Владикавказский математический журнал
2009, Том 11, выпуск 4, С. 63–69

УДК **512.552.32+514.146.7**

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ РАШЕВСКОГО

И. А. Хубежты

Дано описание бесконечной проективной плоскости w_3^*, в которой конфигурационная теорема 8_3 выполняется проективно, называемой плоскостью Рашевского, и доказана муфанговость этой плоскости, тем самым положительно решена проблема Рашевского: «Не муфангова ли плоскость w_3^*?».

Ключевые слова: характеристика проективной плоскости, муфангова плоскость, плоскость Рашевского.

Рассмотрим частный случай теоремы Дезарга, а именно следующую конфигурационную теорему (рис. 1).

Если для трехвершинников $\overline{1}\ \overline{2}\ \overline{3}$ и $\overline{1'}\ \overline{2'}\ \overline{3'}$ существует центр $\overline{4}$ перспективы, стороны одного инцидентны вершинам другого и точки $\overline{5}$, $\overline{6}$, $\overline{7}$ пересечения сходственных сторон инцидентны одной прямой, то $(\overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7})$.

Эту теорему, имеющую ранг 7 и состоящую из 10 точек и 10 прямых, обозначим через $L(7;10;10) = L_7$ [4].

Выясним связи между L_7 и нижеследующими конфигурационными теоремами Рашевского 8_3 и 13_4 [2].

Теорема 1 (К. Теорема 8_3 (рис. 2) [2]**).** *Если B, C, D — точки одной прямой, перспективно связаны с точками B', C', D' другой прямой, то после круговой подстановки над B', C', D' перспективное соответствие сохраняется.*

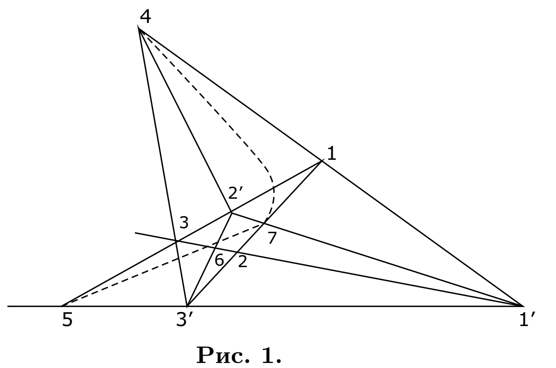

Рис. 1.

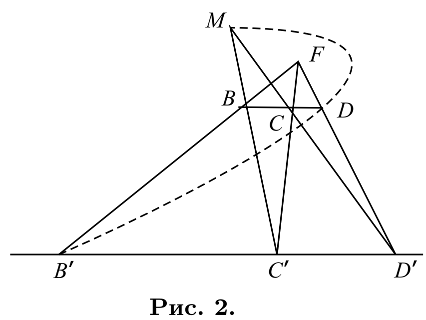

Рис. 2.

Теорема 2 (К. Теорема 13_4 (рис. 3) [2]**).** *Если для точек B, C, B', C' общего положения и точек $A = [B, C] \cap [B', C']$, $P = [B, C'] \cap [B', C]$, $Q = [A, P] \cap [C, C']$, $D = [B', Q] \cap [C, B]$, $D' = [B, Q] \cap [B', C']$, $R = [D, C'] \cap [C, D']$, $F = [C, C'] \cap [B, B']$, $M = [C, D'] \cap [B, C']$, $N = [C, B'] \cap [D, C']$ выполняются инциденции (D, D', P, F),*

(B, B', R, F), (P, Q, R, A), (A, M, N, F), $(B, D',\ Q, N)$, *то выполняется и замыкающая* (D, B', Q, M) (*рис.* 3).

В [2] доказано, что 8_3 проективно эквивалентна 13_4, а конфигурация 13_4 есть полное свободное расширение 8_3, т. е. плоскость над $QF(3)$.

Теорема 3 [4]**.** *В проективной плоскости теорема* L_7 *эквивалентна теореме* 13_4 *и, следовательно, теореме* 8_3.

$\lhd$ Доказательство теоремы 3 разобьем на четыре леммы.

Лемма 1. $13_4 \Rightarrow L_7$ (*рис.* 1, 3).

