Владикавказский математический журнал
2009, Том 11, выпуск 3, С. 51–61

УДК **517.9**

ОЦЕНКИ ВОЗМУЩЕННОЙ ПОЛУГРУППЫ ОЗЕЕНА[1]

Л. И. Сазонов

К 80-летию академика
Юрия Григорьевича Решетняка

Исследуется вопрос об условиях, при которых возмущенная полугруппа операторов Озеена допускает степенные оценки, аналогичные оценкам невозмущенной полугруппы Озеена. Установлено, что указанный факт имеет место, если возмущенный оператор Озеена не имеет собственных значений в замыкании правой полуплоскости. В частности, результат справедлив для малых в определенном смысле возмущений. Доказательство основано на результатах об обратимости элементов некоторой банаховой алгебры оператор-функций, которые получаются применением локального принципа Аллана — Дугласа.

Ключевые слова: система Навье — Стокса, полугруппа Озеена, локальный принцип Аллана — Дугласа.

1. Введение

Нестационарное движение несжимаемой вязкой жидкости при обтекании тела описывается следующей начально-краевой задачей для системы Навье–Стокса

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu\triangle u - (u,\nabla)u - \nabla p + f, \\ \operatorname{div}\, u = 0,\ u|_{t=0} = a,\ u|_{\partial\Omega} = 0,\ u|_\infty = u_\infty, \end{cases} \tag{1}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — внешность обтекаемого тела, u — поле скорости жидкости, p — функция давления, f — поле внешних сил, ν — коэффициент вязкости.

Осуществляя линеаризацию системы (1) на постоянном решении $u = u_\infty(1,0,0)$ ($f = 0$), получаем линеаризованную систему Озеена (Стокса при $u_\infty = 0$).

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu\triangle u - u_\infty\partial_1 u - \nabla p, \\ \operatorname{div}\, u = 0,\ u|_{t=0} = a,\ u|_{\partial\Omega} = 0,\ u|_\infty = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Эволюционный оператор системы (2) $u(t) = T(t)a$ определен в подходящем банаховом пространстве и образует аналитическую полугруппу, называемую полугруппой Озеена (Стокса при $u_\infty = 0$).

В исследованиях системы Навье — Стокса полугрупповыми методами важную роль играют оценки указанных полугрупп. (См. [1] и приведенную там библиографию об оценках полугруппы Стокса; [2, 3] — об оценках полугруппы Озеена.)

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Аналитической ведомственной целевой программы развития научного потенциала высшей школы, проект № 211/6095.

В данной работе исследуется вопрос об условиях, при которых для возмущенной полугруппы Озеена $\tilde{T}(t)$, связанной с линеаризованной системой Озеена (условия на поле v сформулированы в лемме 1)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \triangle u - u_\infty \partial_1 u - (v, \nabla) u - (u, \nabla) v - \nabla p, \\ \operatorname{div} u = 0, \; u|_{t=0} = a, \; u|_{\partial\Omega} = 0, \; u|_\infty = 0, \end{cases} \tag{3}$$

выполняются оценки, аналогичные оценкам невозмущенной полугруппы. Предварительно рассматривается случай малых возмущений. Оценки получаются непосредственно при исследовании интегрального уравнения для возмущенной полугруппы. В общем случае они вытекают из результатов об обратимости в некоторой банаховой алгебре оператор-функций. Обратимость оператор-функций исследуется на основе локального принципа Аллана — Дугласа [4].

2. Оценки возмущенной полугруппы Озеена при малых возмущениях

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — внешняя область с границей класса C^2, $L_p^3(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ — пространство трехмерных векторных полей на Ω, $W_p^k(\Omega)$, $k = 1, 2$ — соболевские пространства векторных полей, $\dot{W}_p^1(\Omega)$ — подпространство в $W_p^1(\Omega)$, состоящее из полей с нулевым следом на границе $\partial\Omega$. Обозначим через $S_p(\Omega)$ — подпространство в $L_p^3(\Omega)$, являющееся замыканием множества всех финитных гладких соленоидальных полей в области Ω. Известно [5, 6], что оператор Π ортогонального проектирования из $L_2^3(\Omega)$ на подпространство $S_2(\Omega)$ определяет ограниченный проектор $\Pi : L_p(\Omega) \to L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$, называемый гидродинамическим проектором.

Рассмотрим действующий в пространстве $S_p(\Omega)$ оператор Озеена

$$A = \Pi(\triangle - u_\infty \partial_1)$$

с областью определения $D(A) = S_p(\Omega) \cap W_p^2(\Omega) \cap \dot{W}_p^1(\Omega)$.

Оператор Озеена порождает в любом пространстве $S_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ аналитическую полугруппу $T(t)$, для которой справедливы оценки

$$\|T(t)\Pi\partial^\theta\|_{p\to q} \leqslant c_{pq} t^{-\frac{|\theta|}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)}, \tag{4}$$

где $1 < p \leqslant q < \infty$ при $|\theta| = 0$; $\frac{3}{2} \leqslant p \leqslant q < \infty$ при $|\theta| = 1$.

