ISSN 1364-0380 (on line) 1465-3060 (printed)

Geometry & Topology
Volume 9 (2005) 2193–2226
Published: 1 December 2005

Constructions contrôlées de champs de Reeb et applications

Vincent Colin
Ko Honda

Université de Nantes, UMR 6629 du CNRS, 44322 Nantes, France
University of Southern California, Los Angeles, CA 90089, USA

Email: `Vincent.Colin@math.univ-nantes.fr` and `khonda@math.usc.edu`

URL: `http://rcf.usc.edu/~khonda`

Abstract

On every compact, orientable, irreducible 3–manifold V which is toroidal or has torus boundary components we construct a contact 1–form whose Reeb vector field R does not have any contractible periodic orbits and is tangent to the boundary. Moreover, if ∂V is nonempty, then the Reeb vector field R is transverse to a taut foliation. By appealing to results of Hofer, Wysocki, and Zehnder, we show that, under certain conditions, the 3–manifold obtained by Dehn filling along ∂V is irreducible and different from the 3–sphere.

Résumé

On construit, sur toute variété V de dimension trois orientable, compacte, irréductible, bordée par des tores ou toroïdale, une forme de contact dont le champ de Reeb R est sans orbite périodique contractible et tangent au bord. De plus, si ∂V est non vide, le champ R est transversal à un feuilletage tendu. En utilisant des résultats de Hofer, Wysocki et Zehnder, on obtient sous certaines conditions que la variété obtenue par obturation de Dehn le long du bord de V est irréductible et différente de la sphère S^3.

AMS Classification numbers Primary: 53D35

Secondary: 53C15

Keywords: Reeb vector field, contact structure, taut foliation

Proposed: Yasha Eliashberg   Received: 25 November 2004
Seconded: Tomasz Mrowka, Joan Birman   Revised: 4 September 2005

1 Introduction

La topologie de contact a connu ces dernières années des évolutions spectaculaires. L'objet de ce texte est de conforter les liens qui la relient à la topologie de dimension trois.

Plus précisemment, on inaugure l'étude des structures de contact *hypertendues*, dans une tentative de rapprocher deux facettes de la géométrie de contact: la dynamique et la théorie des feuilletages.

On se place sur une variété de dimension trois.

Une structure de contact dont un champ de Reeb est sans orbite périodique contractible sera dite *hypertendue*. Lorsqu'on veut préciser le champ de Reeb, on parle de forme de contact hypertendue. Toute structure de contact hypertendue est tendue d'après le théorème fondamental de H Hofer, K Wysocki et E Zehnder:

Théorème 1.1 [24, 26, 27]

(a) *Si R est un champ de Reeb sans orbite périodique contractible sur une variété de contact (V,ξ) close de dimension trois, alors V est irréductible et ξ est tendue.*

(b) *Tout champ de Reeb R sur la sphère S^3 possède une orbite périodique non nouée. De plus, si le champ R est non dégénéré, il existe une orbite périodique qui borde un disque plongé dont l'intérieur est transversal à R. Cette propriété est également vérifiée pour les formes de contact vrillées génériques sur les sphères d'homologie.*

On peut lire la partie (b) de ce résultat à l'envers: si R est un champ de Reeb générique sur V dont aucune orbite périodique contractible ne borde de disque immergé D, d'intérieur transversal à R, alors le revêtement universel de V n'est pas S^3.

Ajouté au critère d'irréductibilité, on peut faire la conjecture suivante:

Conjecture 1.2 *Si V porte une forme de contact hypertendue, alors le revêtement universel de V est $\mathbb{R}^3$.*

Au regard des travaux récents de Perelman [35, 36, 37], la Conjecture 1.2 pourrait en fait être déjà établie.

Dans ce texte, les structures de contact hypertendues sont appelées à jouer un rôle similaire à celui des feuilletages (de codimension 1) tendus dans les travaux de D Gabai [18, 19, 20]. La définition de structure hypertendue fait en particulier écho à un résultat fondamental de S Novikov [34], qui implique que toute courbe transversale à un feuilletage tendu est non contractible. Y Eliashberg et W Thurston [15] ont par ailleurs montré que toute structure de contact C^0–proche d'un feuilletage tendu est universellement tendue.

Notre travail est aussi motivé par des travaux récents de D Gabai–L Mosher, S Fenley, W Thurston et D Calegari (voir [33, 16, 2, 3, 4, 42]), dans lesquels ces auteurs étudient les flots pseudo-Anosov qui sont transversaux (ou presque transversaux) à un feuilletage tendu. Dans notre situation, l'étude topologique des structures de contact tendues est complétée par l'étude dynamique des champs de Reeb.

Ici, on montre l'existence de structures de contact hypertendues. En comparant notre construction avec celle de Gabai [18], on obtient également un contrôle supplémentaire sur le champ de Reeb: il est transversal à un feuilletage tendu.

Théorème 1.3 *Toute variété V compacte, orientable, irréductible de dimension 3, bordée par une union non vide de tores, porte une forme de contact hypertendue, dont le champ de Reeb est tangent au bord et transversal à un feuilletage tendu $\mathcal{F}$.*

Question 1.4 Sur une variété close et orientable, tout feuilletage de codimension 1 sans feuille compacte est-il transversal à un champ de Reeb?

Plus vraisemblablement, on peut envisager que:

Conjecture 1.5 Toute variété close et orientable qui porte un feuilletage tendu, porte aussi une structure de contact hypertendue.

La preuve du théorème 1.3 repose sur l'existence d'une hiérarchie suturée de V, comme dans [18]. Comme corollaire facile, on obtient:

Corollaire 1.6 *Toute variété close, orientable, irréductible et toroïdale de dimension 3 porte une structure de contact hypertendue.*

On retrouve ainsi un résultat de [7] (voir [30] pour une autre démonstration).

Les champs de Reeb produits par le théorème 1.3 ont une dynamique particulièrement bien contrôlée qui les rend adaptés au calcul de leur *homologie* *de contact* [14]. Ce projet est mené à bien dans un article en préparation du premier auteur avec F Bourgeois [1], qui montre que l'homologie de contact distingue une infinité de structures de contact hypertendues sur toute variété orientable, close, irréductible et toroïdale de dimension trois. (Ce calcul donne une autre preuve du fait, dû à Colin [9] et Honda–Kazez–Matić [30], que les variétés toroïdales portent une infinité de structures de contact tendues.) On démontre ainsi également la conjecture de Weinstein pour presque toutes les structures de contact de torsion non nulle connues sur les variétés toroïdales.

On applique ces idées sur un exemple. Soit S une surface compacte orientable à bord non vide, de caractéristique $\chi(S) < 0$, et V la fibration sur le cercle obtenue par suspension d'un difféomorphisme de S, qui est l'identité près de ∂S. On note $T_1,...,T_n$ les composantes de ∂V. Pour tout $1 \leq j \leq n$, on note $[m_j]$ et $[l_j]$ une base de $H_1(T_j;\mathbb{Z})$, avec $i([m_j],[l_j]) = 1$ (pour l'orientation de T_j comme bord de V), et $[m_j] = [\partial S \cap T_j]$. Si γ est une courbe non contractible dans T_j, sa pente est définie comme p_j/q_j, où $[\gamma] = p_j[l_j] + q_j[m_j]$. En particulier, la pente de $\partial S \cap T_j$ vaut 0. Pour $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \mathbb{Q}^n$, on note V_ε la variété obtenue par obturation de Dehn le long de T_j avec la pente ε_j.

Théorème 1.7 *Si ρ est assez proche de 0 (pas forcément positif), et si pour tout $1 \leq i \leq n$, ε_i est non nul et compris entre 0 et ρ, alors V_ε porte une structure de contact hypertendue (positive ou négative suivant le signe de ρ). La variété V_ε est donc irréductible et différente de S^3.*

En particulier, pour ε proche de 0 et non nul, une ε–chirurgie de Dehn sur un nœud (et même un entrelacs) fibré non trivial de S^3 n'est pas S^3. Cette application peut-être vue comme le pendant, par le biais des structures de contact, de la preuve par D Gabai [19] que la chirugie d'indice 0 sur un nœud non trivial de S^3 ne donne jamais $S^1 \times S^2$. Le théorème 1.7 donne de nombreux exemples de structures hypertendues sur des sphères d'homologie atoroïdales et des variétés hyperboliques.

Pour démontrer que la forme de contact α_ε produite dans le théorème 1.7 est hypertendue, on utilise l'existence d'un feuilletage tendu sur V_ε, construit par R. Roberts dans [38], transversal au champ de Reeb $R_\varepsilon = R_{\alpha_\varepsilon}$. Les conséquences topologiques dues à la présence de ce feuilletage tendu recouvrent celles dues à la présence d'une structure hypertendue: en fait, V_ε est revêtue par $\mathbb{R}^3$.

Une motivation pour utiliser la géométrie de contact vient du fait que, d'après Hofer, Wysocki et Zehnder, la sphère S^3 est complètement caractérisée par les propriétés dynamiques des champs de Reeb qu'elle supporte. Par ailleurs, l'extension de la structure de contact construite sur V dans le théorème 1.3 en une structure "potentiellement" (hyper-)tendue sur V_ε est extrêmement simple, si bien qu'on peut espérer appliquer ces méthodes de contact dans des situations où les feuilletages tendus sont inopérants.

En fait ici, on peut montrer directement, sans recours aux feuilletages, que le champ de Reeb R_ε produit sur V_ε ne possède pas d'orbite périodique qui borde un disque plongé dont l'intérieur est transversal à R_ε. Ceci suffit pour montrer, en utilisant la partie (b) du théorème 1.1, que pour tout $N \in \mathbb{N}$, si ρ est assez proche de 0, la variété V_ε, ainsi que tous ses revêtements de degrés inférieurs à N, sont différents de la sphère S^3. La preuve, si elle est plus satisfaisante pour qui cherche a éliminer les feuilletages et obtenir des conséquences topologiques de l'étude des structures de contact, est cependant assez technique et c'est pourquoi on la reproduit seulement en annexe de ce texte. Il faut donc voir l'utilisation des feuilletages comme un intermédiaire pratique qui permet de révèler une propriété du champ de Reeb. En ce sens, on peut réellement lire l'énoncé 1.7 comme une application topologique de la géométrie de contact. On peut noter que le disque d'intérieur transversal à R et bordé par une orbite périodique fourni par le théorème 1.1 qu'on utilise dans l'annexe est en fait une feuille d'un feuilletage d'énergie finie de S^3 (voir [27]), dont on pourrait tenter d'exploiter l'existence.

Pour en finir avec ces remarques, on note également qu'on peut voir le théorème 1.7 comme un cas très particulier d'une somme de résultats dus à Thurston [43] et à Culler, Gordon, Luecke et Shalen [13]: si V est atoroïdale, elle est hyperbolique, et seules un nombre fini d'obturations ne sont pas hyperboliques et donc non revêtues par $\mathbb{R}^3$. Si V est toroïdale, seules un nombre fini d'obturations ne sont pas toroïdales et donc non revêtues par $\mathbb{R}^3$.

Question 1.8 Peut-on trouver une estimation pour la taille maximale de ρ, comme dans [39]?

La structure $(V, \xi, R, \mathcal{F})$ fournie par le théorème 1.3 – où R est un champ de Reeb transversal à un feuilletage tendu $\mathcal{F}$ – étendue de manière standard à une obturation de Dehn de V comme dans le paragraphe 9, généralise la notion de structure de contact portée par un livre ouvert définie par E Giroux [23], où le feuilletage $\mathcal{F}$ est le feuilletage par les fibres d'une fibration sur le cercle. Elle rappelle également la notion de feuilletage d'énergie finie de Hofer, Wysocki et Zehnder [27].

Remerciements VC remercie le CNRS pour son accueil en délégation au cours de l'année 2003–2004. KH a été subventionné par la bourse DMS-023738 de la NSF et par la bourse Sloan.

2 Sutures et hiérarchies suturées

Une *variété suturée* (V,γ) est la donnée d'une variété à coins (les coins sont modelés sur $(\mathbb{R}_+)^2\times\mathbb{R}$) de dimension 3 compacte et orientée V et d'un ensemble $\gamma\subset\partial V$ constitué d'une collection d'anneaux deux à deux disjoints $A(\gamma)$ et de tores $T(\gamma)$. Les coins de V coïncident avec $\partial A(\gamma)$.