$\lhd$ Рассмотрим два трехвершинника $AC'C$ и FBD' с инциденциями $F\,I\,[C, C']$, $B\,I\,[A, C]$, $D'\,I\,[A, C']$, $M = [A, F] \cap [C', B] \cap [C, D']$, $B' = [A, C'] \cap [F, B]$, $D = [A, C] \cap [F, D']$, $Q = [C, C'] \cap [B, D']$ и докажем (M, D, B', Q), исходя из 13_4. С этой целью выберем в L_7 следующие четыре точки общего положения B, C, B', C' и построим 13_4 по вышеуказанной таблице инциденций. Тогда в силу выполнения 13_4 в плоскости в ней имеет место инциденция $(M, B', D, Q) \Rightarrow L_7$. Отсюда следует также, что L_7 вложена в 13_4. $\rhd$

Лемма 2. $L_7 \Rightarrow 13_4$.

$\lhd$ Докажем, что из L_7 следуют все инциденции 13_4. С этой целью рассмотрим в 13_4 шесть пар трехвершинников:

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) = \{BB'Q; C'CA\}, && (\mathrm{II}) = \{CC'P; D'DA\},\\
&(\mathrm{III}) = \{MC'C; FD'B\}, && (\mathrm{IV}) = \{NC'C; FB'D\},\\
&(\mathrm{V}) = \{CC'M; PRF\}, && (\mathrm{VI}) = \{CC'N; RPF\}.
\end{aligned}
$$

Учитывая, что в $Q\,I\,[C, C']$, $B\,I\,[C, A]$, $B'\,I\,[C', A]$, $P = [B', C] \cap [B, C'] \cap [A, Q]$, прямая $[F, D']$, где $F = [B, B'] \cap [C, C']$, $D' = [B, Q] \cap [C', A]$, инцидентна P, то заключаем, что для трехвершинников (I) выполняются условия L_7 и, следовательно, выполняется и замыкающая инциденция (P, F, D, D'), где $D = [B', Q] \cap [C, A]$, или, другими словами, трехвершинники (I) в 13_4 порождают конфигурацию L_7. Этот факт запишем так: (I) $\Rightarrow (P, F, D, D')$. Аналогичными рассуждениями при учете (P, F, D, D') устанавливаем, что (II) $\Rightarrow (P, A, R)$ и (F, R, B, B'). Далее, сравнивая (P, A, Q) и (P, A, R), заключаем (P, A, Q, R). Если учесть, что в (III) $F\,I\,[C, C']$, $D'\,I\,[M, C]$, $B\,I\,[M, C']$ и точки $P = [M, C'] \cap [F, D']$, $R = [M, C] \cap [F, B]$, $Q = [C, C'] \cap [D', B]$ лежат в силу (II), на одной прямой (оси перспективы), $A = [C', D'] \cap [C, B]$ лежит на оси, то заключаем, что (A, F, M). Далее имеем, что (IV) $\Rightarrow (A, F, N)$. Сравнивая последние две инциденции, мы приходим к (A, M, N, F). Опираясь на рассуждения, аналогичные предыдущим, заключаем, что (V) $\Rightarrow (B, D'Q, N)$. Так как в (VI) $F\,I\,[C, C']$, $P\,I\,[C, N]$, $R\,I\,[C', N]$, (Q, B', D), где $Q = [C', C] \cap [P, R]$, $B' = [C, N] \cap [R, F]$, $D = [C', N] \cap [P, F]$, $M = [C, R] \cap [C', P] \cap [N, F]$ в силу предыдущих инциденций, то (D, Q, M, B'). Итак, из L_7 следуют все инциденции теоремы 13_4. $\rhd$

Лемма 3. $8_3 \Rightarrow L_7$.

