Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 3, С. 35–42

УДК **519.17**

РАСШИРЕНИЯ ПСЕВДОГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРАФОВ ДЛЯ $pG_{s-5}(s,t)$[1]

А. К. Гутнова, А. А. Махнев

В работе найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — исключительные псевдогеометрические графы для $pG_{s-5}(s,t)$.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, псевдогеометрический граф, собственное значение графа.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $\Gamma(a)=\Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается $[a]$, если граф Γ фиксирован. Положим $a^\perp=\{a\}\cup[a]$.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если степень любой вершины из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами* (v,k,λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k, и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами* (v,k,λ,μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами, и $[a]\cap[b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Пусть $\mathscr{F}$ — некоторый класс графов. Граф Γ назовем *локально* $\mathscr{F}$*-графом*, если $[a]$ лежит в $\mathscr{F}$ для любой вершины a графа Γ.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ $(\Gamma_{i-1}(u))$ с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0,b_1,\ldots,b_{d-1};c_1,\ldots,c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i=0,\ldots,d$. Положим $a_i=k-b_i-c_i$.

Система инцидентности с множеством точек P и множеством прямых $\mathscr{L}$ называется *α-частичной геометрией порядка* (s,t), если каждая прямая содержит ровно $s+1$ точку, каждая точка лежит ровно на $t+1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой, и для любого антифлага $(a,l)\in(P,\mathscr{L})$ найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих l (обозначение $pG_\alpha(s,t)$). В случае $\alpha=1$ геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s,t)$. Точечный граф геометрии определяется на множестве точек P и две точки смежны, если они лежат на прямой. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с $v=(s+1)(1+st/\alpha)$, $k=s(t+1)$, $\lambda=s-1+t(\alpha-1)$, $\mu=\alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами

[1] Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда, проект № 15-11-10025 (теорема 1 и следствие), а также соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (теорема 2).

для некоторых натуральных чисел α, s, t называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s,t)$.

Дж. Кулен предложил задачу изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с неглавным собственным значением меньше либо равным t для данного натурального числа t. Заметим, что сильно регулярный граф с нецелым собственным значением является графом в половинном случае, а вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы в половинном случае, либо имеет диаметр 2, либо является графом Тэйлора. Таким образом, задача Кулена сводится к описанию дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с неглавным собственным значением t для $t = 1, 2, \ldots$

В [1] завершено решение задачи Кулена для $t = 4$ и псевдогеометрических окрестностей вершин. В работе [2] получена редукция задачи Кулена для $t = 5$ к случаю, когда окрестности вершин — исключительные графы.

В данной работе рассматриваются дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин — исключительные псевдогеометрические графы для $pG_{s-5}(s,t)$. Выделим сначала параметры (s,t), которые имеет исключительный псевдогеометрический граф для $pG_{s-5}(s,t)$, вкладываемый в качестве окрестности вершины в дистанционно регулярный граф.

Предложение. *Пусть* Γ *— исключительный псевдогеометрический граф для* $pG_{s-5}(s,t)$. *Если* Γ *вкладывается в качестве окрестности вершины в дистанционно регулярный граф диаметра, большего 2, то его параметры* (s,t) *лежат в одном из следующих списков:*

(1) $(6,3)$, $(6,4)$, $(6,6)$, $(6,8)$, $(6,9)$, $(6,12)$, $(6,14)$, $(6,15)$, $(6,22)$, $(6,24)$, $(6,29)$, $(6,30)$, $(6,36)$;

(2) $(7,1)$, $(7,4)$, $(7,6)$, $(7,8)$, $(7,9)$, $(7,14)$, $(7,15)$, $(7,18)$, $(7,22)$, $(7,24)$, $(7,29)$, $(7,34)$, $(7,36)$, $(7,50)$, $(7,54)$;

(3) $(8,2)$, $(8,4)$, $(8,6)$, $(8,9)$, $(8,10)$, $(8,12)$, $(8,14)$, $(8,18)$, $(8,24)$, $(8,30)$, $(8,34)$, $(8,39)$, $(8,42)$, $(8,54)$, $(8,66)$, $(8,74)$, $(8,84)$;

(4) $(9,12)$, $(9,24)$, $(9,44)$, $(9,48)$, $(9,84)$, $(9,144)$, $(10,4)$, $(10,16)$, $(10,24)$, $(10,27)$, $(10,38)$, $(10,49)$, $(10,54)$, $(10,60)$, $(10,104)$, $(10,126)$, $(10,159)$, $(10,214)$.