Chaque composante de $R(\gamma)=\partial V\setminus int(\gamma)$ est orientée. On note $R_+(\gamma)$ les composantes de $R(\gamma)$ le long desquelles le vecteur normal direct sort de V et $R_-(\gamma)$ les autres.

Chaque composante de $A(\gamma)$ est appelée *suture annulaire* et contient une *suture*, c'est-à-dire une courbe orientée, fermée simple et homologiquement non triviale dans $A(\gamma)$. On note $s(\gamma)$ l'ensemble des sutures.

Les orientations de $R_+(\gamma)$, $R_-(\gamma)$ et $s(\gamma)$ vérifient la condition de compatibilité suivante: si $\alpha\subset\partial V$ est un arc orienté avec $\partial\alpha\subset R(\gamma)$, qui a une intersection $+1$ avec $s(\gamma)$, alors α débute dans $R_-(\gamma)$ et aboutit dans $R_+(\gamma)$.

On définit à présent le découpage d'une variété suturée (V,γ) en (V',γ') le long d'une surface S. La notation $N(A)$ désigne un petit voisinage tubulaire de A.

Soit S une surface orientée proprement plongée dans V avec les propriétés suivantes:

- $\partial S\pitchfork\gamma$;
- si S intersecte une suture annulaire $A\in A(\gamma)$ le long d'arcs, alors aucun d'eux ne sépare A;
- si S intersecte une suture annulaire A le long de cercles, alors chacun d'eux, muni de l'orientation déduite de celle de S, est homologue à l'âme $s(\gamma)\cap A$;
- aucune composante de S n'est un disque de bord inclus dans $R(\gamma)$;
- aucune composante de ∂S ne borde de disque dans $R(\gamma)$.

On note V' la variété à bord $V\setminus(int(N(S))$ et S'_+ et S'_- les composantes de $\partial N(S)$ dans $\partial V'$, où le vecteur normal direct à S pointe respectivement, à l'extérieur et à l'intérieur de V'.

On pose de plus

$$\begin{aligned}\gamma'&=((\gamma\cap V')\cup N(S'_+\cap R_-(\gamma))\cup N(S'_-\cap R_+(\gamma)))\cap\partial V',\\ R_+(\gamma')&=((R_+(\gamma)\cap V')\cup S'_+)-int(\gamma'),\\ R_-(\gamma')&=((R_-(\gamma)\cap V')\cup S'_-)-int(\gamma').\end{aligned}$$

Une hiérarchie de variétés suturées est une suite de tels découpages

$$(V,\gamma)=(V_0,\gamma_0)\overset{S_0}{\rightsquigarrow}(V_1,\gamma_1)\overset{S_1}{\rightsquigarrow}\dots\overset{S_{n-1}}{\rightsquigarrow}(V_n,\gamma_n)$$

le long de surfaces $S_0,\dots,S_n$, chaque S_i étant π_1–injectée dans V_i, et aboutissant à une union de boules V_n dont les sutures γ_n sur chaque bord sont non vides et connexes (i.e. une collection de $(D^2\times[0,1],\partial D^2\times[0,1])$).

Une variété suturée (V,γ) est *annulaire*, si toutes les composantes de V ont un bord non vide, si toute composante de ∂V contient une suture et si toutes les sutures sont annulaires. Elle est *tendue* si V est irréductible, $R(\gamma)$ est incompressible et minimise la norme de Thurston dans $H_2(V,\gamma;\mathbb{Z})$. Une hiérarchie suturée annulaire

$$(V,\gamma)=(V_0,\gamma_0)\overset{S_0}{\rightsquigarrow}(V_1,\gamma_1)\overset{S_1}{\rightsquigarrow}\dots\overset{S_{n-1}}{\rightsquigarrow}(V_n,\gamma_n)$$

est *bien positionnée* si toute composante de ∂S_i rencontre γ_i le long d'une famille non vide d'arcs.

Théorème 2.1 [18, 29] *Soit (V,γ) une variété suturée annulaire tendue avec $H_2(V,\partial V;\mathbb{Z})\neq 0$. Alors (V,γ) admet une hiérarchie suturée annulaire tendue bien positionnée.*

Pour finir, on dit qu'une variété suturée (V,γ) *porte* un feuilletage $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}$ est défini sur tout V, transversal à γ, et si $R(\gamma)$ est une union de feuilles dont les orientations coïncident avec celles de $\mathcal{F}$.

3 Structures convexes et hiérarchies convexes

La notion de hiérarchie suturée a été adaptée aux variétés de contact par K Honda, W Kazez et G Matić [29, 30]. Une structure convexe sur une variété V compacte orientée de dimension 3 est la donnée dans chaque composante de ∂V d'une collection non vide de courbes orientées. On note Γ la réunion de ces courbes, appelées courbes de séparation. Le complémentaire $R=\partial V-\Gamma$ de Γ dans ∂V est orienté. On note R_+ la partie de R où le vecteur normal à R sort de V et $R_-=R-R_+$. Ces orientations vérifient la même condition de compatibilité que l'âme des sutures: Γ est le bord orienté de l'adhérence de R_+ dans ∂V.

Soit S une surface orientée, proprement plongée dans (V,Γ) et qui vérifie les propriétés suivantes:

- $\partial S \pitchfork \Gamma$;
- aucune composante de S n'est un disque de bord inclus dans $R(\Gamma)$;
- aucune composante de ∂S ne borde de disque dans $R(\Gamma)$.

On définit le découpage (V',Γ') de (V,Γ) le long de S comme:

$$\begin{aligned} V' &= V - N(S), \\ R'_+ &= int((R_+ - N(S)) \cup S_+), \\ \Gamma' &= Fr(R'_+), \\ R'_- &= \partial V' - (R'_+ \cup \Gamma). \end{aligned}$$

Une hiérarchie convexe de (V,Γ) est une suite de découpages convexes le long de surfaces π_1–injectées qui aboutit à une union de boules dont les courbes de découpage sont connexes et non vides.

L'ensemble $s(\gamma)$ d'une variété suturée annulaire définit une structure convexe sur un lissage de la variété V. Réciproquement, un voisinage tubulaire γ des courbes de découpages Γ d'une structure convexe défini une variété suturée après introduction de coins le long de $\partial\gamma$. Une structure convexe est dite *tendue* si la variété suturée associée l'est. Il y a de même une correspondance automatique entre hiérachies suturées et convexes.

Dans ce contexte, le théorème 2.1 a une traduction immédiate.

Théorème 3.1 [29, 30] *Soit (V,Γ) une variété convexe tendue avec $H_2(V,\partial V;\mathbb{Z}) \neq 0$. Alors (V,Γ) admet une hiérarchie convexe tendue bien positionnée, i.e. telle que toute composante de ∂S_i rencontre Γ.*

4 Champs de Reeb

Si ξ est une structure de contact sur une variété V, un champ de Reeb pour ξ est un champ de vecteurs transversal à ξ et dont le flot préserve ξ.

Dans la suite, on suppose que toutes les structures de contact rencontrées sont coorientées. Tout champ de plans coorienté admet une équation globale $\alpha = 0$. On considèrera alors toujours des équations α de ξ compatibles avec sa coorientation, c'est-à-dire positives sur tout vecteur direct. De même, les champs de Reeb considérés seront toujours supposés positivement transversaux à ξ.

Si on fixe une forme de contact α pour ξ, les champs de Reeb R (directs) sont mis en dualité avec les fonctions $h\colon V \to \mathbb{R}_+^*$ strictement positives par les équations:

$$i_R\alpha = h,\ i_R d\alpha|_\xi = -dh|_\xi,$$

qui admettent une unique solution R.

À toute forme de contact α est ainsi associé un champ de Reeb (direct pour la coorientation donnée par α) "naturel", obtenu en prenant $h \equiv 1$. Réciproquement, tout champ de Reeb (direct) pour ξ détermine une unique forme de contact α (positive) à laquelle il est naturellement associé.

La définition de structure convexe est directement inspirée de celle de surface convexe, introduite par E Giroux [22], et qui décrit la position d'une surface dans une variété de contact. Une surface $S \subset (V, \xi)$ est *convexe* s'il existe un champ de vecteurs de contact X transversal à S. Cette propiété est générique. Toute surface convexe se découpe le long d'une multi-courbe $\Gamma_S = \{x \in S | X(x) \in \xi(x)\}$. La sous-variété Γ_S est lisse, transversale à ξ, et donc naturellement orientée par la coorientation de ξ. Elle sépare S en deux régions S^+ et S^-, et son orientation est celle du bord de S^+.

Soient $S \subset (V, \xi)$ une surface (éventuellement à bord) convexe orientée (et donc coorientée) et Γ une courbe de découpage. On rappelle que ξ est supposée coorientée. Un champ de Reeb (direct) R est dit *ajusté* au couple (S, Γ), s'il est transversal à $S - \Gamma$, positivement sur S^+ et négativement sur S^-, et tangent à S le long de Γ, transversal à Γ et rentrant dans S^+. Lorsque R est ajusté à (S, Γ), il existe un voisinage collier $S \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ de $S \simeq S \times \{0\}$ tel que R soit ajusté à $(S \times \{t\}, \Gamma \times \{t\})$ pour tout $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

On convient que si une variété V est orientée, son bord est orienté par la règle: "la normale sortante en premier".

Avec cette convention, dans $\mathbb{R}^3$ muni de ses coordonnées polaires (r, θ, z) et de la structure de contact d'équation $dz - r^2 d\theta = 0$, la sphère unité S, orientée comme bord de la boule, est convexe. Elle est scindée par son équateur $\Gamma_S = \{z = 0\}$. Le champ de Reeb $\frac{\partial}{\partial z}$ pour la forme de contact $dz - r^2 d\theta$ est ajusté au couple (S, Γ_S).

Le lemme suivant se démontre en reprenant des arguments de E Giroux [22].

Lemme 4.1 *Pour toute surface convexe $(S, \Gamma_S) \subset (V, \xi)$, il existe un champ de Reeb ajusté à Γ_S.*

Dans la suite, on montrera le théorème suivant:

Théorème 4.2 *Si (V, Γ) est une variété (connexe) convexe tendue de bord non vide avec $H_2(V, \partial V; \mathbb{Z}) \neq 0$, alors (V, Γ) porte une forme de contact hypertendue dont le champ de Reeb est ajusté au bord.*

Pour rester au plus près des constructions de Gabai, on utilise plutôt la présentation "suturée", même si une étude *via* les structures convexes est possible.

Soit (V,γ) une variété suturée. Une paire (ξ,R) constituée d'une structure de contact ξ sur V et d'un champ de Reeb R de ξ est *adaptée* à (V,γ) si:

- R est transversal à $R_\pm(\gamma)$, positivement à $R_+(\gamma)$ et négativement à $R_-(\gamma)$.
- R est tangent à γ. Les orbites de R, de même que celles de $\xi\gamma$, feuillètent $A(\gamma)=s(\gamma)\times I$ par intervalles $\{pt\}\times I$, et feuillètent chaque composante T de $T(\gamma)$ comme la suspension d'un difféomorphisme de S^1, i.e., le feuilletage donné par R est difféomorphe à celui donné par les feuilles $\{pt\}\times[0,1]$ de $S^1\times[0,1]$ en identifiant $S^1\times\{0\}$ et $S^1\times\{1\}$ par un difféomorphisme. [Ici, $\zeta\Sigma$ désigne le feuilletage caractéristique induit par la structure de contact ζ sur la surface Σ.]
- Toute composante de ∂R_+ est positivement transversale à ξ.

Modèle dans $\mathbb{R}^3$. On considère $\mathbb{R}^3$ muni des coordonnées (r,θ,z) et de la structure de contact standard ξ donnée par $dz-r^2d\theta=0$. Soit (V,γ) la variété suturée où $V=D^2\times[-1,1]=\{r\leq 1,-1\leq z\leq 1\}$, $\gamma=\partial D^2\times[-1,1]$, et $R_\pm(\gamma)=D^2\times\{\pm 1\}$. Alors $(\xi,R=\frac{\partial}{\partial z})$ est adaptée à (V,γ).

Lorsque (ξ,R) est adapté à la variété (V,γ), et que γ est annulaire, alors R est ajusté à la structure convexe $(V,\Gamma=s(\gamma))$ après un lissage approprié de ∂V le long de γ. Ainsi, le théorème 4.2 découle immédiatement du résultat suivant:

Théorème 4.3 *Si (V,γ) est une variété suturée tendue de bord non vide avec $H_2(V,\partial V;\mathbb{Z})\neq 0$, alors (V,γ) porte une forme de contact hypertendue dont le champ de Reeb est adapté au bord.*

En particulier, lorsque le bord contient une suture torique T, le champ de Reeb obtenu est tangent à T. Dans le cas où V est bordée par une union non vide de tores, le théorème 1.3 est donc une conséquence directe de l'application du théorème 4.3 à la variété suturée $(V,\partial V)$ qui est automatiquement tendue.