$\lhd$ Пусть трехвершинники $\overline{1}\ \overline{2}\ \overline{3}$ и $\overline{1}'\ \overline{2}'\ \overline{3}'$ имеют центр $\overline{4}$, точками пересечения сходственных сторон будут точки $\overline{5}$, $\overline{6}$ и $\overline{7}$ и вершины одного лежат на сторонах другого. Докажем $8_3 \Rightarrow (\overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7})$. С этой целью рассмотрим в L_7 пару коллинеарных троек $\overline{2}'\overline{3}\ \overline{5}$ и $\overline{7}\ \overline{2}\ \overline{3'}$ с центром перспективы в точке $\overline{1}'$. В силу 8_3 тогда пара $\overline{2}'\overline{3}\ \overline{5}$ и $\overline{2}\ \overline{3}'\overline{7}$ также перспективна с центром в $[\overline{2}', \overline{3}] \cap [\overline{2}, \overline{3'}] = 4$. Следовательно, $8_3 \Rightarrow (\overline{4}, \overline{5}, \overline{7})$. Аналогичному этому, из перспективности пары $4\ \overline{\overline{1}'\overline{1}}$ и $\overline{3}'\overline{6\ \overline{2}'}$ с центром в $\overline{3}$ в силу 8_3 следует перспективность пары $\overline{4\ \overline{1}'\overline{1}}$ и $\overline{6}\ \overline{2}'\overline{3}'$ с центром в $[\overline{1}',\overline{2}']\cap[\overline{2},\overline{3}']$. Итак, $8_3\Rightarrow(\overline{4},\overline{6},\overline{7})$. $\rhd$

Лемма 4. $L_7\Rightarrow 8_3$.

$\lhd$ В L_7 выделим пару коллинеарных и перспективных троек $\overline{2}'\overline{3}\ \overline{5}$ и $\overline{7}\ \overline{2}\ \overline{3}'$ (см. рис. 1) с центром $1'=[\overline{2}',\overline{7}]\cap[\overline{3},\overline{2}]\cap[\overline{5},\overline{3}']$. Так как в L_7 точки $\overline{4},\overline{5}$ и $\overline{7}$ коллинеарны, то тройки $\overline{2}'\overline{3}\ \overline{5}$ и $\overline{2}\ \overline{3}'\overline{7}$ перспективны с центром в $4=[\overline{2}',\overline{2}]\cap[\overline{3},\overline{3}']\cap[\overline{5},\overline{7}]$. Это значит, что 8_3, порожденная вышеуказанными тройками коллинеарных точек, замыкается. (Заметим, что доказательство импликаций $L_7\Rightarrow 8_3$ и $8_3\Rightarrow L_7$ в силу результатов Рашевского $8_3\Rightarrow 13_4$, $13_4\Rightarrow 8_3$ могут быть опущены, как следствия из $L_7\Rightarrow 13_4$ и $13_4\Rightarrow L_7$.) $\rhd$

Теорема 4. *Из 8_3 следует первая малая теорема Паппа.*

$\lhd$ Пусть для точек $\overline{4},\overline{6},\overline{2}$ прямой l_1 и точек $\overline{1},\overline{3},\overline{5}$ прямой l_2 плоскости Рашевского выполняются инциденции:

$$\overline{7}=[\overline{1},\overline{6}\cap[\overline{3},\overline{4}],\quad \overline{8}=[\overline{3},\overline{6}]\cap[\overline{2},\overline{1}],\quad [\overline{4},\overline{8}]\cap[\overline{1},\overline{3}]=\overline{5},\quad \overline{9}=[\overline{5},\overline{6}]\cap[\overline{3},\overline{2}],$$

тогда выполняется и инциденция $(\overline{7},\overline{8},\overline{9})$.

Докажем соотношение $8_3\Rightarrow(\overline{7},\overline{8},\overline{9})$ (рис. 4).

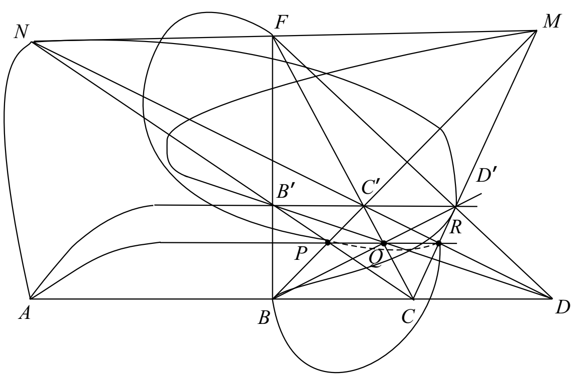

Рис. 3.