Теорема 1. *Пусть* Γ *— вполне регулярный граф диаметра, большего 2, в котором окрестности вершин — исключительные псевдогеометрические графы для* $pG_{s-5}(s,t)$. *Если диаметр* Γ *больше 3, то либо* $s = 6$ *и* $t \in \{3,4,6,8,9\}$, *либо* $s = 7$ *и* $t = 1$. *Если же диаметр* Γ *равен 3, то либо* $s = 10$ *и* Γ *— граф Тэйлора, либо выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $s = 9$, $t = 12$ *и* $118 \leqslant \mu \leqslant 162$;

(2) $6 \leqslant s \leqslant 8$.

Теорема 2. *Пусть* Γ *— вполне регулярный граф диаметра 3, в котором окрестности вершин — псевдогеометрические графы для* $GQ(6,t)$, $t \in \{3,4,6,9,12,14,15,22,24,29,30,36\}$. *Тогда верно одно из утверждений:*

(1) $t = 3$, $\mu \in \{6,7,9,12,14,18,19,21,24,27,28,36,38,42,54,57,63,76,84\}$;

(2) $t = 4$, $\mu \in \{6,8,10,12,14,16,18,20,24,28,30,36,40,42,48,50,56,60,70,72,80,84,90,100,112,120,126,140\}$;

(3) $t = 6$, $\mu \in \{18,24,28,36,42,54,56,72,74,50,84,108,126,148,168\}$;

(4) $t = 8$, $\mu \in \{32,36,42,48,54,56,72,84,96,98,112,126,144,168,196,224,252\}$;

(5) $t=9$, $\mu \in \{36, 42, 44, 45, 54, 55, 60, 63, 66, 70, 77, 81, 84, 90, 99, 105, 108, 110, 126, 132, 140, 154, 162, 165, 189, 198, 210, 220, 231, 252, 264, 270, 297, 308, 315\}$;

(6) $t=12$, $\mu \in \{72, 84, 108, 112, 126, 144, 146, 168, 216, 252, 292, 336, 378\}$;

(7) $t=14$, $\mu \in \{72, 84, 90, 102, 118, 120, 126, 136, 140, 168, 170, 180, 196, 204, 210, 238, 252, 280, 294, 306, 360, 392, 408, 420, 476, 490\}$;

(8) $t=15$, $\mu \in \{78, 84, 90, 91, 98, 105, 108, 117, 126, 130, 140, 135, 147, 156, 180, 182, 189, 195, 196, 210, 234, 245, 252, 260, 270, 273, 294, 315, 351, 364, 378, 420, 441, 455, 490, 510, \}$;

(9) $t=22$, $\mu \in \{132, 152, 154, 168, 196, 198, 224, 252, 264, 266, 294, 308, 342, 392, 396, 418, 456, 462, 504, 528, 588, 616, 684\}$;

(10) $t=24$, $\mu \in \{144, 160, 168, 174, 180, 210, 216, 232, 224, 240, 252, 270, 280, 288, 290, 336, 348, 360, 378, 406, 420, 432, 464, 480, 504, 522, 540, 560, 580, 630, 672, 696, 720, 756, 812, 840\}$;

(11) $t=29$, $\mu \in \{180, 203, 210, 225, 252, 261, 290, 300, 315, 348, 350, 406, 420, 435, 450, 522, 525, 580, 609, 630, 700, 725, 812, 870, 1015\}$;

(12) $t=30$, $\mu \in \{210, 216, 252, 270, 280, 360, 362, 420, 504, 540, 630, 724, 840\}$;

(13) $t=36$, $\mu \in \{248, 252, 294, 324, 336, 372, 378, 392, 432, 434, 496, 504, 558, 588, 648, 672, 744, 756, 784, 868, 882, 1008, 1116, 1134\}$.