При фиксированном значении $u_\infty \neq 0$ данные оценки установлены в [2] методом гидродинамических потенциалов, в [3] они получены иными методами, причем доказана их равномерность по параметру $u_\infty \in (0, r)$.

Вместе с оператором A рассмотрим возмущенный оператор $\tilde{A} = A + B$, где $Bu = -\Pi((u, \nabla)v + (v, \nabla)u)$.

Лемма 1. *Пусть v — соленоидальное поле, причем $v, \partial_j v \in L_\infty^3(\Omega)$. Тогда возмущенный оператор $\tilde{A}$ с областью определения $D(\tilde{A}) = D(A)$ порождает в любом пространстве $S_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ аналитическую полугруппу $\tilde{T}(t)$.*

$\lhd$ Для резольвенты $R_\lambda(A)$ оператора Озеена при больших $|\lambda|$ в секторе $|\arg\lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta < \pi$ выполняются оценки [2]

$$\|\partial^\theta R_\lambda(A)\|_{p\to p} \leqslant c|\lambda|^{-1+\frac{|\theta|}{2}}, \quad |\theta| = 0, 1, 2.$$

Вследствие этого справедливо неравенство $\|BR_\lambda(A)\|_{p\to p} \leqslant c|\lambda|^{-\frac{1}{2}}$. Поэтому при достаточно большом $|\lambda|$ оператор $BR_\lambda(A)$ имеет малую норму и, следовательно, оператор $I + BR_\lambda(A)$ обратим в пространстве $S_p(\Omega)$ и норма его обратного равномерно ограничена по λ. Но тогда оператор $A + B - \lambda I$ при достаточно больших $|\lambda|$ обратим и

$$\|(A + B - \lambda I)^{-1}\| \leqslant \frac{c}{|\lambda|}.$$

Поэтому согласно теореме Иосиды — Соломяка возмущенный оператор $\tilde{A}$ порождает аналитическую полугруппу в любом пространстве $S_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$. $\rhd$

Для вывода оценок полугруппы $\tilde{T}(t)$ рассмотрим интегральное уравнение для решения $u(t) = \tilde{T}(t)a$ системы (3)

$$u(t) = T(t)a + \int\limits_0^t T(t-\tau)(Bu)(\tau)\, d\tau. \tag{5}$$

Ввиду леммы 1 при любом начальном условии $a \in S_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ уравнение (5) имеет единственное решение $u(t) \in C([0,\infty), S_p(\Omega))$. Вследствие соленоидальности полей u и v поле Bu можно представить в виде $Bu = -\Pi\{(\nabla, v)u + (\nabla, u)v\}$.

Поэтому справедливо неравенство

$$\|u(t)\|_q \leqslant \|T(t)a\|_q + \int\limits_0^t \|T(t-\tau)\Pi\partial\|_{s\to q}\|v\|_\varrho \tau^{-\gamma}\, d\tau \sup_{\tau<t}\|\tau^\gamma u(\tau)\|_q,$$

где для показателей должны выполняться соотношения

$$0 \leqslant \gamma < 1, \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{q} \leqslant \frac{2}{3}, \quad 1 < q < \infty.$$

Очевидно, что при выполнении условия

$$\sup_t \left(t^\gamma \|v\|_\varrho \int\limits_0^t \|T(t-\tau)\Pi\partial\|_{s\to q}\tau^{-\gamma}\, d\tau \right) < \frac{1}{2}, \tag{6}$$

справедлива оценка

$$\|u(t)\|_q \leqslant 2t^{-\gamma}\sup_{\tau<t}\|\tau^\gamma T(\tau)a\|_q.$$

При доказательстве равномерной ограниченности интеграла

$$I(t) = t^\gamma \int\limits_0^t \|T(t-\tau)\Pi\partial\|_{s\to q}\tau^{-\gamma}\, d\tau$$

при $t \in (0, +\infty)$ необходимо варьировать ϱ, так как простая оценка (в которой $\varrho > 3$, $B(\cdot,\cdot)$ — бета-функция Эйлера)

$$I(t) \leqslant c_{sq}t^\gamma \int\limits_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2\varrho}}\tau^{-\gamma}\, d\tau = c_{sq}B\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2\varrho}, 1-\gamma\right) t^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2\varrho}}$$

приводит к ограниченности $I(t)$ лишь при при ограниченных t. При больших t используем представление $I(t) = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t)$, где интегралы $I_j(t)$ распространяются соответственно на отрезки $(0, \frac{t}{2})$, $(\frac{t}{2}, t-1)$, $(t-1, t)$. В первом и втором интегралах считаем $\varrho < 3$, в третьем — $\varrho > 3$. При этом в первом интеграле используем неравенство

$t-\tau \geqslant \frac{t}{2}$, а во втором и третьем — $\tau \geqslant \frac{t}{2}$. В результате получаем оценки $I_1(t) \leqslant ct^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2\varrho}}$, $(\varrho < 3)$; $I_2(t), I_3(t) \leqslant c$, которые влекут ограниченность $I(t)$ при больших t. Заметим, что здесь и ниже мы для различных констант используем одно и то же обозначение c.

Учитывая изложенное, приходим к следующему выводу.