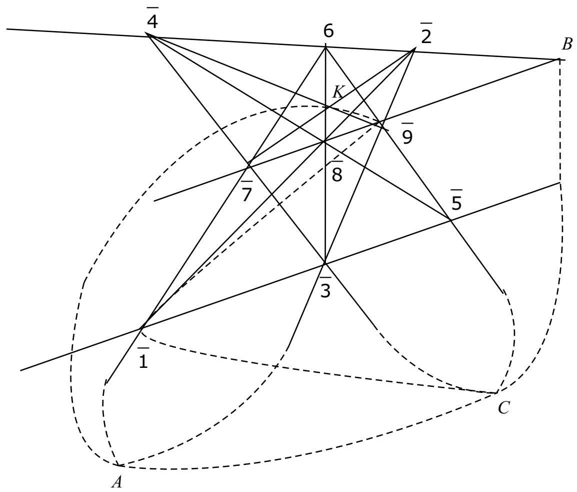

Рис. 4.

1) $L_7\{\overline{3}\,\overline{4}\,\overline{2};\,\overline{6}\,\overline{9}\,\overline{7}\}:(\overline{3},\overline{4},\overline{7}),\ (\overline{3},\overline{2},\overline{9}),\ (\overline{2},\overline{4},\overline{6}),\ K=[\overline{3},\overline{6}]\cap[\overline{2},\overline{7}]\cap[\overline{4},\overline{9}],\ A=[\overline{2},\overline{3}]\cap[\overline{6},\overline{7}]$, $B=[\overline{2},\overline{4}]\cap[\overline{7},\overline{9}]$, $C=[\overline{9},\overline{6}]\cap[\overline{3},\overline{4}]\Rightarrow(A,B,C,K)$,

2) Рассмотрим точки $\overline{8}'=[\overline{3},\overline{6}]\cap[\overline{7},\overline{9}]$ и $\overline{8}=[\overline{3},\overline{6}]\cap[\overline{4},\overline{5}]\cap[\overline{1},\overline{2}]$ и докажем их совпадение нижеследующим образом:

(2.1) $8_3\begin{pmatrix}\overline{6} & \overline{2} & B\\ \overline{7} & \overline{3} & C\end{pmatrix}$, $[\overline{6},\overline{7}]\cap[\overline{2},\overline{3}]\cap[B,C]=A\Rightarrow\begin{pmatrix}\overline{6} & \overline{2} & B\\ \overline{3} & C & \overline{7}\end{pmatrix}$, $[\overline{6},\overline{3}]\cap[\overline{2},C]\cap[B,\overline{7}]=\overline{8}'$, $\overline{8}'=[\overline{3},\overline{6}]\cap[B,\overline{7},\overline{9}]$, $(\overline{2},C,\overline{8}');(\overline{3},\overline{6},\overline{8}')$;

(2.2) $8_3\begin{pmatrix}\overline{4} & \overline{6} & \overline{2}\\ \overline{7} & \overline{9} & \overline{8}'\end{pmatrix}$, $[4,7]\cap[\overline{6},\overline{9}]\cap[\overline{2},\overline{8}]=C$, $\begin{pmatrix}\overline{4} & \overline{6} & \overline{2}\\ \overline{9} & \overline{8}' & \overline{7}\end{pmatrix}$, $[\overline{4},\overline{9}]\cap[\overline{6},\overline{8}']\cap[\overline{2},\overline{7}]=K$; $(\overline{6},\overline{8}',K)$, $\overline{8}'=[\overline{2},C]\cap[\overline{3},\overline{6}]\cap[\overline{7},\overline{9},B]\cap[\overline{6},K]\Rightarrow(K,\overline{6},\overline{3},\overline{8}')$;

(2.3) $8_3\begin{pmatrix}\overline{7} & K & \overline{2}\\ \overline{1} & \overline{3} & B\end{pmatrix}$, $[\overline{1},\overline{7}]\cap[K,\overline{3}]\cap[\overline{2},B]=\overline{6}$, $K=[\overline{3},\overline{6}]\cap[\overline{4},\overline{9}]$, $(K,\overline{4},\overline{9})$, $\begin{pmatrix}\overline{7} & K & \overline{2}\\ B & \overline{1} & \overline{3}\end{pmatrix}$, $[\overline{7},B]\cap[\overline{1},K]\cap[\overline{2},\overline{3}]=\overline{9}$, $(\overline{9},\overline{1},K,\overline{4})$, $(\overline{1},\overline{4},\overline{9})$;