On construit cette forme de contact par collages successifs le long d'une hiérarchie suturée. À chaque étape, le champ de Reeb est sans orbite contractible et adapté aux sutures du bord.

On prend pour convention qu'une structure de contact sur une variété compacte V est la restriction d'une structure de contact sur un épaississement de V.

Le germe de cet épaississement est déterminé à isotopie relative au bord près par sa trace sur le bord, ce qui enlève toute ambiguïté sur l'épaississement considéré. Dans les paragraphes qui suivent, on peut être amené à considérer des déformations de ∂V, ce qui signifie des déformations dans ce germe d'épaississement.

5 Lemme de flexibilité

Le lemme suivant est essentiellement contenu dans [22]. C'est la pierre angulaire de notre construction.

Lemme 5.1 [22] *Soit S une surface compacte avec $\partial S \neq \emptyset$, et $dt + \beta$ une 1–forme de contact sur $S \times \mathbb{R}$, où $S \times \mathbb{R}$ a pour coordonnées (x,t) et β est le rappel d'une 1–forme de S. Si β' est la primitive d'une forme d'aire $d\beta'$ sur S et $\beta|_{\partial S} = \beta'|_{\partial S}$, alors il existe un difféomorphisme $\phi = (\phi_1, \phi_2)\colon S \times \mathbb{R} \to S \times \mathbb{R}$, où $\phi_1(x,t) = \phi_1(x,t')$, $\phi_2(x, t+t') = \phi_2(x,t) + t'$, $\phi^*(dt + \beta') = dt + \beta$, et $\phi = id$ sur $\partial S \times \mathbb{R}$.*

Démonstration On suit les lignes d'un argument de Moser. Pour $s \in [0,1]$, soit $\alpha_s = dt + \beta_s$, où β_s est l'interpolation $(1-s)\beta + s\beta'$. On observe que $d\beta_s$ est une forme d'aire pour tout s, et donc que α_s est une forme de contact pour tout s. On cherche à résoudre l'équation d'inconnue X_s:

$$\mathcal{L}_{X_s}\alpha_s = \frac{d\alpha_s}{ds} = \beta' - \beta. \tag{5.0.1}$$

On écrit $X_s = f_s \frac{\partial}{\partial t} + Y_s$ avec f_s une fonction sur S et Y_s un champ de vecteurs sur S, i.e., f_s et Y_s sont indépendants de t. Si on développe par la formule de Cartan, il suffit de résoudre:

$$i_{Y_s} d\beta_s = \beta' - \beta, \alpha_s(X_s) = f_s + \beta_s(Y_s) = 0. \tag{5.0.2}$$

On obtient Y_s à l'aide de la première équation, et f_s avec la seconde. En intégrant X_s, on obtient le difféomorphisme recherché ϕ. De plus, comme $\beta = \beta'$ sur ∂S, $Y_s = 0$ et $f_s = 0$ sur ∂S, et donc $\phi = id$ sur $\partial S \times \mathbb{R}$. □

On peut utiliser ce lemme de flexibilité dans la situation suivante:

Soit (V, γ) une variété suturée avec une paire adaptée (ξ, R), et S une composante connexe de $R_+(\gamma)$. (L'argument pour $R_-(\gamma)$ est similaire.) Un voisinage de S peut être plongé dans $S \times \mathbb{R}$ de sorte que S s'envoie sur $S \times \{0\}$,

R s'envoie sur $\frac{\partial}{\partial t}$, et la 1–forme de contact correspondante s'envoie sur $dt+\beta$. Si on veut remplacer β par β' qui coïncide avec β le long de ∂S et telle que $d\beta'$ soit une forme d'aire, on applique le lemme de flexibilité pour obtenir $S'=\phi^{-1}(S\times\{t\})\subset(S\times\mathbb{R},dt+\beta)$. Si t est assez grand, alors S' et $S=S\times\{0\}$ sont disjoints et cobordent une région V' difféomorphe à $S\times I$. L'attachement de V' à V le long de S a pour effet de modifier le feuilletage caractéristique de S de celui donné par β à celui donné par β'.

6 Collage

Soit $(V,\gamma)\overset{S}{\rightsquigarrow}(V',\gamma')$ une décomposition de variété suturée annulaire tendue bien positionnée, i.e. on suppose que ∂S est non vide, que S est connexe et π_1–injectée dans V, que (V,γ) a des sutures annulaires et que chaque composante de ∂S rencontre γ le long d'arcs. On suppose à présent que (ξ',R') est adapté à (V',γ').

On construit la paire (ξ,R) adaptée à (V,γ) en collant $S'_+\subset R'_+(\gamma')$ à $S'_-\subset R'_-(\gamma')$, où $S'_\pm$ sont les copies positives et négatives de S obtenues par découpage le long de la surface orientée S. Comme toutes les composantes de ∂S intersectent non trivialement γ, toute composante du bord orienté $\partial S'_+$ est une courbe fermée lisse par morceaux qui est constituée d'une union d'arcs lisses orientés $a_1^+,b_1^+,\dots,a_k^+,b_k^+$ où (i) la fin de a_i^+ est le début de b_i^+ et la fin de b_i^+ est le début de a_{i+1}^+ ($i+1$ est pris modulo k), (ii) $\gamma'\cap\partial S'_+=\cup_{i=1}^k a_i^+$, et (iii) $k\geq 1$. De façon similaire, toute composante de $\partial S'_-$ est composée d'arcs $a_1^-,b_1^-,\dots,a_k^-,b_k^-$, où (i) la fin de a_i^- est le début de b_i^- et la fin de b_i^- est le début de a_{i+1}^- (mod k), (ii) $\gamma'\cap\partial S'_-=\cup_{i=1}^k b_i^-$, et (iii) $k\geq 1$.

En prenant un difféomorphisme d'un voisinage de $R'_+(\gamma')$ dans $R'_+(\gamma')\times\mathbb{R}$ envoyant $R'_+(\gamma')$ sur $R'_+(\gamma')\times\{0\}$, on peut supposer que $R'=\frac{\partial}{\partial t}$ et que la forme de contact est $dt+\beta_+$.

Étape 1

Affirmation 6.1 *Il existe une 1–forme β'_+ sur $R'_+(\gamma')$ telle que $d\beta'_+$ soit une forme d'aire sur $R'_+(\gamma')$, que $\beta'_+=\beta_+$ sur $\partial R'_+(\gamma')$, et que $\partial S'_+$ soit une courbe transversale positive pour $dt+\beta'_+$. De plus, $\beta'_+(a_i^+)=\beta'_+(b_i^+)=\varepsilon$ pour un petit $\varepsilon>0$. (Ici, on peut être amené à rétrécir S'_+ si nécessaire.)*

Démonstration On considère un squelette legendrien K pour S'_+ de la façon suivante. On définit β'_+ au voisinage d'un point p dans l'intérieur de S'_+ de sorte que p devienne une singularité elliptique positive (par exemple, $\beta'_+ = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$ près de $(0,0)$), et on attache successivement des anses d'indice 1, i.e., on prend des singularités hyperboliques positives (données par exemple par $\beta'_+ = 2xdy + ydx$ près de $(0,0)$), et on connecte leurs séparatrices instables à p. L'union K' du point elliptique, des points hyperboliques et de leurs séparatrices instables aura le même type topologique que S'_+. Finalement, on ajoute un arc legendrien de p à a_i^+, $i = 1, \ldots, k$, pour obtenir K. Un petit voisinage convenable de K (de bord transversal au feuilletage caractéristique dirigé par $\ker \beta'_+$) sera S'_+. Comme β'_+ est nulle le long de K, on peut imposer n'importe qu'elle β'_+–longueur assez petite aux arcs a_i^+ et b_i^+.

On note également que la β'_+–longueur d'une courbe fermée l (ou d'un arc) transversale à la structure ξ détermine β'_+ à difféomorphisme près au voisinage de l (relativement au bord de l'arc), comme l'explicite le lemme suivant.

Lemme 6.2 *Soit S une surface à bord et $dt + \beta_0$ et $dt + \beta_1$ deux formes de contact définies au voisinage $S \times [-1,1]$ de $S = S \times \{0\}$, où t est la coordonnée dans $[-1,1]$ et β_0 et β_1 sont les rappels de 1–formes sur S. On suppose que $l \subset \partial S$ est une courbe fermée ou un arc transversal à $\ker \beta_i$, $i = 0, 1$, et que $\int_l \beta_0 = \int_l \beta_1$. Il existe un difféomorphisme de S qui conjugue β_0 et β_1 près de l.*

Démonstration On suppose que l est une courbe fermée. Un voisinage de $l \subset \partial S$ est conjugué à $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0,1] = \{(x,y)\}$, $l = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}$, avec $\beta_1 = f(x,y)dx$. La fonction f est strictement positive et l'application $(x,y) \mapsto (\int_0^x f(u,0)du, y)$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0,1]$ dans $\mathbb{R}/L_l\mathbb{Z} \times [0,1]$ qui envoie β_1 sur $F(x,y)dx$, $F(x,0) = 1$. On pose $L_l = \int_0^1 f(x,0)dx$. La condition de contact dit que $\frac{\partial F}{\partial_y} > 0$. Le difféomorphisme $(x,y) \mapsto (x, F(x,y)) = (X,Y) \in \mathbb{R}/L_l\mathbb{Z} \times [1, 1+\varepsilon]$ envoie $F(x,y)dx$ sur YdX. On peut donc conjuguer les formes β_0 et β_1 au même modèle, et donc entre elles. □

Il reste à étendre β'_+ de S'_+ à $R'_+(\gamma')$, en utilisant le fait que les β'_+–longueurs des b_i^+ peuvent être choisies arbitrairement petites. On décrit succinctement cette opération.

On note R_0 une composante connexe de $R'_+(\gamma') \setminus int(S'_+)$. La surface R_0 possède des coins dans son bord. Comme dans [22], on peut munir R_0 d'une 1–forme β_0 avec les propriétés suivantes:

- $d\beta_0$ est une forme de surface sur R_0;

- $\ker \beta_0$ est négativement transversal à $\partial R_0 \cap (\cup_i b_i^+)$ et positivement transversal à $\partial R_0 \setminus (\cup_i b_i^+)$.
- la β_0–longueur de chaque composante de $\partial R_0 \setminus (\cup_i b_i^+)$ est inférieure à sa β'_+–longueur.

On choisit alors β'_+ de sorte que la β'_+–longueur de chaque composante de $\partial R_0 \cap (\cup_i b_i^+)$ soit inférieure à sa β_0–longueur.

Dans cette situation, on peut modifier (comme, par exemple, dans le lemme 6.3) β_0 près de chaque composante de $\partial R_0 \cap (\cup_i b_i^+)$ et de $\partial R_0 \setminus (\cup_i b_i^+)$ pour faire coïncider leurs β_0– et β'_+–longueurs. La forme β'_0 obtenue en déformant β_0 est l'extension de β'_+ recherchée.

Il faut encore s'occuper des coins de S'_+. Ce sera fait dans la prochaine étape. Le diagramme de gauche dans la figure 1 décrit la façon dont le feuilletage caractéristique de S'_+ est préparé avant le collage. $\square$

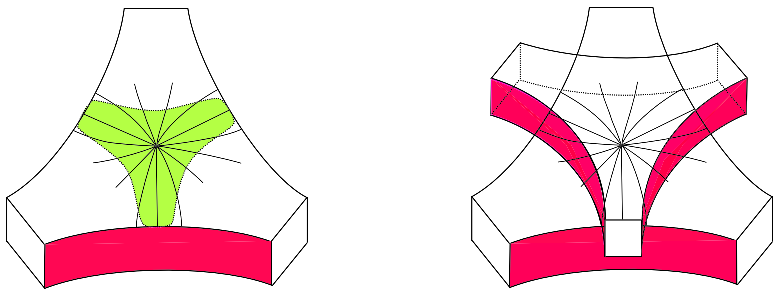

Figure 1: Préparation du feuilletage caractéristique de S'_+ et collage de S'_+ et S'_-

Étape 2 (Forme normale près des coins) Près de la fin q de b_i^+ (qui est le début de a_{i+1}^+), on normalise β'_+ comme suit: on plonge un voisinage $N(q)$ de q dans $R'_+(\gamma')$ sur $\mathbb{R}^2$ avec ses coordonnées (x,y), en envoyant q sur $(0,0)$, $\partial R'_+(\gamma') \cap N(q)$ sur la droite $y = x$, et β'_+ sur $-(y+1)dx$. En modifiant S'_+ si nécéssaire, on peut supposer que b_i^+ est envoyé sur $y = -x$ et que a_{i+1}^+ est envoyé sur $y = x$. De façon similaire, près de la fin de a_i^+, on envoie $\partial R'_+(\gamma') \cap N(q)$ sur la droite $y = -x$, a_i^+ sur $y = -x$, et b_i^+ sur $y = x$.