Предложение 1. *Пусть $\delta > 0$, p и q фиксированы, причем δ достаточно мало, $\frac{1}{q} \leqslant \frac{2}{3} - \frac{1}{(3-\delta)}$ и $\gamma = \frac{3}{2}\big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\big) \in [0,1)$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что при выполнении неравенства $\sup\limits_{3-\delta<\varrho<3+\delta} \|v\|_\varrho \leqslant \varepsilon$ для возмущенной полугруппы Озеена справедливы оценки*

$$\|\tilde{T}(t)\|_{p\to q} \leqslant a_{pq} t^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)},$$

где константы a_{pq} не зависят от t.

В дальнейшем этот результат будет значительно усилен.

3. Алгебра функций $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}$

Пусть $C_{\alpha,\beta}[0,\infty)$ $(0 \leqslant \alpha < 1,\ \alpha+\beta > 1)$ — банахово пространство функций на $[0,\infty)$, являющееся замыканием в норме

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{t>0} |t^\alpha (1+t)^\beta f(t)|$$

множества $\tilde{C}_0[0,\infty)$ всех непрерывных на $[0,\infty)$ финитных функций.

Лемма 2. *Множество функций вида $\sum\limits_j e^{-\lambda_j t} P_j(t)$, где $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, $P_j(t)$ — многочлены, плотно в пространстве $C_{\alpha,\beta}[0,\infty)$.*

$\lhd$ Утверждение является простым следствием теоремы Стоуна — Вейерштрасса. $\rhd$

В пространстве $C_{\alpha,\beta}[0,\infty)$ введем операцию свертки, полагая

$$(f*g)(t) = \int\limits_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Тогда

$$|(f*g)(t)| \leqslant \int\limits_0^t (t-\tau)^{-\alpha}(1+t-\tau)^{-\beta}\tau^{-\alpha}(1+\tau)^{-\beta} d\tau \|f\|_{\alpha,\beta}\|g\|_{\alpha,\beta}.$$

Разбивая интегрирование на части от 0 до $\frac{t}{2}$ и от $\frac{t}{2}$ до t, имеем оценку

$$\|f*g\|_{\alpha,\beta} \leqslant C\|f\|_{\alpha,\beta}\|g\|_{\alpha,\beta}, \tag{7}$$

где C не зависит от f и g. Так как для f и g из $\tilde{C}_0[0,\infty)$ $f*g \in \tilde{C}_0[0,\infty)$, то свертка является операцией в $C_{\alpha,\beta}[0,\infty)$. Таким образом, $C_{\alpha,\beta}[0,\infty)$ — алгебра с условием (7). Присоединив единицу 1, превратим алгебру $C_{\alpha,\beta}[0,\infty)$ в алгебру $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}$ с условием (7) и умножением

$$(\lambda 1 + a)*(\mu 1 + b) = \lambda\mu 1 + \lambda b + \mu a + a*b.$$

Тогда алгебра $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}$ топологически изоморфна банаховой алгебре операторов вида $T_a b = a*b$, $(a, b \in \mathscr{A}_{\alpha,\beta})$, действующих на пространстве $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}$, норма в котором есть норма оператора.

На элементах из $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}$ определим преобразование Фурье

$$\mathscr{F}_z(\lambda 1 + f) = \lambda + \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{itz} dt$$

при $z \in \{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ и $\mathscr{F}_\infty(\lambda 1 + f) = \lambda$.

Пусть $\Pi_+ = \{\operatorname{Im} z \geqslant 0\} \cup \{\infty\}$ — одноточечная компактификация верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$. Очевидно, что при любом фиксированном $z \in \Pi_+$ отображение $\mathscr{F}_z$ есть непрерывный мультипликативный функционал на $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}$. Покажем, что любой непрерывный мультипликативный функционал на $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}$ имеет вид преобразования Фурье. Ввиду того, что

$$e^{-\gamma t} * e^{-\delta t} = \frac{e^{-\gamma t} - e^{-\delta t}}{\delta - \gamma}$$

при $\gamma \neq \delta$, для любого мультипликативного функционала φ имеем

$$\varphi(e^{-\gamma t})\varphi(e^{-\delta t}) = \frac{\varphi(e^{-\gamma t}) - \varphi(e^{-\delta t})}{\delta - \gamma}.$$

Введем функцию $\psi(z) = \varphi(e^{-zt})$, определенную для всех z с $\operatorname{Re} z > 0$.

Тогда

$$\psi(z)\psi(w) = -\frac{\psi(z) - \psi(w)}{z - w}. \tag{8}$$

Так как $e^{-wt} \to e^{-zt}$ в норме алгебры $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}$ при $w \to z$, то $\psi(z)$ непрерывна на $\{\operatorname{Re} z > 0\}$. Поэтому из соотношения (8) вытекает ее аналитичность и равенство $\psi'(z) = -\psi^2(z)$. Следовательно, либо $\psi(z) \equiv 0$, либо $\psi(z) = \frac{1}{z+c}$ с $\operatorname{Re} c \geqslant 0$.