(2.4) $8_3\begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{3} & \overline{5}\\ \overline{7} & \overline{8}' & \overline{9}\end{pmatrix}$, $[\overline{1},\overline{7}]\cap[\overline{3},\overline{8}']\cap[\overline{5},\overline{9}]=\overline{6}$, $\begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{3} & \overline{5}\\ \overline{9} & \overline{7} & \overline{8}'\end{pmatrix}$, $[\overline{1},\overline{9}]\cap[\overline{7},\overline{3}]\cap[\overline{8}',\overline{5}]=Q$, $\overline{4}=[\overline{1},\overline{9},\overline{4}]\cap[\overline{3},\overline{7},\overline{4}]=Q\Rightarrow(\overline{5},\overline{4},\overline{8}')$, $\overline{8}'=[\overline{4},\overline{5}]\cap[\overline{7},\overline{9}]\cap[\overline{3},\overline{6}]$, $\overline{8}=[\overline{3},\overline{6}]\cap[\overline{4},\overline{5}]\Rightarrow\overline{8}'=\overline{8}\Rightarrow$ $(\overline{7},\overline{8},\overline{9})$. $\triangleright$

Следствие 4′. *В тернарном кольце плоскости Рашевского операция сложения* (+) *подчиняется аксиомам абелевой группы, т. е. из* 8_3 *следует выполнение аксиом абелевой аддитивной группы.* (*Доказательство предложения* 4′ *следует из теоремы* 4 *и теоремы Рашевского — Аргунова* [1, 2] : *«Из проективного выполнения первой малой теорема Паппа* (Π_1) *следует выполнение аксиом аддитивной абелевой группы в тернаре плоскости».*)

Теорема 5. $L_7\Rightarrow a+a+a=0$ *при любом* a.

$\triangleleft$ Пусть образующие точки L_7 имеют координаты: $\overline{1}=(0)$, $\overline{2}=(0,0)$, $\overline{3}=(a,a)$, $\overline{4}=(\infty)$ (см. рис. 5), тогда:

$\overline{1}'=[\overline{4},\overline{1}]\cap[\overline{2},\overline{3}]=l_\infty\cap[y=x]=(1)$,
$\overline{2}'=[\overline{4},\overline{2}]\cap[\overline{1},\overline{3}]=[x=0]\cap[y=a]=(0,a)$,
$\overline{3}'=[\overline{4},\overline{3}]\cap[\overline{1},\overline{2}]=[x=a]\cap[y=0]=(a,0)$,
$\overline{5}=[\overline{1},\overline{2}]\cap[\overline{1}',\overline{2}']=[y=0]\cap[y=x+a]=(-a,0)$,
$\overline{6}=[\overline{1},\overline{3}]\cap[\overline{1}',\overline{3}']=[y=a]\cap[y=x-a]=(a+a,a)$,
$\overline{7}=[\overline{2},\overline{3}]\cap[\overline{2}',\overline{3}']=[y=x]\cap[y=x\cdot f\circ a]=(x_7,y_7)=(x_7,x_7\cdot f\circ a)=(x_7,x_7)$,
$\overline{3}\cdot I\iff 0=a\cdot f\circ a\Rightarrow -a=af$, $a=-af$, $a\cdot f\circ(-af)=0$ при любом a.

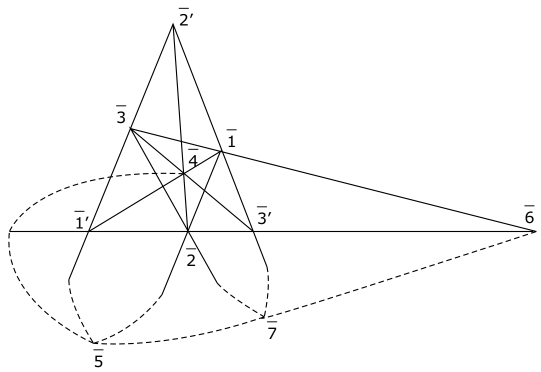

Рис. 5 (L_7).