Étape 3 (Lissage) Grâce à la deuxième étape, on peut s'arranger pour que β'_+ sur S'_+ et β'_- sur S'_- coïncident près des coins. Maintenant, par la première étape, on a rendu les $\beta'_\pm$–longueurs des $a_i^\pm$ et $b_i^\pm$ toutes égales à ε, si bien qu'on peut faire coïncider $\beta'_\pm$ sur $\partial S'_\pm$ relativement à leurs coins. On utilise à présent le lemme de flexibilité pour obtenir une tranche difféomorphe à $R'_\pm(\gamma') \times [0,1]$

que l'on ajoute à (V',γ') le long de $R'_{\pm}(\gamma')$. On peut alors supposer qu'il existe un difféomorphisme entre S'_+ et S'_- qui envoie a_i^+ sur a_i^- et b_i^+ sur b_i^- et qui échange les formes de contact.

On épaissit (V',γ') en lui attachant $S\times[0,1]$ avec une structure de contact $[0,1]$–invariante et un champ de Reeb $\frac{\partial}{\partial t}$. On prend alors $V'\cup(S\times[0,1])$, où $S\times\{0\}$ est attaché à S'_+ et $S\times\{1\}$ est attaché à S'_-. Soit maintenant $P_{\pm}=\overline{R'_{\pm}(\gamma')\setminus S'_{\pm}}$. On prend $P_{\pm}\times[0,1]$ avec une structure de contact $[0,1]$–invariante et un champ de Reeb $\frac{\partial}{\partial t}$. On colle $P_+\times\{0\}$ à P_+, $P_-\times\{1\}$ à P_-, et $\partial P_{\pm}\times[0,1]$ à $(\partial S\cap P_{\pm})\times[0,1]$ de $S\times[0,1]$. On note V_1 la variété obtenue.

Il reste à arrondir les coins. Soit $A=S^1\times[0,1]$ la composante connexe de $A(\gamma')$ avec $a_i^+\subset S^1\times\{1\}$, et $A\times[0,\varepsilon[$ son voisinage dans V', où $A\times\{0\}=A$. Les coordonnées sur $S^1\times[0,1]\times[0,\varepsilon[$ seront notées (θ,x,y), et on prendra $a_i^+=\{x=1, y=0, -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\}$. Soit $f\colon [0,\varepsilon[\to[0,1]$ une fonction lisse décroissante avec $f(y)=1$ près de $y=0$ et $f(y)=0$ près de $y=\varepsilon$. On soustrait à V' les ensembles $\{x\leq f(y), -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\}$, $\{x\leq f(\sqrt{y^2+(\theta\pm\frac{\pi}{2})^2})\}$.

On traite à présent le cas des sutures toriques. Il existe alors des paires de composantes de bord $\delta_{\pm}\subset\partial S'_{\pm}$ qui cobordent une composante connexe $A_{\delta_{\pm}}$ de γ' et qui sont identifiées par l'application de collage pour donner une suture torique. Comme d'habitude, les orientations de $\delta_{\pm}$ sont induites par celles de $S'_{\pm}$. Dans ce cas, on définit S'_+ comme étant le voisinage de K comme dans la première étape, étendu des composantes de $S'_+\setminus K$ dont une des composantes de bord est δ_+. Comme le champ R', associé à la forme de contact α' définie sur V', est tangent à $A_{\delta_{\pm}}$, on a (par la formule de Stokes) $\int_{\delta_-}\alpha'=\int_{\delta_+}\alpha'>0$. Pour pouvoir appliquer la construction précédente, il faut encore être sûr que les α'–longueurs des différentes paires $\delta_{\pm}$ sont égales entre elles. Pour cela, on constate qu'on peut toutes leur faire prendre une valeur assez grande fixée en épaississant V' le long des sutures $A_{\delta_{\pm}}$: on colle à $A_{\delta_{\pm}}$ un produit $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times[-1,1]\times[a,b]$, muni de coordonnées (x,y,t), en identifiant $A_{\delta_{\pm}}$ à $\{t=a\}$ à l'aide du lemme suivant:

Lemme 6.3 (Ajustement des longueurs) *Soit $\xi=\ker(\cos t dx-\sin t dy)$ sur $W=\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times[-1,1]\times[a,b]$, muni de coordonnées (x,y,t), où $\frac{\pi}{2}<a<b<\pi$. Soit de plus R un champ de Reeb pour ξ, défini près de $\{t=a\}$, tangent à $\{t=a\}$ et transversal à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\{y\}\times[a,b]$ pour tout $y\in[-1,1]$. Il existe $L_0>0$ tel que pour tout $L>L_0$, il existe une extension de R en un champ de Reeb, noté également R, sur W tel que: R soit transversal à chaque $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\{y\}\times[a,b]$, R soit tangent à $\{t=b\}$, et $\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\{\pm1\}\times\{b\}}\alpha_R=L$.*

Démonstration Le champ $R = R_x\frac{\partial}{\partial x} + R_y\frac{\partial}{\partial y} + R_t\frac{\partial}{\partial t}$ est déterminé par la donnée d'une fonction génératrice $H\colon W \to \mathbb{R}_+^*$ qui vérifie:

$$\begin{aligned} R_x &= H\cos t - \frac{\partial H}{\partial t}\sin t \\ R_y &= -H\sin t - \frac{\partial H}{\partial t}\cos t \\ R_t &= -\frac{\partial H}{\partial x}\sin t - \frac{\partial H}{\partial y}\cos t. \end{aligned}$$

La fonction H est donnée près de $\{t = a\}$. On l'étend en une fonction notée à nouveau H avec $\frac{\partial H}{\partial t} < 0$ en dehors d'un petit voisinage de $\{t = a\}$ (ce qui assure que $R_y < 0$) et telle que $\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial y} = 0$ le long de $\{t = b\}$ (ce qui assure que R est tangent à $\{t = b\}$).

La forme de contact associée à un tel R est $\frac{1}{H}(\cos t dx - \sin t dy)$. La longueur L du bord $\{y = \pm 1, t = b\}$ est $\frac{-\cos b}{H|_{\{t=b\}}}$. Ici, H est constant sur $\{t = b\}$. On peut choisir $H|_{\{t=b\}}$ arbitrairement petit. □

Lemme 6.4 *Si R' n'a pas d'orbite périodique contractible dans V', alors R n'a pas d'orbite périodique contractible dans V.*

Démonstration Soit $\mathcal{P}$ une orbite périodique de R. Le champ de Reeb R est positivement transversal à la surface de découpage orientée S. Si $\mathcal{P}$ rencontre S, alors, l'intersection de $\mathcal{P}$ et de S en homologie est non nulle, égale au nombre de points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de S, et donc $\mathcal{P}$ est non contractible dans V. Si $\mathcal{P}$ ne rencontre pas S, alors $\mathcal{P}$ est contenue dans V'. Comme la surface de collage S est π_1–injectée dans V, le groupe fondamental de V' s'injecte dans celui de V d'après le théorème de Seifert–Van Kampen. L'orbite $\mathcal{P}$ qui n'était pas contractible dans V' ne l'est toujours pas dans V. □

7 Preuve des théorèmes

Sous les hypothèses du théorème 4.3, la variété (V, γ) possède une hiérarchie suturée qui est annulaire, tendue, et bien positionnée après un premier découpage (le long d'une surface S éventuellement non connexe et qui intersecte $A(\gamma)$ le long d'arcs) éliminant les sutures toriques (voir [29] et le théorème 2.1). En partant du modèle de champ de Reeb décrit sur la boule suturée $D^2 \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$ dans le paragraphe 4 (cf. *Modèle dans* $\mathbb{R}^3$), on obtient par collages successifs une paire (ξ, R) adaptée à (V, γ). D'après le lemme 6.4, appliqué à chaque étape du collage, le champ R est sans orbite périodique contractible.

Le feuilletage tendu construit par Gabai sur V est "orthogonal" au champ de Reeb R. On part du feuilletage horizontal en disque de $D^2 \times [0,1]$, alors que le champ de Reeb à cette étape est tangent à la direction verticale. À chaque étape, on colle à la variété V_i des produits, dont la direction verticale est toujours donnée par le champ de Reeb, alors que le feuilletage s'étend transversalement à cette verticale. Le fait que le champ de Reeb R soit transversal au feuilletage tendu obtenu par Gabai dans [18] est donc automatique.

Remarque 7.1 L'argument essentiel est que le champ de Reeb est transversal à chaque surface de recollement. Il n'est pas possible d'obtenir cette propriété lorsque la surface de recollement est sans bord: la forme $d\alpha$ serait alors une forme de surface exacte, contredisant le théorème de Stokes. C'est pourquoi cette construction ne marche en général que sur les variétés de dimension trois à bord.

Remarque 7.2 Dans le théorème 1.3, on peut obtenir en fait mieux qu'un champ de Reeb tangent au bord: un voisinage du bord est feuilleté par des tores saturés par le flot.

8 Contrôle de la pente au bord

On prouve ici un corollaire du théorème 1.3 qui permet, la direction du champ de Reeb étant fixe, de contrôler la pente du feuilletage caractéristique du bord.

Soit T un tore de dimension 2 orienté et $[m]$, $[l] \in H_1(T;\mathbb{Z})$ une base de $H_1(T;\mathbb{Z})$, avec $i([m],[l]) = 1$. Les cycles asymptotiques de Schwartzman [40] permettent d'associer à tout feuilletage non singulier $\mathcal{F}$ de T une direction dans $H_1(T;\mathbb{R}) = \mathbb{R}[m] + \mathbb{R}[l]$, dont le coefficient directeur est appelé la *pente* de $\mathcal{F}$. Par exemple, la pente d'un feuilletage de T par des cercles homologues à $[m]$ vaut 0.

Soit V une variété compacte, irréductible et orientée bordée par une union non vide de tores $T_1,\dots,T_n$. On suppose que S est une surface minimale (i.e. sans composantes closes et qui minimise la norme de Thurston dans $H_2(V,\partial V;\mathbb{Z})$) orientée dans V qui rencontre tous les T_i le long d'une famille de courbes homologues dans T_i. Chaque T_i est orienté comme bord de V. On fixe alors, pour $1 \le i \le n$ une base $[m_i]$, $[l_i]$ de $H_1(T_i;\mathbb{Z})$ comme indiqué ci-dessus, avec de surcroît, $[m_i] = [s_i]$, où s_i est une composante de $S \cap T_i$. La pente d'un feuilletage de T_i est alors calculé dans la base $([m_i],[l_i])$.

Corollaire 8.1 *Soit V une variété compacte, orientable, irréductible, bordée par une union non vide de tores $T_1,...,T_n$. On note S une surface minimale dans V qui rencontre toutes les composantes de ∂V. Pour tout $\varepsilon < 0$, il existe une forme de contact hypertendue α_ε sur V, dont le champ de Reeb est tangent à ∂V et transversal à S, de direction indépendante de ε, et tel que la pente de chaque feuilletage $\xi_\varepsilon \partial T_i$ ($\xi_\varepsilon = \ker \alpha_\varepsilon$) soit dans l'intervalle $[\varepsilon, 0[$.*

Démonstration Soit α une forme de contact adaptée à $(V \setminus S, \gamma = (\cup_i T_i) \setminus \partial S)$, donnée par le théorème 4.3 et R son champ de Reeb. On se donne alors un petit épaississement $U = S \times [-a, a]$ de S avec $R = \frac{\partial}{\partial t}$, où t est la variable de $[-a, a]$.