Теперь заметим, что ввиду леммы 2 и соотношения

$$(e^{-\gamma t} t^k) * (e^{-\gamma t} t^m) = \frac{k!\, m!}{(k+m+1)!} e^{-\gamma t} t^{k+m+1},$$

множество функций $\{1,\ e^{-\gamma t},\ \operatorname{Re}\gamma > 0\}$ есть множество образующих для алгебры $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}$.

Таким образом, на образующих $e^{-\gamma t}$ для непрерывного мультипликативного функционала φ справедливы соотношения: либо $\varphi(e^{-\gamma t}) = 0$, либо $\varphi(e^{-\gamma t}) = \frac{1}{\gamma + c}$ с некоторой константой c, для которой $\operatorname{Re} c \geqslant 0$. С другой стороны, для преобразования Фурье имеем

$$\mathscr{F}_z(e^{-\gamma t}) = \begin{cases} \frac{1}{(\gamma - iz)}, & \operatorname{Im}\ z \geqslant 0, \\ 0, & z = \infty. \end{cases}$$

Следовательно, любой непрерывный мультипликативный функционал на алгебре $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}$ имеет вид преобразования Фурье $\mathscr{F}_z$, $z \in \Pi_+$. Поэтому элемент a из алгебры $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}$ обратим в этой алгебре тогда и только тогда, когда для любого $z \in \Pi_+$ $\mathscr{F}_z(a) \neq 0$.

Пространство максимальных идеалов алгебры $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}$ гомеоморфно Π_+. Если M_z — максимальный идеал, отвечающий точке $z \in \Pi_+$, то элемент $a \in M_z$, тогда и только тогда, когда $\mathscr{F}_z(a) = 0$.

4. Алгебра оператор-функций $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X)$

Пусть X — банахово пространство, $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в X. Обозначим через $C_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X)$ пространство оператор-функций $U = U(t)$ на $[0, \infty)$ со значениями в $\operatorname{End} X$, которое является пополнением в норме

$$\|U\|_{\alpha,\beta} = \sup_{t>0} \|t^\alpha (1+t)^\beta U(t)\|$$

множества $C_0(\operatorname{End} X)$ всех непрерывных на $[0,\infty)$ финитных оператор-функций. В $C_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X)$ введем операцию свертки $U * V$, полагая

$$(U*V)(t)=\int\limits_0^t U(t-\tau)V(\tau)d\tau.$$

При $0\leqslant\alpha<1$, $\alpha+\beta>1$ (далее считаем это условие всегда выполненным) справедлива оценка

$$\|U*V\|_{\alpha,\beta}\leqslant c\|U\|_{\alpha,\beta}\|V\|_{\alpha,\beta},$$

где константа c не зависит от U и V.

Присоединив к алгебре $C_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X)$ единичный оператор I, получим алгебру $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X)$ топологически изоморфную банаховой алгебре ограниченных операторов вида T_A, действующих на пространстве $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X)$ посредством формулы

$$T_AB=A*B,$$

где для элементов $A=\lambda I+U$, $B=\mu I+V$, $U,V\in C_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X)$ произведение определяется формулой:

$$A*B=\lambda\mu I+\lambda V+\mu U+U*V.$$

Норма в $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X)$ определяется как операторная норма.

В центре алгебры $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X)$ выделим подалгебру элементов вида aI, где $a\in\mathscr{A}_{\alpha,\beta}[0,\infty)$, изометрически изоморфную алгебре $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}[0,\infty)$. Как было установлено выше пространство максимальных идеалов этой алгебры совпадает с одноточечной компактификацией Π_+ полуплоскости $\{\operatorname{Im} z\geqslant 0\}$, а преобразование Гельфанда совпадает с преобразованием Фурье $\mathscr{F}_z$.

На элементах $A=\gamma I+B(t)$ алгебры $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X)$ определим преобразование Фурье:

$$\mathscr{F}_z\big(\gamma I+B(t)\big)=\begin{cases}\gamma I+\int\limits_0^\infty B(t)e^{itz}dt, & \operatorname{Im} z\geqslant 0,\\ \gamma I, & z=\infty,\end{cases}$$

где $\gamma\in\mathbb{C}$, $B(t)\in C_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X)$.

Рассмотрим идеал

$$J_{z_0}=\operatorname{clos}\left\{\sum_{j=1}^n(a_jI)*A_j,\ A_j\in\mathscr{A}_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X),\ a_j\in\mathscr{A}_{\alpha,\beta}[0,\infty),\ \mathscr{F}_{z_0}a_j=0\right\}.$$

Здесь clos означает замыкание множества в норме $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$.

Лемма 3. *Пусть $\alpha>\frac{1}{2}$. Элемент A алгебры $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X)$ принадлежит идеалу J_{z_0} тогда и только тогда, когда $\mathscr{F}_{z_0}(A)=0$.*

$\lhd$ Ясно, что при $A\in J_{z_0}$ для преобразования Фурье имеем $\mathscr{F}_{z_0}(A)=0$. Обратно, пусть $A=\gamma I+B$, $B=B(t)\in C_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X)$ такова, что $\mathscr{F}_{z_0}(A)=\gamma I+\mathscr{F}_{z_0}(B)=0$. Тогда существует последовательность элементов $B_n\in C_0(\operatorname{End} X)$ таких, что $\|B_n-B\|_{\alpha,\beta}\to 0$ при $n\to\infty$. Для преобразований Фурье имеем $\|\mathscr{F}_{z_0}(B_n)-\mathscr{F}_{z_0}(B)\|_{\operatorname{End} X}\to 0$ при $n\to\infty$.