Следствие. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geqslant 3$, в котором окрестности вершин — исключительные псевдогеометрические графы для $pG_{s-5}(s,t)$. Тогда верно одно из утверждений:*

(1) $s=10$ и Γ — граф Тэйлора;

(2) $s=7$ либо $t=1$ и Γ — локально $T(9)$-граф с массивом пересечений $\{36,21,10,3;1,6,15,28\}$ (половинный 9-куб) либо $t=18$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{512,378,1;1,189,512\}$;

(3) $s=6$ и либо $t=4$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{175,144,22;1,24,154\}$ или $\{175,144,1;1,12,175\}$, либо $t=8$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{343,288,1;1,96,343\}$.

Для доказательства следствия полезен следующий результат.

Лемма 1 [4, теорема 20]**.** *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geqslant 3$ и степени $k > 2$. Если $k_2 \leqslant 3k/2$ (равносильно $c_2 \geqslant 2b_1/3$), то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $d=3$ и Γ — двудольный граф или граф Тэйлора;

(2) Γ — граф Джонсона $J(7,3)$ или 4-куб.

2. Вполне регулярные локально псевдо $pG_{s-5}(s,t)$-графы

Лемма 2. *Пусть Γ — псевдогеометрический граф для $pG_{s-5}(s,t)$, Δ — регулярный подграф степени $(s-5)(t+1)$ на w вершинах. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) $v(st-5t+s-10)/(st+s-5) \leqslant w \leqslant (s-4)v/(s+1)$, если одно из этих нестрогих неравенств превращается в равенство, то любая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна с $5(t+1)w/(v-w)$ вершинами из Δ;

(2) если X_i — множество вершин из $\Gamma-\Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ, $x_i = |X_i|$, то $(2st+2s+t-4)^2 w \cdot x_0 \leqslant (v-w)(v-x_0)(t+6)^2$;

(3) если $w = x_0$, то $2(st+t+s+1)x_0 \leqslant v(t+6)$.

$\lhd$ Ввиду [4] верны неравенства $-(t+1) \leqslant (s-5)(t+1) - 5(t+1)w/(v-w) \leqslant 5$.

Отсюда $v(st-5t+s-10)/(st+s-5)\leqslant w\leqslant (s-4)v/(s+1)$. Если одно из этих нестрогих неравенств превращается в равенство, то ввиду [6] любая вершина из $\Gamma-\Delta$ смежна точно с $5(t+1)w/(v-w)$ вершинами из Δ.

По предложению 4.6.1 из [5] имеем $w\cdot x_0\leqslant (v-w)(v-x_0)(t+6)^2/(2s(t+1)-5+(t+1))^2$. Поэтому $(2st+2s+t-4)^2w\cdot x_0\leqslant (v-w)(v-x_0)(t+6)^2$.

Если $w=x_0$, то $(2st+2s+t-4)x_0\leqslant (v-x_0)(t+6)$, поэтому $(2st+2s+2t+2)x_0\leqslant v(t+6)$. $\rhd$

Лемма 3. *Если диаметр Γ больше 3, то либо $s=6$ и $t\in\{3,4,6,8,9\}$, либо $s=7$ и $t=1$.*

$\lhd$ Пусть Γ содержит геодезический 4-путь u, w, x, y, z. Тогда в графе $[x]$ между $[u]\cap[x]$ и $[x]\cap[z]$ нет ребер и ввиду леммы 2 имеем $v(st-5t+s-10)/(st+s-5)\leqslant w\leqslant v(t+6)/(2st+2s+2t+2)$. Поэтому $2(st+s+t+1)(st-5t+s-10)\leqslant (st+s-5)(t+6)$.

