 9-29.

[17] **J. Huebschmann** *Perturbation theory and small models for the chain complex of certain induced fibre spaces.* Thèse. Eidelberg 1983.

[18] **D. Husemoller, J.C.Moore, J.D. Stasheff** *Differential homological algebra and homogeneous spaces.* J. Pure. App. Alg. 5 (1974), 113-185.

[19] **T.V. Kadeishvili** *On the homology theory of fibre spaces.* Russian Math. Surveys 35, 3, (1980) 231-238.

[20] **D. Kraines** *Massey higher products.* T.A.M.S. 124, 3, (1966) 431-449.

[21] **J.P. May** *Simplicial objects in algebraic topology.* Von Nostrand (1967).

[22] **J.W. Milnor, J.C.Moore** *On the structure of Hopf algebras.* Ann. Math. 81 (1965), 211-264.

[23] **J.C. Moore** *On the homology of $K(\pi, n)$.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 43 (1957).

[24] **H.J. Munkholm** *The Eilenberg-Moore spectral sequence and strongly homotopy multiplicative maps.* J. Pure App. Alg. 5 (1974), 1-50.

[25] **H.J. Munkholm** *SHM maps of differential algebras I : A characterization up to homotopy.* J. Pure App. Alg. 9 (1976), 39-46.

[26] **H.J. Munkholm** *SHM maps of differential algebras II : Application to spaces with polynomial cohomology.* J. Pure App. Alg. 9 (1976), 47-63.

[27] **A. Prouté** *Sur la transformation d'Eilenberg-Mac Lane.* C.R.A.S. Paris 297 I (1983), 193-194.

[28] **A. Prouté** *Sur la diagonale d'Alexander-Whitney.* C.R.A.S. Paris 299 I 9 (1984), 391-392.

[29] **A. Prouté** *Une formule de Künneth tordue.* Manuscript 1981.

[30] **A. Prouté** *Un contre-exemple à la géométricité du shuffle-coproduit de la cobar-construction.* C.R.A.S. Paris 298 I 2 (1984), 31-34.

[31] **V.A. Smirnov** *Homology of twisted tensor products.* Soviet. Math. Dokl. 16 3 (1975).

[32] **V.A. Smirnov** *Homology of fiber spaces.* Russian Math. Surveys 35 3 (1980) 294-298.

[33] **J.D. Stasheff** *Homotopy associativity of H-spaces II.* T.A.M.S. 108 2 (1963), 293-312.

Annexe A

Index

Annexe B

Notations

Appendice A

Soit A une A_∞-algèbre connexe, $B(A)$ sa bar-construction (définition (3.13)). Alors $B(A)$ est une DGA-coalgèbre libre et simplement connexe. Il existe donc par (5.4) un modèle minimal de Baues-Lemaire :

$$B(A) \longrightarrow \mathcal{N}$$

Comme $\mathcal{N}$ est libre comme coalgèbre, $\mathcal{N} = \Theta(A_1)$, et $\mathcal{N}$ peut être vu comme la bar-construction d'une structure de A_∞-algèbre sur $A_1^\bullet = A_1 \oplus \Lambda$, ceci parce que la bar-construction est un isomorphisme de catégories des A_∞-algèbres connexes vers les DGA-coalgèbres libres simplement connexes. C'est une conséquence facile des définitions (3.1), (3.13) et du lemme (3.10). De plus, la flèche $B(A) \longrightarrow B(A_1^\bullet)$ se voit comme un A_∞-morphisme $A \Vvdash\!\!\longrightarrow A_1^\bullet$, comme il résulte de (3.3) et (3.12).
Maintenant, le théorème (3.25) montre que ce morphisme induit un isomorphisme en homologie, et la différentielle de $A_1^\bullet$ est nulle, car elle provient de la composante linéaire de celle de $\mathcal{N}$ qui est nulle par minimalité. Donc $A_1^\bullet = H_*(A)$, ce qui montre le théorème de Kadeishvili.
Remarquer qu'à cause de (4.27), on a aussi bien une flèche A_∞ :

$$H_*(A) \Vvdash\!\!\longrightarrow A$$

qui, via la bar-construction, correspond à la flèche fournie par (4.25).

Appendice B

Il est clair que si une DGA-algèbre A est formelle (i.e. si on a un quasi-isomorphisme entre A et son algèbre d'homologie, alors la structure de Kadeishvili de $H_*(A)$ se réduit à sa structure de DGA-algèbre. La réciproque est-elle vraie ?

Elle est vraie pour une DGA-algèbre connexe. En effet, par le théorème (5.11), on a un A_∞-morphisme :

$$f : A \Rrightarrow H_*(A)$$

induisant un isomorphisme en homologie. Le résultat est alors une conséquence du fait général suivant :

Lemme : *Soit $f : A \Rrightarrow A'$ un A_∞-morphisme induisant un isomorphisme en homologie, où A et A' sont deux DGA-algèbres connexes. Alors, A et A' sont quasi-isomorphes, c'est-à-dire qu'il existe une autre DGA-algèbre A'' et des morphismes de DGA-algèbres :*

$$A \longleftarrow A'' \longrightarrow A'$$

induisant des isomorphismes en homologie.

Posons $A'' = \Omega(B(A))$. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, Rrightarrow, "f"] & & A' \\
& B(A) \arrow[ul, "\beta"'] \arrow[ur, "t"] \arrow[d, "\gamma"] & \\
& \Omega(B(A)) \arrow[uul, "\Phi"] \arrow[uur, "\Psi"'] &
\end{tikzcd}$$

où Φ est le même que dans (2.12), et t est la composition $f \circ \beta$, qui est définie en (3.21), donnée explicitement par (3.22). Comme A' est une DGA-algèbre, t une cochaîne de Brown ordinaire (définition (1.41)), et comme on a Ψ par universalité de γ, comme $B(A)$ est simplement connexe, et que :

$$B(A) \otimes_\beta A, \qquad B(A) \otimes_\gamma \Omega(B(A)), \qquad B(A) \otimes_t A'$$

sont acycliques (pour le dernier à cuase de (3.25) *i)* $\Rightarrow$ *iii)*), on voit que par (2.8) *ii)*, appliqué à $1 \otimes \Psi$, Ψ est un quasi-isomorphisme. Φ et Ψ sont donc les deux flèches cherchées.