Пусть $z_0\neq\infty$. Введем оператор-функцию

$$A_n(t)=\gamma I+B_n(t)+i\big(\gamma I+\mathscr{F}_{z_0}(B_n)\big)e_+^{-t}(z_0+i),$$

где e_+^{-t} — ограничение функции e^{-t} на $[0,\infty)$.

Так как $\mathscr{F}_z(e_+^{-t}) = (1-iz)^{-1}$, то

$$\mathscr{F}_z(A_n) = \gamma I + \mathscr{F}_z(B_n) - (z_0+i)(z+i)^{-1}\big(\gamma I + \mathscr{F}_{z_0}(B_n)\big) \quad \text{и} \quad \mathscr{F}_{z_0}(A_n) = 0.$$

Заметим теперь, что $\mathscr{F}_z(A_n)$ аналитическая оператор-функция в области $\{\operatorname{Im} z > -1\}$. Представим ее в виде

$$\mathscr{F}_z(A_n) = (z-z_0)(z+i)^{-1}\big[(z+i)(z-z_0)^{-1}\mathscr{F}_z(A_n)\big].$$

Очевидно, что $(z-z_0)(z+i)^{-1} = \mathscr{F}_z(1+i(z_0+i)e_+^{-t})$, поэтому для доказательства включения $A_n \in J_{z_0}$ достаточно установить, что оператор-функция $(z+i)(z-z_0)^{-1}\mathscr{F}_z(A_n)$ является преобразованием Фурье элемента из $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X)$. Используя представление

$$(z+i)(z-z_0)^{-1}\mathscr{F}_z(A_n) = \mathscr{F}_z(A_n) + (z_0+i)(z-z_0)^{-1}\mathscr{F}_z(A_n),$$

приходим к выводу, что достаточно установить этот факт для оператор-функции $(z-z_0)^{-1}\mathscr{F}_z(A_n)$.

Рассмотрим оператор-функцию

$$G(t) = i\int_t^\infty \big(A_n(\tau) - \gamma I\big)e^{-iz_0(t-\tau)}d\tau, \quad t \geqslant 0.$$

Из вида $A_n(t)$ следует, что

$$G(t) = i\int_t^\infty B_n(\tau)e^{-iz_0(t-\tau)}d\tau - i\big(\gamma I + \mathscr{F}_{z_0}(B_n)\big)e^{-t}.$$

Очевидно, что $G(t) \in C_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X)$. Для ее преобразования Фурье имеем представление

$$\mathscr{F}_z(G) = \big(z-z_0\big)^{-1}\big(\gamma I + \mathscr{F}_z(B_n) - (z_0+i)(z+i)^{-1}(\gamma I + \mathscr{F}_{z_0}(B_n)\big).$$

Следовательно, $\mathscr{F}_z(G) = (z-z_0)^{-1}\mathscr{F}_z(A_n)$, поэтому A_n принадлежит идеалу J_{z_0} и так как $A_n \to A$, то $A \in J_{z_0}$ ввиду его замкнутости.

Пусть теперь $\mathscr{F}_\infty(A) = 0$. В общем случае $A \in \mathscr{A}_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X)$ имеет вид $A(t) = \gamma I + B(t)$, где $B(t) \in C_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X)$. Так как $\mathscr{F}_\infty(B) = 0$, то $\gamma = 0$. Можно, не нарушая общности, считать, что $B(t) \in C_0^\infty(\operatorname{End} X)$. Введя $\tilde{B}(t) = B(t)e^t$, для преобразования Фурье имеем представление

$$\mathscr{F}_z(B) = \int_0^\infty \tilde{B}(t)e^{-t+itz}dt.$$

Осуществляя интегрирование по частям, получаем

$$\mathscr{F}_z(B) = (1-iz)^{-1}\tilde{B}(0) + (1-iz)^{-2}\tilde{B}'(0) + \ldots + (1-iz)^{-n}\int_0^\infty \tilde{B}^{(n)}(t)e^{itz-t}dt.$$

Отметим, что $e^{-t}t^\nu \in C_{\alpha,\beta}[0,\infty)$, если выполнено условие $\nu > -\alpha$. Действительно, достаточно рассмотреть случай $\nu < 0$. Пусть

$$f_n(t) = \begin{cases} e^{-t}t^\nu, & t > \frac{1}{n}, \\ e^{-t}n^{-\nu}, & 0 < t < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Тогда $f_n(t) \in C_{\alpha,\beta}[0,\infty)$ и

$$\|f_n - e^{-t}t^\nu\|_{\alpha,\beta} \leqslant 2^\beta \sup_{0<t<\frac{1}{n}} |(n^{-\nu} - t^\nu)t^\alpha| \leqslant 2^{1+\beta} \sup_{0<t<\frac{1}{n}} |t^{\alpha+\nu}| \to 0$$

при $n \to \infty$, если $\nu + \alpha > 0$.