On pose $\alpha_\varepsilon = \alpha$ en dehors de U. Sur U, on remplace α par la forme de contact $\alpha_\varepsilon = \alpha - \frac{1}{\varepsilon}\chi(t)dt$, où $\chi\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ vaut 0 en $\pm a$ et est strictement positive à l'intérieur. Quand ε tend vers 0, la structure $\ker \alpha_\varepsilon$ tend vers le champ de plan horizontal TS, et donc la pente du feuilletage tracé sur chaque composante de bord tend vers 0. En tout point de V, $d\alpha_\varepsilon = d\alpha$ et donc le champ de Reeb associé à α_ε est proportionnel à celui donné par α. □

9 Preuve du corollaire 1.6 – Obturations de Dehn

Il s'agit ici de démontrer que la forme de contact produite par les théorèmes 1.3 et 8.1 s'étend de manière contrôlée à des recollements de tores épaissis $(T^2 \times [a, b], \cos t dx - \sin t dy = 0)$ ou des obturation de Dehn.

Le feuilletage tracé sur chaque tore du bord est laissé invariant par le flot du champ de Reeb. Pour $T \subset \partial V$, le feuilletage ξT est linéaire: soit il est de pente rationnelle et il possède une orbite périodique, nécéssairement transversale au champ de Reeb, et il s'agit alors d'un feuilletage en cercles, sinon c'est un feuilletage de pente irrationnel, là encore linéaire.

9.1 Preuve du corollaire 1.6

On considère la structure de contact ξ définie sur $U = T^2 \times [a, a']$, muni des coordonnées $((x, y), t)$, par l'équation $\alpha = \cos t dx - \sin t dy$. Soit $p\colon T^2 \times [a, a'] \to T^2$ la projection de fibre $[a, a']$. On note R_0 le champ de Reeb associé à α.

Lemme 9.1 *Soit R_1 un germe de champ de Reeb pour ξ près du tore $\{t=a\}$, dont la composante sur le vecteur $\frac{\partial}{\partial t}$ est nulle près de $\{t=a\}$. Il existe $c>0$, et une extension R de R_1 sur U qui vaut R_0 sur $T^2\times[a+c,a']$ et qui est partout (positivement) transversale à un conjugué, relativement à $T^2\times\{a,a+c\}$, du feuilletage de codimension un d'équation $\cos a dx - \sin a dy = 0$ sur $T^2\times[a,a+c]$.*

Démonstration On fait d'abord la remarque suivante. Un champ de vecteurs R sur U est un champ de Reeb si et seulement s'il existe une fonction $H\colon U\to\mathbb{R}_+^*$ telle que:

$$\begin{aligned}R_x &= H\cos t - \frac{\partial H}{\partial t}\sin t\\ R_y &= -H\sin t - \frac{\partial H}{\partial t}\cos t\\ R_t &= -\frac{\partial H}{\partial x}\sin t - \frac{\partial H}{\partial y}\cos t.\end{aligned}$$

La troisième équation implique que si $R_t\equiv 0$, la fonction H est constante sur les feuilles du feuilletage caractéristique $\xi(T^2\times\{t\})$. Lorsque la pente de ce feuilletage est irrationnelle, ses feuilles sont denses et donc $H|_{T^2\times\{t\}}$ est constante. Cette situation se produit pour un ensemble dense de valeurs du paramètre t, et donc $\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{\partial H}{\partial y}=0$.

Dans le contexte du lemme 9.1, on en déduit que R_1 ne dépend que de t.

Il existe $\pi>c>0$ tel que la base $(p_*R_0(\{t=a+c\})=\cos(a+c)\frac{\partial}{\partial x}-\sin(a+c)\frac{\partial}{\partial y},\ p_*R_1(\{t=a\}))$ soit directe et que $R_0(\{t=a+c\})$ soit positivement transversal au feuilletage $\{\cos a dx-\sin a dy=0\}$.

Comme R_1 est tangent à $\{t=a\}$, l'équation associée à R_1 en $\{t=a\}$ s'écrit: $udx-vdy=0$. On peut alors trouver $f,g\colon [a,a+c]\to\mathbb{R}$ telles que:

- $f(a)=u$, $g(a)=v$, $f(a+c)=\cos(a+c)$, $g(a+c)=\sin(a+c)$;
- $\forall t\in[a,a+c]$, $(f(t),g(t))\neq(0,0)$;
- $\forall t\in[a,a+c]$, $f(t)g'(t)-f'(t)g(t)>0$ (condition de contact pour $f(t)dx-g(t)dy$);
- le vecteur de coordonnées $(f(t),g(t))$ soit positivement transversal au feuilletage de $\mathbb{R}^2$ d'équation $\cos a dx-\sin a dy=0$.

Sous ces conditions, la forme définie sur $T^2\times[a,a+c]$ comme $f(t)dx-g(t)dy$ est de contact. Son champ de Reeb est $f(t)\frac{\partial}{\partial x}-g(t)\frac{\partial}{\partial y}$. Elle est l'interpolation recherchée. Sur $T^2\times[a,a+c]$, on a remplacé ξ par la structure $\ker(fdx-gdy)$ qui lui est conjuguée relativement au bord. □

Pour montrer le corollaire 1.6, on se donne un tore $T \subset V$ incompressible et on découpe V le long de T pour obtenir une variété à bord V'. Le théorème 1.3 permet de munir V' d'une forme de contact hypertendue α' dont le champ de Reeb R' est tangent à $\partial V'$ et transversal à la première surface de découpage de V'. On a même (remarque 7.2) un voisinage du bord feuilleté par des tores saturés par le champ R'. On colle alors à V' un tore épais $(T^2 \times [a,b], \cos t dx - \sin t dy = 0)$ pour obtenir une variété de contact difféomorphe à V. On étend la forme α' près de a et b à l'aide du lemme 9.1 pour qu'elle donne la même équation $\cos t dx - \sin t dy$ en $T^2 \times \{a+c\}$ et $T^2 \times \{b-c'\}$.

On étend alors la forme obtenue par $\cos t dx - \sin t dy$ sur $T^2 \times [a+c, b-c']$.

On obtient finalement ainsi une version contrôlée du corollaire 1.6, par combinaison de la preuve précédente et de celle du corollaire 8.1: comme $\partial V'$ est feuilleté par des orbites de R, toute orbite périodique reste soit dans V', soit dans son complémentaire.

Soit V une variété toroïdale irréductible, orientable et close et $T \subset V$ un tore incompressible. On note $U = T^2 \times [a,b]$ un voisinage tubulaire de T et $V' = V \setminus T^2 \times]a,b[$. On note de plus $S \subset V'$ la première surface de découpage de V', qui rencontre les deux composantes de $\partial V'$.

Théorème 9.2 *Pour tout $\varepsilon < 0$, il existe une forme de contact hypertendue α_ε sur V et deux réels $c, c' > 0$ avec les propriétés suivantes:*

- *R_ε est positivement transversal à S, tangent à $T^2 \times \{a,b\}$;*
- *R_ε vaut $\cos t \frac{\partial}{\partial x} - \sin t \frac{\partial}{\partial y}$ sur $T^2 \times [a+c, b-c']$ (α_ε vaut $\cos t dx - \sin t dy$);*
- *sur $T^2 \times [a, a+c]$ et $T^2 \times [b-c', b]$, R_ε est positivement transversal à un feuilletage en anneaux $(\mathcal{F}_a \times [a, a+c]) \cup (-\mathcal{F}_b \times [b-c', b])$, où $\mathcal{F}_a$ et $\mathcal{F}_b$ sont des feuilletages en cercles de $T^2 \times \{a\}$ et $T^2 \times \{b\}$ dont les pentes sont $|\varepsilon|$-proches de celles d'une composante de, respectivement, $\partial S \cap (T^2 \times \{a\})$ et $\partial S \cap (T^2 \times \{b\})$.*

Démonstration On reprend la démonstration du corollaire 1.6 en construisant sur V' une forme de contact qui trace au bord un feuilletage caractéristique de pente supérieure à ε. On obtient alors c et c' pour que l'application du lemme 9.1 donne la transversalité à un feuilletage en anneaux de pente $|\varepsilon|$-proche de celle de ∂S. □

9.2 Obturations de Dehn sous contrôle

Soit $p/q \in \mathbb{Q}$ et négatif. On réalise une obturation de Dehn de pente p/q sur une composante T de ∂V pour obtenir une variété close V'.

Lemme 9.3 *Si $|p/q|$ est assez petit, il existe une forme de contact β sur V' dont le champ de Reeb est tangent à T, hypertendu en restriction à V (et transversal à une surface incompressible dans V qui rencontre T) et transversal aux disques méridiens du tore d'obturation.*

Démonstration Il existe une forme de contact hypertendue α_0 dont le champ de Reeb R_0 est transversal à S et tangent à T. Comme $|p/q|$ est assez petit, on peut choisir un difféomorphisme de recollement comme suit:

(1) On oriente le cercle méridien m du tore solide de sorte m et ∂S s'intersectent positivement et transversalement sur T (on rappelle que T est orienté comme bord de V).

(2) Le champ de Reeb R_0 et m s'intersectent alors négativement et transversalement sur T.

D'après le corollaire 8.1, il existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $p/q < \varepsilon < 0$, pour lequel on peut trouver une forme de contact α_ε qui trace sur T un feuilletage de pente ε. Le champ de Reeb R_ε de α_ε est de plus colinéaire à R_0. Le feuilletage induit sur le tore solide collé à T est un feuilletage en cercles de pente < 0.

On choisit par ailleurs un système de coordonnées $D^2 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} = ((r,\theta),z)$ de sorte que R_ε soit négativement transversal à $\frac{\partial}{\partial z}$ le long de T.

La forme de contact associée à R_ε vaut $udz + vd\theta$ le long de T.

On définit deux fonctions $f,g\colon [0,1] \to \mathbb{R}^+$ de la même façon que dans le lemme 9.1 avec $f(1) = u$, $g(1) = v$, $g(0) = 0$, $(f(r),g(r)) \neq (0,0)$, $fg' - gf' > 0$.

On étend alors la forme α_ε par $f(r)dr + g(r)d\theta$. Le champ de Reeb associé est transversal aux disques méridiens du tore solide. □

10 Cas des fibrations sur le cercle

Pour rendre cette partie indépendante de ce qui précède, et démontrer le théorème 1.7, on n'utilise pas directement la construction du théorème 1.3, mais une construction un peu plus simple et explicite, due à E Giroux [23].

Soit S une surface compacte, orientable, de bord non vide, et différente du disque et de l'anneau. On note ϕ un difféomorphisme de S qui est l'identité près du bord. Pour simplifier les notations, on suppose, comme dans [38], que S possède une seule composante de bord. La preuve est identique lorsqu'il y en a plusieurs.

On note V la suspension de ϕ, obtenue à partir de $P = S \times [0,1]$ en identifiant $(x,1)$ avec $(\phi(x),0)$. On a une fibration $\pi\colon V \to S^1$ de fibre S. On note $d\theta$ la forme de longueur sur S^1.

Soit à présent β une 1–forme sur S, transversale à ∂S et telle que $d\beta$ est une forme d'aire pour S. Si $\beta_t = (1-t)\beta + t\phi^*\beta$, $t \in [0,1]$, alors pour s assez petit, la forme $\alpha = dt + s\beta_t$ est une forme de contact sur $S \times [0,1]$, qui induit une forme de contact sur V. Son champ de Reeb R est transversal aux fibres de π.

On redéfinit $P = S \times [0,1]$ et ϕ afin que la direction verticale $\frac{\partial}{\partial s}$, $s \in [0,1]$, soit tangente au champ de Reeb R, et $V = (S \times [0,1])/(x,1) \sim (\phi(x),0)$.

Proposition 10.1 *Il existe une surface branchée $\mathcal{B}$, un voisinage fibré $N(\mathcal{B})$ de $\mathcal{B}$ et $a > 0$ tels que:*

(1) *$N(\mathcal{B}) \subset V$ soit feuilleté verticalement par les orbites de R.*
(2) *$N(\mathcal{B})$ porte, pour tout $\varepsilon \in [-a,a]$, une lamination L_ε dont le bord est feuilleté en cercles de pente ε.*

Proof La preuve est une modification de celle du théorème 4.1 de [38]. Soit α un arc simple, non séparant, proprement plongé dans S. On oriente α et on prend l'orientation induite sur $\phi(\alpha)$. Une légère modification de l'argument de R. Roberts est nécéssaire car $\phi(\alpha)$ et α peuvent ne pas s'intersecter de manière *efficiente* sur S (i.e., le cardinal de $\phi(\alpha) \cap \alpha$ peut ne pas être égal à leur intersection géométrique relative au bord). Sans perte de généralité, on suppose que $\phi(\alpha) \pitchfork \alpha$.