Отсюда

$$f=-1\quad\text{и}\quad a(-1)=-a. \tag{$*$.1}$$

$(\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{4})\iff x_6=x_5\iff -a=a+a=x_7\Rightarrow$

$$a+a+a=0. \tag{$*$.2}$$

$\overline{7}=(-a,-a)=(-a,(-a)(-1)\circ a)=(-a,a+a)$,

$$(-a)\cdot(-1)\circ a=a+a=(a)(-1)+a, \tag{$*$.3}$$

$$-a=a(-1)=a(1+1)\iff a+a=a(1+1).\ \triangleright \tag{$*$.4}$$

Теорема 6. $8_3\Rightarrow a\cdot m\circ b=am+b$ *при любых* a, m, b.

$\triangleleft$ Пусть в 8_3 $A'=(a,a\cdot m\circ b)$, $B'=(k,k+q)$, $C'=(am,am+q)$, $k=am+q-b$, $q=a\cdot m\circ b-a$, $B=(k,k+b)$, $C=(am,am+b)$ (см. рис. 2′), тогда:

$[B,B']\cap[C,C']=Y=(\infty)$, $A=[Y,A']\cap[B,C]=[x=a]\cap[y=x+b]=(a,a+b)$,

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A & B & C \\ B' & C' & A' \end{pmatrix} \iff M = [A, B'] \cap [B, C'] \cap [C, A'],$$

$[A, B'] = [y = x \cdot f \circ t]\, I\, A \iff a + b = a \cdot f \circ t$, $B'\, I \iff k + q = k \cdot f \circ t \Rightarrow a + b - k - q = a \cdot f \circ t - k \cdot f \circ t \iff$

$$Y_A - Y_{B'} = am + b - a \cdot m \circ b = a \cdot f \circ t - k \cdot f \circ t = p, \tag{$*.1$}$$

$[A', C] = [y = x \cdot f_1 \circ t_1]\, I\, A' \iff a \cdot m \circ b = a \cdot f_1 \circ t_1$, $I\, C \iff am + b = am \cdot f_1 \circ t_1 \Rightarrow$

$$Y_C - Y_{A'} = am + b - a - a \cdot m \circ b = am \cdot f_1 \circ t_1 - a \cdot f_1 \circ t_1 = p, \tag{$*.2$}$$

$[B, C] = [y = x \cdot f_2 \circ t_2]\, I\, B \iff k + b = k \cdot f_2 \circ t_2$, $I\, C' \iff am + q = am \cdot f_2 \circ t_2 \Rightarrow Y_b - Y_{C'} = k + b - am - q = k \cdot f_2 \circ t_2 - am \cdot f_2 \circ t_2 \iff$

$$am - q - b + b - am + q = 0 = k \cdot f_2 \circ t_2 - am \cdot f_2 \circ t_2 \Rightarrow \tag{$*.3$}$$

$$f_2 = 0, \ \ [B, C'] = [y = k + b] = [y = am + q], \ \ Y_B - Y_{C'} = 0, \tag{$*.4$}$$

$$\{(*.1), (*.2)\} \Rightarrow a \cdot f \circ t - k \cdot f \circ t = am \cdot f_\circ t_1 - a \cdot f_1 \circ t_1. \tag{$*.5$}$$

Уравнение (*.5) при $f = f_1 = 0$ сводится к тождеству $0 = 0$, уравнения (*.1) и (*.2) дают: $p = am + b - a \cdot m \circ b = 0 \iff a \cdot m \circ b = am + b$. $\triangleright$

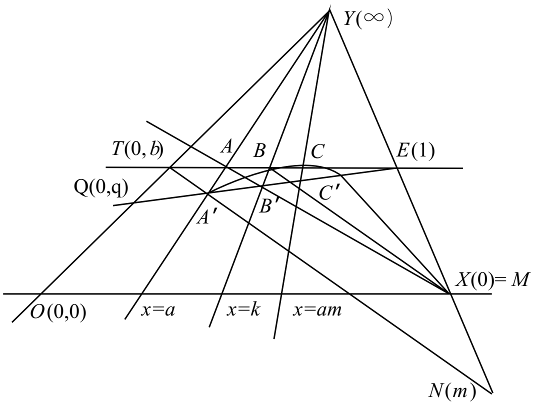

Рис. 2′ (8_3).