Отметим, что $\mathscr{F}_z(e^{-t}t^{\nu}) = \Gamma(\nu+1)(1-iz)^{-\nu-1}$ при $-1 < \nu < \infty$. Покажем, что $B \in J_\infty$. Для этого представим $\mathscr{F}_z(B)$ в виде

$$\mathscr{F}_z(B) = (1-iz)^{-\mu}\big[(1-iz)^{\mu}\mathscr{F}_z(B)\big].$$

Так как $(1-iz)^{-\mu} = (\Gamma(\mu))^{-1}\mathscr{F}_z(e^{-t}t^{\mu-1})$ и $(\Gamma(\mu))^{-1}e^{-t}t^{\mu-1} \in C_{\alpha,\beta}[0,\infty)$ при $\mu > 1-\alpha$, то достаточно установить, что можно выбрать $\mu > 1-\alpha$ таким, что оператор-функция $(1-iz)^{\mu}\mathscr{F}_z(B)$ является преобразованием Фурье оператор-функции из $C_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X)$. Учитывая разложение $\mathscr{F}_z(B)$, имеем

$$(1-iz)^{\mu}\mathscr{F}_z(B) = (1-iz)^{\mu-1}\tilde{B}(0) + (1-iz)^{\mu-2}\tilde{B}'(0) + \ldots + (1-iz)^{\mu-n}\int\limits_0^\infty \tilde{B}^{(n)}(t)e^{-t+itz}dt.$$

Так как при $k-\mu > 0$ выполняется соотношение $(1-iz)^{\mu-k} = (\Gamma(k-\mu))^{-1}\mathscr{F}(e^{-t}t^{k-\mu-1})$, то должны выполняться условия $k-\mu-1 > -\alpha$, $k = 1,2,\ldots$, что при $k=1$ дает $\mu < \alpha$. Таким образом, должно выполняться неравенство $1-\alpha < \mu < \alpha$, что возможно при $\alpha > \frac{1}{2}$. Далее считаем, что это условие выполнено. Теперь остается показать, что оператор-функция

$$D(z) = (1-iz)^{\mu-n}\int\limits_0^\infty \tilde{B}^{(n)}(t)e^{-t+itz}dt$$

является преобразованием Фурье оператор-функции из $C_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X)$, по крайней мере, при достаточно больших n. Это верно, так как $D(z)$ является аналитической при $\operatorname{Im} z > -1$ и все ее производные $D^{(k)}(z)$ удовлетворяют оценкам $\|D^{(k)}(z)\| \leqslant c(1+|z|)^{\mu-n}$. Поэтому обратное преобразование Фурье оператор-функции $D(z)$, по крайней мере, $n-2$ раза непрерывно дифференцируемо, обращается в нуль при $t < 0$ и ее норма убывает быстрее любой степени t при $t \to \infty$. $\rhd$

Выясним условия обратимости элемента A в алгебре $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X)$. Согласно локальному принципу Аллана — Дугласа элемент A обратим в алгебре $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X)$ тогда и только тогда, когда для любого $z_0 \in \Pi_+$ фактор-класс $A + J_{z_0}$ обратим в фактор-алгебре $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X)/J_{z_0}$. Сформулируем условия обратимости в терминах преобразования Фурье. Если A обратима в $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X)$, то $\mathscr{F}_z(A)$ — обратимый оператор для любой точки $z \in \Pi_+$. Обратно, предположим, что $\mathscr{F}_z(A)$ обратим для любого $z \in \Pi_+$. Пусть $z_0 \neq \infty$ и $B = [\mathscr{F}_{z_0}(A)]^{-1}$. Рассмотрим оператор-функцию $\tilde{B}(t) = e^{-t}(1-iz_0)B \in \mathscr{A}_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X)$. Так как $\mathscr{F}_z[e^{-t}] = \frac{1}{1-iz}$, то $\mathscr{F}_z(\tilde{B}) = \frac{1-iz_0}{1-iz}B$. Для оператор-функции $A(t) * \tilde{B}(t) - I$ имеем $\mathscr{F}_{z_0}(A(t) * \tilde{B}(t) - I) = 0$. Поэтому $A(t) * \tilde{B}(t) - I \in J_{z_0}$. Следовательно, фактор-класс $A(t) + J_{z_0}$ обратим в фактор-алгебре $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}/J_{z_0}$. Если $z_0 = \infty$, то $\mathscr{F}_\infty(A) = \gamma I$. Поэтому обратимость $\mathscr{F}_\infty(A)$ эквивалентна условию $\gamma \neq 0$ и значит $\mathscr{F}(A\gamma^{-1}I - I) = 0$. Но тогда при $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ оператор-функция $A\gamma^{-1}I - I \in J_\infty$. Следовательно, обратимость $\mathscr{F}_z(A)$ для любого $z \in \Pi_+$ влечет обратимость фактор-класса $A + J_z$ в фактор-алгебре $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}/J_z$ для любого $z \in \Pi_+$. Поэтому в силу локального принципа Аллана — Дугласа элемент A обратим в алгебре $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X)$.