Il est facile de voir qu'il existe une suite d'arcs orientés, proprement plongés et non séparants $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ sur S avec les propriétés suivantes:

(1) $\alpha_0 = \phi(\alpha)$.
(2) α_m est isotope à α relativement à ses extrémités.
(3) α_i et α_{i+1} (pour tout $i = 0, \dots, m-1$) ne s'intersectent pas, ne sont pas parallèles et les quatre points suivants: début de α_i, début de α_{i+1}, fin de α_i, fin de α_{i+1}, apparaissent dans cet ordre sur ∂S muni de l'orientation induite.

Une telle suite est appelée "bonne suite positive" ("*positive good sequence*") dans [38]. Si les quatre points de (3) apparaissent dans l'ordre inverse sur ∂S, la suite est appelée "bonne suite négative". Il est important de noter qu'on distingue avec soin un arc et sa classe d'isotopie.

On affirme qu'il existe une extension $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$ de la bonne suite positive avec $\alpha_n = \alpha$. Si on suppose que α_m et α s'intersectent non trivialement (sauf aux extrémités), on utilise un argument "du plus intérieur" pour trouver des sous-arcs $\beta_m \subset \alpha_m$ et $\beta^- \subset \alpha$ qui cobordent un disque D dans S qui n'a pas d'autre intersection avec α_m et α_- dans son intérieur. Soit α_{m+4} l'arc obtenu à partir de α_m par isotopie à travers D et soit α_{m+2}, l'arc α_{m+4} avec l'orientation opposée. Il est aisé de trouver α_{m+1} et α_{m+3} (qui est α_{m+1} avec l'orientation inverse) qui n'intersectent pas α_m, α_{m+2} et α_{m+4}. Donc les paires consécutives satisfont (3) dans les conditions d'une bonne suite positive. L'extension est alors obtenue par induction.

En utilisant une bonne suite positive, on construit à présent $\mathcal{B}$ de sorte que son voisinage fibré $N(\mathcal{B})$ soit feuilleté par les orbites du champ de Reeb R. Pour ce faire, on prend $S \times [0,1]$ pour lequel on suppose que $R = \frac{\partial}{\partial s}$, et on considère l'union

$$\mathcal{B}' = \bigcup_{i=0}^{n} \left(S \times \left\{ \frac{i}{n} \right\} \right) \cup \bigcup_{i=0}^{n-1} \left(\alpha_i \times \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right] \right).$$

On munit $S \times \{\frac{i}{n}\}$ de l'orientation de S et $\alpha_i \times [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$ de l'orientation pour laquelle l'orientation de bord de $\alpha_i \times \{\frac{i}{n}\}$ coïncide avec l'orientation de α_i. On modifie alors $\mathcal{B}'$ près de $\partial(\alpha_i \times [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}])$ pour obtenir une surface branchée *orientée* $\mathcal{B}$ transversale à R. Pour ce faire, on modifie $\alpha_i \times [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$ par une petite isotopie pour le rendre positivement transversal à $\frac{\partial}{\partial s}$, puis on déforme l'anneau obtenu au voisinage de son bord pour introduire deux lignes de branchement avec $S \times \{\frac{i}{n}\}$ et $S \times \{\frac{i+1}{n}\}$. On prend alors pour $N(\mathcal{B})$ un voisinage fibré par des arcs de Reeb. D'après [38], il existe une constante positive $a > 0$ telle que, pour tout $\varepsilon \in [0, a)$, le voisinage de surface branchée $N(\mathcal{B})$ porte pleinement une lamination qui trace un feuilletage en cercles sur ∂V qui a pour pente ε. De façon similaire, en utilisant une bonne suite négative, il existe $\mathcal{B}$ et $b < 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in (b, 0]$, $N(\mathcal{B})$ porte pleinement une lamination dont le bord est une lamination en cercles de pente ε. $\square$

D'après la proposition 10.1, la lamination L_ε est transversale à R. Le complémentaire de $N(\mathcal{B})$ dans V est le produit d'une surface par une direction verticale tangente à R. Toujours d'après Roberts, la lamination L_ε s'étend en un feuilletage tendu $\mathcal{F}_\varepsilon^V$, dont la restriction à $N(\mathcal{B})$ est transversale à R et qui est un feuilletage produit sur $V \setminus N(\mathcal{B})$, c'est-à-dire qu'il peut être également pris, après isotopie si nécéssaire, transversal à R. Par construction, $\mathcal{F}_\varepsilon^V \cap \partial V$ est un feuilletage d'holonomie triviale.

Si ε est assez petit et rationnel, le feuilletage $\mathcal{F}_\varepsilon^V$ s'étend par des disques en un feuilletage tendu $\mathcal{F}_\varepsilon$ de V_ε, où V_ε est définie dans le théorème 1.7.

Le corollaire 8.1 et le lemme 9.3 permettent de trouver, lorsque $\varepsilon < 0$ (resp. $\varepsilon > 0$), une forme de contact positive (resp. négative) sur V_ε dont le champ de Reeb est transversal à $\mathcal{F}_\varepsilon$. Elle est en particulier hypertendue.

Ici, les conséquences topologiques dues à la présence d'une structure hypertendue (irréductibilité, non conjugaison à S^3), sont également impliquées par la présence d'un feuilletage tendu (le revêtement universel de V_ε est $\mathbb{R}^3$).

La forme de contact est aisée à construire. La difficulté est de montrer qu'elle est hypertendue. L'espoir est d'arriver à construire des formes hypertendues sur une classe de variétés plus large, et de façon plus aisée, que celles qui possèdent un feuilletage tendu.

Comme dans [38], on peut construire des formes de contact hypertendues, dont le champ de Reeb est transversal à un feuilletage tendu, moyennant des informations sur les deux premières surfaces de découpages d'une décomposition suturée de V.

Théorème 10.2 *Soit V une variété compacte orientable bordée par un unique tore. On suppose qu'il existe un découpage de variétés suturées:*

$$(V, \partial V) \overset{S}{\rightsquigarrow} (V', \gamma') \overset{R}{\rightsquigarrow} (V'', \gamma''),$$

où S et R sont orientables, S et R ont une seule composante de bord, ∂R intersecte S en exactement deux arcs non séparants.

Si (V'', γ'') est tendue, alors pour ε assez petit, toute obturation de pente ε de V porte une structure de contact hypertendue (positive ou négative) dont le champ de Reeb est transversal à un feuilletage tendu.

La preuve de ce dernier théorème nécéssite cette fois d'utiliser la construction du théorème 1.3 dans toute sa généralité.

11 Annexe

Dans cette partie, on revient sur l'étude du champ de Reeb construit sur V_ε, dans le cas où V fibre sur le cercle comme dans la section précédente. On reprend intégralement les notations de cette section; en particulier R_ε est le champ de Reeb construit dans la section 10.

On peut montrer directement le théorème suivant, sans recours aux feuilletages.

Théorème 11.1 *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, si ρ est assez petit, pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ tel que chaque ε_i soit strictement compris entre 0 et ρ, aucun revêtement de degré inférieur à N de V_ε n'est difféomorphe à S^3. De plus, si V_ε est une sphère d'homologie rationnelle, elle porte une structure de contact tendue.*

On va donner une preuve de ce théorème dans le cas ou ∂S est connexe, c'est-à-dire que si ∂S est connexe et ρ assez petit, alors pour tout $|\varepsilon| < \rho$, V_ε n'est pas S^3 et porte une structure de contact tendue dans le cas ou elle est une sphère d'homologie. (La preuve pour les revêtements de V_ε nécessite de considérer le cas où ∂S n'est pas connexe.)

En général, il s'agit de voir que le champ de Reeb R_ε ne possède pas d'orbite périodique dans V_ε qui borde un disque plongé D d'intérieur transversal à R_ε. Pour un N fixé, cette propriété doit aussi être vérifiée, pour ρ assez petit, sur tout revêtement de V_ε de degré inférieur à N. Un tel revêtement de V_ε est également obtenu par obturation de Dehn d'une variété qui fibre sur le cercle. Il suffit donc savoir faire la démonstration dans ce cas, i.e. pour V_ε.

La clé est qu'un tel disque D doit être positivement transversal à l'âme des tores d'obturations, qui sont par construction des orbites de R_ε (la construction fournit également qu'un voisinage de l'âme du tore d'obturation est un produit du disque par des orbites périodiques: on peut s'arranger pour que $\partial D \subset V$).

Dans toute la suite, on suppose, pour simplifier, que ∂S est connexe. Dans ce cas, on peut supposer également que S n'est pas planaire, i.e. n'est pas un disque. La preuve du cas général suit le même schéma, même si elle comporte quelques difficultés techniques supplémentaires.

Si on regarde $V \cap D$, la non-existence de D résulte directement de la proposition suivante (valable également lorsque ∂S n'est pas connexe):

Proposition 11.2 *Si $\rho > 0$ est assez petit, aucune orbite périodique O de R ne borde de surface planaire P plongée dans V, $\partial P \setminus O \subset \partial V$, dont toutes les composantes de bord orientées $\partial P \setminus O$ sont de pente positive et inférieure à ρ dans ∂V.*

Démonstration On note S une fibre de V, image de $S \times \{0\}$ dans la construction. Soit x_0 un point de ∂S et η: $[0,1] \to S$ une courbe orientée qui paramétrise ∂S et satisfait $\eta(0) = \eta(1) = x_0$.

On suppose que la surface planaire P existe. Par une isotopie de P, on se ramène au cas où toutes les intersections de $\partial P \setminus O$ et de ∂S sont positives, et où P est transversal à S.

Comme toutes les intersections de O avec S sont positives, ce nombre de points d'intersection est aussi l'intersection de $[O] \in H_1(V;\mathbb{R})$ et de $[S] \in H_2(V,\partial V;\mathbb{R})$. Il est donc également le nombre d'intersections de $\partial P \setminus O$ avec ∂S.

Ainsi, les composantes à bord de $S \cap P$ sont p arcs $b_1, ..., b_p$ allant chacun d'une composante de bord de $\partial P \setminus O$ à O. À la source, les préimages de ces arcs découpent la préimage de P en un disque dont l'image dans V est notée D'.

Toutes les composantes sans bord de $P \cap S$ sont contractibles dans S. En effet, une telle composante C découpe dans P une surface planaire P_1 dont le bord ne rencontre pas O. L'intersection homologique de ∂P_1 avec S est 0, l'intersection de C avec S est 0, donc P_1 n'a pas d'autre composante de bord que C (toutes les composantes de $\partial P \setminus O$ ont une intersection $+1$ avec S). La courbe C borde un disque dans P. Elle est donc contractible dans V et donc aussi dans S (car S est π_1–injectée dans V).

On en déduit que la courbe $\partial D'$ est contractible dans $S \times [0,1]$. Sa projection γ dans S, par la projection π le long du facteur $[0,1]$, est alors aussi contractible dans S.

La courbe γ est une concaténation d'arcs fermés

$$\gamma = (a_1 b_1 o_1 c_1)(a_2 b_2 o_2 c_2)...(a_p b_p o_p c_p), \tag{11.0.1}$$

qui vérifient les propriétés suivantes:

(i) Pour tout $1 \leq i \leq p$, $a_i \subset \partial S$ est la projection d'une portion de $\partial P \setminus O$ spiralant dans $\partial S \times [0,1]$ entre $\partial S \times \{0\}$ et $\partial S \times \{1\}$. Si on ferme les deux extrémités de a_i par des arcs $\subset \partial S$ de longueur inférieure (pour une métrique fixée quelconque) à la longueur de η, alors on obtient A_i qui satisfait $[A_i] = [\eta]^n \in \pi_1(S, x_0)$, avec $n \geq 1/\rho - 1$.

(ii) Il existe une permutation σ des p premiers entiers > 0 telle que, pour tout $1 \leq i \leq p$, $c_i = \phi(b^{-1}_{\sigma(i)})$. Ici τ^{-1} désigne l'arc τ parcouru en sens inverse.

(iii) Pour tout $1 \leq i \leq p$, l'arc o_i est la projection d'une portion de O par π.

(iv) Les arcs de la famille $(b_i)_{1\leq i\leq p}$ sont deux à deux disjoints, de même que ceux de la famille $(c_i)_{1\leq i\leq p}$.