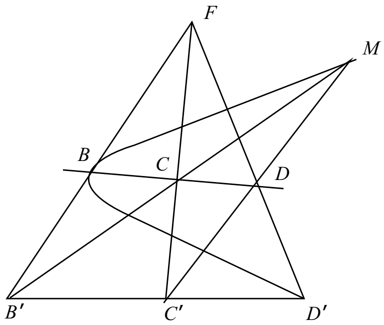

Рис. 6.

Теорема 7. $8_3 \Rightarrow (-a - b)r = -ar - br$ *при любых* a, b, r.

$\triangleleft$ Пусть в 8_3 $B' = (a, ar)$, $C' = (b, br)$, $D' = (-a - b, (-a - b)r)$, $C = (b, ar)$, $D = (-a-b, (-a-b)r-br+ar)$ (см. рис. 6), тогда: $F = CC' \cap DD' = [x = b] \cap [x = -a-b] = (\infty)$, $B = FB' \cap CD = [x = a] \cap [y = xr-br+ar] = (a, -ar-br)$, $M = B'C \cap C'D = [y = ar] \cap [y = xf + t]$, $C'\, I \iff br = bf + t \Rightarrow t = br - bf$, $D\, I \iff (-a - b)r - br + ar = (-a - b)f + t$.

$(-a - b)r - br + ar = (-a - b)f + br - bf$,

$$(-a - b)r - br + ar = (-a - b)f - bf. \tag{$*.1$}$$

$BD' = [y = x\varphi + t']$, $B\, I \iff -ar - br = a\varphi + t'$, $D'\, I \iff (-a - b)r = (-a - b)\varphi + t'$,

$$(-a - b)r + ar + br = (-a - b)\varphi - a\varphi. \tag{$*.2$}$$

$\{(*.1), (*.2)\} \Rightarrow (-a - b)\varphi - a\varphi = (-a - b)f - af \Rightarrow \varphi = f \Rightarrow C'D \cap BD' = M = (f)$, $B'C = [y = ar] = [y = x \cdot 0 + ar]\, I\, (0)$, $B'C \cap l_\infty = (0)$, $M = C'D \cap B'C \cap BD' \iff$

$$[y = xf + t] \cap [y = x \cdot 0 + ar] \cap [y = xf + t'] = (0) = (f) = (\varphi). \tag{$*.3$}$$

$\{(*.1) - (*.3)\} \Rightarrow (-a - b)r = -ar - br$. $\triangleright$

Следствие 7′. *Из теоремы 7 следуют:*

(1) $(-a)b = (a+a)b = ab + ab = -ab$;

(2) $(-a-b)r = -ar - br = (-a)r + (-b)r \Rightarrow -a = k,\ -b = p,\ (k+p)r = kr + pr$ *при любых* k, p, r.

Теорема 8. $8_3 \Rightarrow a(b+c) = ab + ac$ *при любых* a, b, c.

$\lhd$ (рис. 6). Пусть в 8_3 $B' = (0,0)$, $C' = (-a, -a(b+c))$, $D' = (a, a(b+c))$, $D = (a, -ab-ac)$, $C = (-a, 0)$, тогда: $F = CC' \cap BB' = (\infty)$, $DC = [y = xq + t]\, I\, C \iff 0 - aq + t \Rightarrow t = aq$, $D\, I \iff -ab - ac = aq + t = q + a = -aq \iff aq = ab + ac$, $DC = [y = xq + aq]$, $B = CD \cap FB' = [y = xq + aq] \cap [x = 0] = (0, aq) = (0, ab + ac)$, $M = B'C \cap C'D \cap BD' = [y = 0] \cap [y = xf_1 + t_1] \cap [y = xf_2 + ab + ac]$, $C'\, I \iff -a(b+c) = -af_1 + t_1$, $D\, I \iff -ab - ac = af_1 + t_1$,

$$-a(b+c) + ab + ac = -af_1 - af_1 = af_1, \quad a = 1,\ f_1 = 0, \tag{$*.1$}$$

$D'\, I \iff a(b+c) = af_2 + ab + ac$,

$$a(b+c) - ab - ac = af_2 \iff \text{при } a = 1,\ f_2 = 0, \tag{$*.2$}$$

$$\{(*.1), (*.2)\} \Rightarrow af_1 + af_2 = 0 \quad \forall\, a \neq 0. \tag{$*.3$}$$