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Пусть $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Элемент $A \in \mathscr{A}_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} X)$ обратим в этой алгебре тогда и только тогда, когда для любого $z \in \Pi_+$ оператор $\mathscr{F}_z(A)$ обратим.*

5. Оценки возмущенной полугруппы Озеена

Применим теорему 1 к выводу степенных оценок для возмущенной полугруппы Озеена. Рассмотрим оператор-функцию $T(t)B$ (см. п. 2). Для нее справедливы оценки

$$\|T(t)B\|_{p\to q} \leqslant ct^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{q}\right)}\|v\|_{\varrho}, \tag{9}$$

причем должны выполняться условия

$$\frac{1}{q} \leqslant \frac{1}{p}+\frac{1}{\varrho} \leqslant \frac{2}{3}, \quad 1 < p, q < \infty.$$

Пусть $q > 3$, $v \in L^3_\varrho(\Omega)$ для всех $\varrho \in [\varrho_1, \infty]$, где $\varrho_1 < 3$. Тогда в силу (9) для оператор-функции $T(t)B$ справедлива оценка

$$\|T(t)B\|_{q\to q} \leqslant ct^{-\frac{1}{2}}(1+t)^{-\gamma},$$

где $\gamma = \min\left(\frac{3}{2\varrho_1}, \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{q}\right)\right)$. Так как $\gamma + \frac{1}{2} > 1$ ($q > 3$!), то оператор-функция $T(t)B$ принадлежит любой алгебре $C_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} S_q(\Omega))$ с условиями $q > 3$, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, $\alpha+\beta = \gamma + \frac{1}{2} > 1$.

Предположим, что оператор $I - \mathscr{F}_z[T(t)B]$ для любого $z \in \Pi_+$ обратим в пространстве $S_q(\Omega)$ ($q > 3$). Тогда оператор-функция $I - T(t)B$ обратима в алгебре $\mathscr{A}_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} S_q(\Omega))$, т. е. существует оператор-функция $A(t) \in C_{\alpha,\beta}(\operatorname{End} S_q(\Omega))$ такая, что выполняются соотношения

$$(I - A(t)) * (I - T(t)B) = (I - T(t)B) * (I - A(t)) = I. \tag{10}$$

Представляя уравнение для определения $u(t) = \tilde{T}(t)u_0$ в виде свертки

$$(I - T(t)B) * u(t) = T(t)u_0$$

и применяя левую свертку с оператор-функцией $I - A(t)$, в силу (10) получаем, что

$$u(t) = \tilde{T}(t)u_0 = (I - A(t)) * T(t)u_0,$$

или в развернутом виде

$$u(t) = T(t)u_0 - \int\limits_0^t A(t-\tau)T(\tau)u_0 d\tau. \tag{11}$$

Далее, из представления (11) вытекает оценка

$$\|u(t)\|_q \leqslant \|T(t)u_0\|_q + c\int\limits_0^t (t-\tau)^{-\alpha}(1+t-\tau)^{-\beta}\tau^{-\gamma}d\tau \sup_{\tau<t}\|\tau^\gamma T(\tau)u_0\|_q, \quad 0<\gamma<1. \tag{12}$$

Обозначим интеграл в (12) через $I(t)$. При малых t имеем

$$I(t) \leqslant ct^{1-\alpha-\gamma}.$$

При больших t разбиваем его в сумму двух интегралов $I(t) = I_1(t) + I_2(t)$ соответственно с интегрированием от 0 до $\frac{t}{2}$ и от $\frac{t}{2}$ до t. В первом случае $t - \tau > \frac{t}{2}$, во втором $\tau > \frac{t}{2}$. Поэтому при больших t справедливы оценки

$$I_j(t) \leqslant ct^{1-\alpha-\beta-\gamma}.$$

Например, для $I_2(t)$ имеем

$$I_2(t) \leqslant \int\limits_{t/2}^{t} (t-\tau)^{-\alpha}(1+t-\tau)^{-\beta}\left(\frac{t}{2}\right)^{-\gamma} d\tau \leqslant \mathrm{const}\, t^{1-\alpha-\beta-\gamma}.$$

Таким образом, при $q > 3$ установлено неравенство

$$\|\tilde{T}(t)u_0\|_q \leqslant ct^{-\gamma}\sup_t \|t^\gamma T(t)u_0\|_q. \tag{13}$$

Полагая $u_0 = \Pi\partial^\theta v_0$ и используя оценки невозмущенной полугруппы, получаем

$$\|\tilde{T}(t)\Pi\partial^\theta\|_{p\to q} \leqslant c_{pq}t^{-\frac{|\theta|}{2}-\frac{3}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \tag{14}$$

при выполнении следующих условий

$$|\theta| \leqslant 1, \quad \frac{|\theta|}{2}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) < 1, \quad q > 3, \quad 1 < p \leqslant q,$$

причем $p \geqslant \frac{3}{2}$ при $|\theta| = 1$.