La proposition 11.3 suivante montre que si ρ est assez petit, une telle courbe γ ne peut être homotope à zéro, ce qui donne une contradiction. □

Dans tout ce qui suit, la surface S est munie d'une métrique hyperbolique, le bord étant géodésique. Le difféomorphisme ϕ (et pas seulement sa classe d'isotopie) est fixé.

Proposition 11.3 *Soient $\rho, N > 0$, et γ un lacet de S qui satisfait l'equation 11.0.1 et les conditions* (i)–(iv) *ci-dessus. Alors, si ρ assez petit, un tel lacet γ n'est pas contractible dans S.*

Démonstration L'idée de la preuve est de comptabiliser le nombre de fois que γ "tourne" autour de ∂S, et de montrer que, si ρ est assez petit, ce nombre est positif. On voit dans ce cas que γ ne peut pas être homotope à zéro.

Pour ce faire, on remarque que chaque arc a_i "tourne" au moins $1/\rho - 1$ fois autour de ∂S. Les arcs o_i, eux, sont de longueur bornée et font donc autour de ∂S un nombre de "tours" borné *a priori*. Restent les arcs b_i et les arcs c_i qui sont échangés par la monodromie ϕ: leurs contributions se compensent deux à deux (corollaire 11.5).

La difficulté est de préciser ce que "tourner" veut dire. Pour cela, on ferme d'abord les arcs a_i, b_i, c_i et o_i par des arcs de longueur bornée *a priori*, pour considérer non plus des arcs mais des lacets basés en x_0. On note qu'il existe $C > 0$ tel que deux points quelconques de S peuvent être joints par un segment de longueur inférieure à C. En ajoutant des arcs qui relient des extrémités de a_i, b_i, c_i et o_i à x_0, on obtient des lacets A_i, B_i, O_i et C_i. Ici, A_i est défini comme dans la condition (i). Alors γ est homotope à un lacet:

$$\gamma_0 = (A_1B_1O_1C_1)(A_2B_2O_2C_2)\dots(A_pB_pO_pC_p), \tag{11.0.2}$$

où $[A_i] = [\eta]^n$.

Le nombre de "tours" fait par un lacet L autour ∂S se traduit alors par l'apparition de puissances de la classe $[\eta] \in \pi_1(S, x_0)$ dans l'écriture réduite de $[L] \in \pi_1(S, x_0)$ pour un certain système de générateurs de $\pi_1(S, x_0)$. On remarque ici que $\pi_1(S, x_0)$ est un groupe libre. On choisit un système $\langle\alpha_1, \dots, \alpha_{2g(S)}\rangle$ de générateurs de $\pi_1(S, x_0)$ comme suit. On se donne un arc *orienté* géodésique g, d'extrémités incluses dans ∂S et non homotope à un arc de ∂S. On suppose sans perte de généralité (quitte à modifier ϕ) que $\phi(g) \pitchfork g$. On prend un système tel qu'un seul générateur α_1 intersecte g, et que cette intersection soit réduite à un point. On souligne le statut particulier de $[\eta]$, qui se décompose (sans perte de généralité) de la façon suivante:

$$\eta \sim [\alpha_1, \alpha_2] \cdots [\alpha_{2g(S)-1}, \alpha_{2g(S)}]. \tag{11.0.3}$$

Ici, $\sim$ est la relation d'homotopie.

Il faut alors montrer que, pour ρ assez petit, l'écriture réduite de $[\gamma_0] \in \pi_1(S, x_0)$ dans ce système de générateurs comprend un nombre strictement positif de facteurs $[\eta]$, ce qui montre que $[\gamma_0] \neq 1$.

Soit $[B] \in \pi_1(S, x_0)$. On s'intéresse à l'occurence des facteurs $[\eta]$ dans l'écriture réduite de $[B]$ dans ce système de générateurs. Si l'écriture de $[B]$ n'est pas réduite, on compte les facteurs de la même manière, avec la convention qu'il peut y avoir des facteurs d'exposant 0. Par exemple, $[\eta]^2[\eta]^{-1}[\eta]^{-1}$ sera décrit comme $[\eta]^0$ et comptabilisé comme un groupement.

On note $\tilde{S}$ le revêtement universel de S, et $\tilde{\eta}$ (resp. $\tilde{g}$) le rappel de η (resp. g) dans $\tilde{S}$. Pour chaque composante $\tilde{d}$ de $\tilde{\eta}$, on considère l'ensemble $\tilde{g}_{\tilde{d}}$ des composantes de $\tilde{g}$ qui rencontrent $\tilde{d}$ et dont l'orientation au point d'intersection pointe dans S.

Lemme 11.4 *Soit $[B] \in \pi_1(S, x_0)$. Un mot $[\eta]^m$, $m \in \mathbb{Z}$ et $|m|$ maximal, apparaît dans l'écriture réduite de $[B]$ si et seulement si le rappel $\tilde{B}$ de B dans $\tilde{S}$ a une intersection homologique de $m-1$, m ou $m+1$ avec l'un des $\tilde{g}_{\tilde{d}}$.*

Démonstration D'abord, on homotope B à son écriture sous forme réduite. L'intersection homologique avec $\tilde{g}_{\tilde{d}}$ reste invariante pendant l'homotopie. On garde la notation B pour ce nouveau lacet. Sans perte de généralité, on suppose que $m > 1$.

Ensuite, on observe que les seuls rappels des représentants des générateurs qui rencontrent $\tilde{g}_{\tilde{d}}$ sont des relevés de α_1. On suppose qu'il existe un relevé $\tilde{\alpha}_1$ de α_1 dans le rappel $\tilde{B}$ de B qui intersecte $\tilde{g}_{\tilde{d}}$. Alors $\tilde{\alpha}_1^{-1}$ n'apparaît pas dans $\tilde{B}$, car B est sous forme réduite et $\tilde{S}$ est contractible. L'ensemble $\tilde{g}_{\tilde{d}}$ découpe $\tilde{S}$ en composantes adjacentes $\{S_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, où S_i et S_{i+1} bordent la composante $\tilde{g}_i$ de $\tilde{g}_{\tilde{d}}$. (Ici, l'indice i croît dans la direction de l'orientation de $\partial \tilde{S}$.) Alors, si $\tilde{B}$ a une intersection homologique m avec $\tilde{g}_{\tilde{d}}$, le point initial de $\tilde{B}$ est (sans perte de généralité) dans S_0 et le point terminal de $\tilde{B}$ est dans S_m. La première et la dernière intersection de $\tilde{g}_{\tilde{d}}$ avec $\tilde{B}$ sont $\tilde{g}_0 \cap \tilde{\alpha}_1^1$ et $\tilde{g}_{m-1} \cap \tilde{\alpha}_1^2$, où $\tilde{\alpha}_1^1$ et $\tilde{\alpha}_1^2$ sont les relevés de α_1 qui partent de $\tilde{d}$. Les arcs $\tilde{\alpha}_1^1$ et $\tilde{\alpha}_1^2$ délimitent $\tilde{B}_0$, qui est le relevé d'un sous-mot B_0 dans l'écriture réduite de B. (Ici, les arcs $\tilde{\alpha}_1^1$ et $\tilde{\alpha}_1^2$ sont non inclus dans $\tilde{B}_0$.) Comme $\tilde{S}$ est contractible, $\alpha_1 B_0 = \eta^{m-1}$. Le mot $B = \dots(\alpha_1 B_0)\alpha_1 \dots = \dots \eta^{m-1}\alpha_1 \dots$ apparaît dans l'écriture réduite, grâce à l'equation 11.0.3.

Si l'intersection homologique vaut m, alors η^{m-1} apparaît dans l'écriture réduite de B. Réciproquement, si un sous-mot η^m apparaît dans l'écriture réduite de B, alors η^m contribue pour m à l'intersection homologique. Grâce au paragraphe précédent, l'intersection homologique entre $\tilde{B}$ et $\tilde{g}_{\tilde{d}}$ est $\geq m$. □

La caractérisation précédente permet de montrer que l'apparition d'un facteur $[\eta]^m$ dans l'écriture réduite d'un élément $[B] \in \pi_1(S, x_0)$ est une propriété invariante, à une puissance inférieure à un certain r_ϕ près, par le difféomorphisme ϕ.

Corollaire 11.5 *Il existe $r_\phi > 0$ tel qu'une puissance $[\eta]^m$ apparaît dans l'écriture réduite d'un mot $[B] \in \pi_1(S, x_0)$ si et seulement si une puissance $[\eta]^{m+k}$, $-r_\phi \leq k \leq r_\phi$, apparaît dans l'écriture réduite de $[\phi(B)]$.*

Démonstration Les rappels de g et de $\phi(g)$ dans $\tilde{S}$ se rencontrent en un nombre fini de points, borné par M indépendemment de η et des rappels considérés. On note $\tilde{\phi}$ le relevé de ϕ à $\tilde{S}$, qui est l'identité sur $\tilde{d}$.

L'intersection de $\tilde{\phi}(\tilde{B})$ avec $\tilde{\phi}(\tilde{g}_{\tilde{d}})$ en homologie, qui est la même que celle de $\tilde{B}$ avec $\tilde{g}_{\tilde{d}}$ est donc également la même que celle de $\tilde{\phi}(\tilde{B})$ avec $\tilde{g}_{\tilde{d}}$, corrigée d'un facteur $k \in [-M-2, M+2]$.

Par application du lemme 11.4, les sous-mots $[\eta]^m$ qui apparaissent dans l'écriture réduite de $[\phi(B)]$ sont donc les mêmes, éventuellement à $M+4$ unités de puissance près, que ceux qui apparaissent dans celle de $[B]$. On peut prendre $r_\phi = M + 4$. □

Remarque 11.6 En particulier, de nombreux sous-mots $[\eta]^k$, $-r_\phi \leq k \leq r_\phi$ peuvent être présent dans une écriture et pas dans l'autre.

Le lemme qui suit va permettre d'exploiter le fait que les arcs b_i et c_i, $1 \leq i \leq p$, sont plongés, car P l'est.

Lemme 11.7 *Soit δ un arc orienté plongé dans S et $\tilde{\delta}$ un relevé dans $\tilde{S}$. Il existe au plus deux composantes de bord $\tilde{d}_1$ et $\tilde{d}_2$ de $\partial\tilde{S}$ telles que la somme des intersections algébriques entre $\tilde{\delta}$ et $\tilde{g}_{\tilde{d}_i}$ soit, en valeur absolue, supérieure ou égale à 5.*

Démonstration On suppose qu'il existe deux telles composantes $\tilde{d}_1$ et $\tilde{d}_2$. On montre qu'il n'y en a pas d'autre. Ici, on utilise les deux propriétés suivantes: (i) δ est *plongé* dans S et (ii) si $\tilde{\delta}$ intersecte $\tilde{g}_{\tilde{d}}$ plus d'une fois, où $\tilde{d}$ est un relevé de ∂S, alors le sous-arc correspondant de δ spirale parallèlement à ∂S.

Les nombres d'intersection considérés sont invariants par isotopie de δ relative à son bord. On a le fait suivant (la démonstration suit un argument standard où on cherche le sous-arc le plus intérieur):

Fait 1 Il existe une isotopie de δ relative à son bord en un arc plongé δ_0 telle que toutes les intersections de $\tilde{\delta}_0$, obtenu par relèvement de l'isotopie à $\tilde{\delta}$, avec $\tilde{d}_1$ et $\tilde{d}_2$ soient de même signes.

Soient, pour $i = 1, 2$, $\tilde{p}_i$ (resp. $\tilde{q}_i$) la première (resp. la dernière) intersection de $\tilde{g}_{\tilde{d}_i}$ avec $\tilde{\delta}_0$. On note p_i (resp. q_i) la projection de $\tilde{p}_i$ (resp. $\tilde{q}_i$) dans S. Comme δ_0 est plongé, les rappels de p_i et q_i sur une même composante de $\tilde{g}_{\tilde{d}_i}$ sont distincts. On suppose, quitte à échanger les points p_i et q_i, que celui de q_i est situé entre celui de p_i et $\tilde{d}_i$.

Pour chaque i on définit δ_1 comme l'adhérence de la composante de $\delta_0 \setminus p_i$ qui contient q_i et $\tilde{\delta}_1 \subset \tilde{\delta}$ son rappel. On note de plus $\tilde{\delta}_2 \subset \tilde{\delta}_1$ l'arc bordé par $\tilde{p}_i$ et $\tilde{q}_i$.