Тривиальное решение $f_1 = f_2 = 0$ уравнения (*.3) относительно f_1 и f_2 приводит к равенству

$$a(b+c) = ab + ac. \tag{$*.5$}$$

Таким образом, доказано, что $8_3 \Rightarrow a(b+c) = ab + ac$ при всех a, b, c. $\rhd$

Следствие 8′. *Очевидно, что из* $(*.5)$ *и* $a + a + a = 0$ *при* $b = c$ *следует* $a(b+b) = a(-b) = ab + ab = -ab$.

Теорема 9. $8_3 \Rightarrow a \cdot a^{-1}b = b$, $a \neq 0$.

$\lhd$ (рис. 6). Пусть в 8_3 $C = (-a, 0)$, $C' = (-a, -a \cdot a^{-1}b)$, $B' = (0,0)$, $D' = (a, a \cdot a^{-1}b)$, $D = (a, -b)$, тогда $CD = [y = x\varphi + t]\, I\, C \iff 0 = -a\varphi + t \Rightarrow t = a\varphi$, $D\, I \iff -b = a\varphi + t = a\varphi + a\varphi = -a\varphi \Rightarrow$

$$b = a\varphi, \tag{$*.1$}$$

$$CD = [y = x\varphi + a\varphi] = [y = x\varphi + b], \tag{$*.2$}$$

$F = CC' \cap DD' = (\infty)$, $B = CD \cap FB' = [y = x\varphi + b] \cap [x = 0] = (0, b)$, $M = CB' \cap C'D = [y = 0] \cap [y = xf + t'] = (x_m, 0)$,

$$\left.\begin{array}{c} C'\, I \iff -a \cdot a^{-1}b = -af + t' \Rightarrow t' = af - a \cdot a^{-1}b \\ D\, I \iff -b = af + t' \Rightarrow t' = -b - af \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$af - a \cdot a^{-1}b = -b - af \iff +af + a \cdot a^{-1}b = +b \iff$$

$$af = b - a \cdot a^{-1}b, \quad a = 1,\ f = 0, \tag{$*.3$}$$

$$M\, I\, BD' = [y = xs + b]\, I\, D' \iff a \cdot a^{-1}b = as + b, \quad a = 1,\ s = 0, \tag{$*.4$}$$

$$\{(*.3), (*.4)\} \Rightarrow b = a \cdot a^{-1}b - as = a \cdot a^{-1}b + af \Rightarrow$$

$$as + af = 0 \quad \forall\, a \neq 0. \tag{$*.5$}$$

Тривиальное решение $s = f = 0$ уравнения (*.5) относительно s и f приводит к равенству:

$$b = a \cdot a^{-1}b \quad \forall\, a \neq 0,\ b. \ \triangleright \qquad (*)$$

В силу теорем 1–9 в тернаре плоскости Рашевского w_3^* выполняются все аксиомы левоальтернативного и, следовательно [3], альтернативного тела характеристики $p = 3$. Тем самым получено положительное решение проблемы Рашевского: «Не муфангова ли плоскость w_3^*, в которой 8_3 выполняется проективно?» (Эту проблему Петр Константинович Рашевский поставил перед нами — его стажерами МГУ — в 1969 г.)

Литература

1. *Аргунов Б. И.* Конфигурационные постулаты и их алгебраические эквиваленты // Мат. сб.—1950.—Т. 26(68), № 3.—С. 425–456.
2. *Рашевский П. К.* Проективная геометрия с новыми конфигурационными аксиомами // Мат. сб.—1940.—Т. 8(50), № 2.—С. 183–203.
3. *Скорняков Л. А.* Проективные плоскости // Успехи мат. наук.—1951.—Т. 6, вып. 6.—С. 112–154.
4. *Хубежты И. А.* Теорема L_7 // Геометрия инцидентностных структур и дифференциальных уравнений.—Смоленск, 1973.—С. 92–95.

Статья поступила 16 июля 2008 г.

Хубежты Исидор Антонович
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова, *профессор кафедры алгебры и геометрии*
РОССИЯ, 362040, г. Владикавказ, ул. Ватутина, 46