Некоторые ограничения на p, q можно ослабить. Возвращаясь к интегральному уравнению, определяющему $u(t) = \tilde{T}(t)\Pi\partial^\theta v_0$, имеем

$$\|u(t)\|_q \leqslant c_{pq}t^{-\frac{|\theta|}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|v_0\|_p + \int\limits_0^t \|T(t-\tau)B\|_{r\to q}\|u(\tau)\|_r\, d\tau.$$

Для интеграла с учетом (9) и (14) справедлива оценка

$$\int\limits_0^t \|T(t-\tau)B\|_{r\to q}\|u(\tau)\|_r d\tau \leqslant ct^{\frac{1}{2}-\frac{|\theta|}{2}-\frac{3}{2\varrho}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)},$$

причем должны выполняться условия

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{q}\right) < 1, \quad \frac{|\theta|}{2}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right) < 1,$$

$$\frac{1}{q} \leqslant \frac{1}{r}+\frac{1}{\varrho} \leqslant \frac{2}{3}, \quad r > 3, \quad 1 < p \leqslant q < \infty, \quad p \geqslant \frac{3}{2} \text{ при } |\theta| = 1.$$

Можно считать, что

$$\frac{3}{2} \leqslant q \leqslant 3, \quad 1 < p \leqslant q \ \text{ при } \ |\theta| = 0;$$

$$\frac{3}{2} < q \leqslant 3, \quad \frac{3}{2} < p \leqslant q \ \text{ при } \ |\theta| = 1.$$

Действительно, если $q > \frac{3}{2}$, то положив $\varrho = 3$ и выбирая $r > 3$ достаточно близким к 3, добиваемся выполнения указанных условий. Если $|\theta| = 0$, $q = \frac{3}{2}$, то ϱ следует выбирать меньше 3 и достаточно близким к 3.

Таким образом, установлено, что неравенство (14) справедливо при выполнении условий

$$1 < p \leqslant q < \infty, \quad q \geqslant \frac{3}{2} \ \text{ при } \ |\theta| = 0, \quad \frac{3}{2} < p \leqslant q < \infty \ \text{ при } \ |\theta| = 1,$$

$$\frac{|\theta|}{2}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) < 1.$$

Последнее ограничение можно снять воспользовавшись мультипликативностью полугруппы.

Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Предположим, что оператор* $I - \mathscr{F}_z[T(t)B]$ *для любого* $z \in \Pi_+$ *обратим в пространстве* $S_q(\Omega)$ *при любом* $q > 3$. *Тогда для возмущенной полугруппы Озеена справедливы оценки*

$$\|\tilde{T}(t)\Pi\partial^\theta\|_{p\to q} \leqslant c_{pq} t^{-\frac{|\theta|}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \tag{15}$$

при выполнении следующих условий

$$|\theta| \leqslant 1, \quad 1 < p \leqslant q < \infty, \quad q \geqslant \frac{3}{2},$$

причем $p > \frac{3}{2}$ *при* $|\theta| = 1$.

Сформулируем условия теоремы в терминах возмущенного оператора Озеена. В работе [2] установлено, что при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$

$$\mathscr{F}_z[T(t)B] = R_{-iz}(A)B,$$

где $R_{-iz}(A)$ — резольвента оператора Озеена, причем данный оператор компактен. Там же доказано, что при $q > 2$ и $\operatorname{Im} z \geqslant 0$

$$\operatorname*{Ker}_q(I - R_{-iz}(A)B) = \operatorname*{Ker}_q(\tilde{A} + izI),$$

причем ядра не зависят от q.

Поэтому справедлива

Теорема 3. *Пусть при некотором* $q > 2$ *возмущенный оператор Озеена* $\tilde{A} : S_q(\Omega) \to S_q(\Omega)$ *не имеет собственных значений в полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$. *Тогда для возмущенной полугруппы Озеена справедлива оценка* (15).

Литература

1. *Солонников В. А.* Об оценках нестационарной задачи Стокса в анизотропных пространствах С. Л. Соболева и об оценках резольвенты оператора Стокса // Успехи мат. наук.—2003.—Т. 58, вып. 2, № 350.—С. 123–156.
2. *Сазонов Л. И.* Обоснование метода линеаризации в задаче обтекания // Изв. РАН. Сер. матем.—1994.—Т. 58, № 5.—С. 85–109.
3. *Kobayashi T., Shibata Y.* On the Oseen equation in exterior domains // Math. Ann.—1998.—Vol. 310.—P. 1–45.
4. *Bötcher A., Silbermann B.* Analysis of toeplitz operators.—Berlin: Akademie-Verlag, 1989.—410 p.
5. *Galdi G. P.* An Introduction to the mathematical theory of the Navier–Stokes equations.—N. Y.: Springer, 1994.—Vol. 1.—448 p.
6. *Сазонов Л. И.* Гидродинамический проектор во внешней области.—Ростов-на-Дону, 2000.—14 с.—Деп. в ВИНИТИ, № 3148-В00.

Статья поступила 11 декабря 2008 г.

Сазонов Леонид Иванович
Южный федеральный университет,
доцент кафедры выч. мат-ки и мат. физики
Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8-А;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
зав. лабораторией мат. физики
E-mail: `sazonov@ns.math.rsu.ru`