Fait 2 Si $\tilde{d}$ est un relevé de ∂S dans $\tilde{S}$, distinct de $\tilde{d}_1$ et $\tilde{d}_2$, alors l'intersection de $\tilde{\delta}_1$ dans $\tilde{S}$ avec $\tilde{g}_{\tilde{d}}$ est en valeur absolue inférieure à 1.

Preuve du fait 2 L'arc $\tilde{\delta}_2$ est isotope, relativement à son bord, à un arc contenu dans $\tilde{g}_{\tilde{d}_i} \cup \tilde{d}_i$. Son intersection avec $\tilde{g}_{\tilde{d}}$ est 0 ou ± 1, car c'est le cas pour $\tilde{d}_i$ (S est hyperbolique). Ce nombre d'intersection est de plus invariant par isotopie relative au bord.

Par définition, $\tilde{\delta}_1 \setminus \tilde{\delta}_2$ ne rencontre pas $\tilde{g}_{\tilde{d}_i}$. Il est situé entre deux composantes successives $\tilde{g}_1$ et $\tilde{g}_2$ de $\tilde{g}_{\tilde{d}_i}$. Les points $\tilde{g}_j \cap \tilde{d}_i$ délimitent un sous-arc $\tilde{\beta}$ dans $\tilde{d}_i$. Un translaté $t(\tilde{\delta}_1)$ de $\tilde{\delta}_1$ parallèle à $\tilde{d}_i$ rencontre les deux composantes $\tilde{g}_1$ et $\tilde{g}_2$ en deux points r_1 et r_2. La courbe lisse par morceaux composée de l'union de $\tilde{\beta}$, des sous-arcs de $\tilde{g}_1$ et $\tilde{g}_2$ situés entre r_1 et r_2 et l'intersection avec $\tilde{d}_i$, et le sous arc de $t(\tilde{\delta}_1)$ délimité par r_1 et r_2 est sans point double. Elle borde un disque D dans $\tilde{S}$. Comme δ_0 est plongé, $\delta_1 \setminus \delta_2 \subset D$. L'intersection de β avec $\tilde{g}_{\tilde{d}}$ vaut au plus 1 en valeur absolue. C'est donc également le cas de l'intersection de $\tilde{\delta}_1 \setminus \tilde{\delta}_2$ avec $\tilde{g}_{\tilde{d}}$.

Finalement, l'intersection de $\tilde{g}_{\tilde{d}}$ avec $\tilde{\delta}_1$ est en valeur absolue majorée par 2 (en fait même, par l'intersection de $\tilde{g}_{\tilde{d}}$ avec $\tilde{d}_i$, c'est-à-dire 1). $\square$

Cette démonstration donne également que les intersections de $\tilde{\delta}$ avec $\tilde{g}_{\tilde{d}} \neq \tilde{g}_{\tilde{d}_i}$, $i = 1, 2$, sont toutes (à une unité près) contenues dans $\tilde{\delta}_0 \backslash \tilde{\delta}_1$ et que l'intersection de $\tilde{\delta}_0 \setminus \tilde{\delta}_1$ avec $\tilde{g}_{\tilde{d}}$ est en valeur absolue majorée par 2. □

La longueur des arcs O_i est inférieure à une certaine constante (dépendant de ϕ). L'écriture réduite de O_i dans le système de générateurs choisi est donc de longueur bornée indépendemment de ρ et p. De la même manière, on obtient l'existence de $\eth \in \mathbb{N}$, indépendant de ρ et p, tel que pour tout sous-mot η^k apparaissant dans $A_i = \eta^n$, B_i, C_i ou O_i, alors $-\eth < k < \eth$, sauf éventuellement pour au plus 2 sous-mots dans chaque B_i et C_i (lemme 11.7) et exactement 1 dans chaque A_i.

On applique à présent le corollaire 11.5 à B_i et $\phi(B_i^{-1})$. L'écriture réduite de $\phi(B_i^{-1})$ fait intervenir η avec des exposants situés à distance bornée r_ϕ (indépendemment de ρ et p) des opposés de ceux de B_i. Quitte à changer la valeur de $\eth$ de sorte que $\eth \geq r_\phi$, on suppose, sans perte de généralité, qu'au plus 2 sous-mots dans l'écriture de $\phi(B_i^{-1})$ (et de C_i) ont un exposant en valeur absolu $\geq \eth$.

On calcule la somme totale C des exposants des sous-mots ("maximaux") de type η^k, où $k \geq N\eth$, dans l'écriture réduite de γ_0. (La constante N reste à déterminer.) Un sous-mot maximal de type η^k, $k \geq N\eth$ est dit *long*. Soit c la somme totale des exposants des sous-mots longs présents dans les écritures réduites de $A_i = \eta^n$, B_i, C_i et O_i, c'est-à-dire la somme totale du nombre de sous-mots apparaissant dans l'écriture de γ_0 avant simplification. Comme chaque A_i contribue pour n, chaque paire B_i et C_i contribue pour au moins $-2\eth$ et chaque O_i contribue pour 0, on a $c \geq p(n - 2\eth)$.

Maintenant, on simplifie l'écriture de γ_0 donné par l'équation 11.0.2. Les simplifications s'effectuent nécéssairement aux jonctions des mots réduits. On commence par simplifier à la première jonction, puis ensuite à la première jonction restante.... À une jonction:

(a) soit on fait apparaître, ou disparaître $[\eta]^{\pm 1}$.

(b) soit un sous-mot $[\eta]^r$ d'un côté s'adjoint avec un sous-mot $[\eta]^s$ de l'autre, et soit (b_1) $s \neq -r$ et le processus, pour cette jonction, s'arrête et donne naissance à un sous-mot $[\eta]^{r+s}$, soit (b_2) $r = -s$, et on élimine un sous-mot, la somme totale des exposants restant fixe.

Les cas (a) et (b_1) arrivent au plus une fois chacun à chaque jonction.

Si un sous-mot long ne participe pas à une jonction, alors c ne change pas. Si on prend $N \geq 5$, on ne peut pas créer un sous-mot long par une concaténation successive de η^k avec $k < \eth$. Supposons qu'un ou deux sous-mots longs participent à une jonction. Alors, l'erreur est majorée par $\mathfrak{d}$, et on obtient:

$$C \geq p((n - 2\mathfrak{d}) - 4\mathfrak{d}) = p(n - 6\mathfrak{d}). \tag{11.0.4}$$

Si $n >> 6\mathfrak{d}$ où $\frac{1}{\rho} >> 6\mathfrak{d}$, on a $C >> 0$. Donc le lacet γ_0 n'est pas contractible. □

Références

[1] **F Bourgeois**, **V Colin**, *Homologie de contact des variétés toroïdales*, Geom. Topol. 9 (2005) 299–313

[2] **D Calegari**, *The geometry of* $\mathbf{R}$*–covered foliations*, Geom. Topol. 4 (2000) 457–515

[3] **D Calegari**, *Foliations with one-sided branching*, Geom. Dedicata 96 (2003) 1–53

[4] **D Calegari**, *Promoting essential laminations*, prépublication (2002) `arXiv:math.GT/0210148`

[5] **V Colin**, *Chirurgies d'indice un et isotopies de sphères dans les variétés de contact tendues*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 324 (1997) 659–663

[6] **V Colin**, *Recollement de variétés de contact tendues*, Bull. Soc. Math. France 127 (1999) 43–69

[7] **V Colin**, *Sur la torsion des structures de contact tendues*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 34 (2001) 267–286

[8] **V Colin**, *Chirurgies de Dehn admissibles dans les variétés de contact tendues*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 51 (2001) 1419–1435

[9] **V Colin**, *Une infinité de structures de contact tendues sur les variétés toroïdales*, Comment. Math. Helv. 76 (2001) 353–372

[10] **V Colin**, *Structures de contact tendues sur les variétés toroïdales et approximation de feuilletages sans composante de Reeb*, Topology 41 (2002) 1017–1029

[11] **V Colin**, **E Giroux**, **K Honda**, *On the coarse classification of tight contact structures*, from: "Topology and geometry of manifolds (Athens, GA, 2001)", Proc. Sympos. Pure Math. 71, Amer. Math. Soc. Providence, RI (2003) 109–120

[12] **V Colin**, **E Giroux**, **K Honda**, *Finitude homotopique et isotopique des structures de contact tendues*, en préparation

[13] **M Culler**, **C Gordon**, **J Luecke**, **P Shalen**, *Dehn surgery on knots*, Ann. of Math. (2) 125 (1987) 237–300

[14] **Y Eliashberg**, **A Givental**, **H Hofer**, *Introduction to symplectic field theory*, Geom. Funct. Anal. (2000) 560–673

[15] **Y Eliashberg**, **W Thurston**, *Confoliations*, University Lecture Series 13, American Mathematical Society, Providence, RI (1998)

[16] **S Fenley**, *Foliations, topology and geometry of 3–manifolds: $\mathbf{R}$–covered foliations and transverse pseudo-Anosov flows*, Comment. Math. Helv. 77 (2002) 415–490

[17] **S Fenley**, **L Mosher**, *Quasigeodesic flows in hyperbolic 3–manifolds*, Topology 40 (2001) 503–537

[18] **D Gabai**, *Foliations and the topology of* 3*–manifolds*, J. Differential Geom. 18 (1983) 445–503

[19] **D Gabai**, *Foliations and the topology of* 3*–manifolds. II*, J. Differential Geom. 26 (1987) 461–478

[20] **D Gabai**, *Foliations and the topology of* 3*–manifolds. III*, J. Differential Geom. 26 (1987) 479–536

[21] **D Gabai**, **U Oertel**, *Essential laminations in* 3*–manifolds*, Ann. of Math. (2) 130 (1989) 41–73

[22] **E Giroux**, *Convexité en topologie de contact*, Comment. Math. Helv. 66 (1991) 637–677

[23] **E Giroux**, *Géométrie de contact: de la dimension trois vers les dimensions supérieures*, from: "Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)", Higher Ed. Press, Beijing (2002) 405–414

[24] **H Hofer**, *Pseudoholomorphic curves in symplectizations with applications to the Weinstein conjecture in dimension three*, Invent. Math. 114 (1993) 515–563

[25] **H Hofer**, **M Kriener**, *Holomorphic curves in contact dynamics*, from: "Differential equations: La Pietra 1996 (Florence)", Proc. Sympos. Pure Math. 65, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1999) 77–131

[26] **H Hofer**, **K Wysocki**, **E Zehnder**, *Unknotted periodic orbits for Reeb flows on the three-sphere*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 7 (1996) 219–244

[27] **H Hofer**, **K Wysocki**, **E Zehnder**, *Finite energy foliations of tight three-spheres and Hamiltonian dynamics*, Ann. of Math. (2) 157 (2003) 125–255

[28] **K Honda**, *Gluing tight contact structures*, Duke Math. J. 115 (2002) 435–478

[29] **K Honda**, **W Kazez**, **G Matić**, *Tight contact structures and taut foliations*, Geom. Topol. 4 (2000) 219–242

[30] **K Honda**, **W Kazez**, **G Matić**, *Convex decomposition theory*, Int. Math. Res. Not. (2002) 55–88

[31] **K Honda**, **W Kazez**, **G Matić**, *On the Gabai–Eliashberg–Thurston theorem*, Comment. Math. Helv. 79 (2004) 502–515

[32] **S Makar-Limanov**, *Tight contact structures on solid tori*, Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998) 1013–1044

[33] **L Mosher**, *Laminations and flows transverse to finite depth foliations. Part i: branched surfaces and dynamics*, prépublication

[34] **S Novikov**, *Topology of foliations*, Trans. Moscow Math. Soc. 14 (1963) 268–305

[35] **G Perelman**, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, `arXiv:math.DG/0211159`

[36] **G Perelman**, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, prépublication, `arXiv:math.DG/0303109`

[37] **G Perelman**, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, `arXiv:math.DG/0307245`

[38] **R Roberts**, *Taut foliations in punctured surface bundles. I*, Proc. London Math. Soc. (3) 82 (2001) 747–768

[39] **R Roberts**, *Taut foliations in punctured surface bundles. II*, Proc. London Math. Soc. (3) 83 (2001) 443–471

[40] **S Schwartzman**, *Asymptotic cycles*, Ann. of Math. (2) 66 (1957) 270–284

[41] **W Thurston**, *A norm for the homology of 3–manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. 59 (1986) i–vi and 99–130

[42] **W Thurston**, *Three-manifolds, Foliations and Circles, I*, prépublication, `arXiv:math.GT/9712268`

[43] **W Thurston**, *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982) 357–381