В случае $s=6$ имеем $14(t+1)(t-4)\leqslant (6t+1)(t+6)$, поэтому $t\leqslant 9$. Ввиду предложения $t\in\{3,4,6,8,9\}$.

В случае $s=7$ имеем $16(t+1)(2t-3)\leqslant (7t+2)(t+6)$, поэтому $t\leqslant 3$. Так как псевдогеометрический граф для $pG_3(7,3)$ не является исключительным графом, то $t=1$.

В случае $s=8$ имеем $16(t+1)4t\leqslant 4(2t-1)(t+5)$ и $t=1$, противоречие. $\rhd$

Лемма 4. *Если диаметр Γ равен 3, то либо $s=10$ и Γ — граф Тэйлора, либо $s=9$, $t=12$ и $118\leqslant\mu\leqslant 162$, либо $6\leqslant s\leqslant 8$.*

$\lhd$ Если $s=10$, то Γ — граф Тэйлора.

Пусть $s=9$. Тогда $k=v'=(s+1)(1+st/(s-5))=5(9t+4)/2$, $\lambda=k'=s(t+1)=9(t+1)$, $b_1=6st/(s-5)=27t/2$ и t делится на 4. Ввиду леммы 2 имеем $(19t+14)^2\mu\cdot x_0\leqslant (5(9t+4)/2-\mu)(5(9t+4)/2-x_0)(t+6)^2$.

Если $t=24$, то $k=v'=550$, $\lambda=k'=225$, $b_1=324$, $238\leqslant\mu\leqslant 324$ и $4\cdot 238\cdot 242^2\cdot x_0\leqslant 4\cdot 242^2\mu\cdot x_0\leqslant 212(550-x_0)30^2$, поэтому $x_0=1$, противоречие.

Значит, $t=12$, $k=v'=280$, $\lambda=k'=117$, $b_1=162$, $118\leqslant\mu\leqslant 162$ и μ делит $280\cdot 162$.

Лемма 4, а вместе с ней и теорема 1 доказаны. $\rhd$

3. Вполне регулярные локально псевдо $GQ(6,t)$-графы

В леммах 5–9 предполагается, что Γ — вполне регулярный граф с параметрами (v,k,λ,μ) диаметра, большего 2, в котором окрестности вершин — псевдогеометрические графы для $GQ(6,t)$ с параметрами $(42t+7,6t+6,5,t+1)$ и неглавными собственными значениями $5,-(t+1)$. Заметим, что каждый μ-подграф регулярен степени $t+1$, поэтому в случае четного t параметр μ четен.

Лемма 5. *Пусть u, w — вершины из Γ с $d(u,w)=2$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *$7(t-4)\leqslant\mu\leqslant 36t$ и μ делит $7\cdot 36t(6t+1)$;*

(2) *если X_i — множество вершин из $[w]-[u]$, смежных точно с i вершинами из $[u]\cap[w]$, $x_i=|X_i|$, то $(13t+8)^2\mu\cdot x_0\leqslant (42t+7-\mu)(42t+7-x_0)(t+6)^2$;*

(3) *если $x_0=\mu$, то $\mu\leqslant (t+6)(6t+1)/(2t+2)$.*

$\lhd$ Ввиду леммы 1 верны неравенства $7(t-4)\leqslant\mu\leqslant 36t$ и μ делит $7\cdot 36t(6t+1)$.

Имеем $(13t+8)^2\mu\cdot x_0\leqslant (42t+7-\mu)(42t+7-x_0)(t+6)^2$. Если $x_0=\mu$, то $(13t+8)\mu\leqslant (42t+7-\mu)(t+6)$, поэтому $\mu\leqslant (t+6)(6t+1)/(2t+2)$. $\rhd$

Лемма 6. *Если $t=3$, то верны следующие утверждения:*

(1) $\mu\in\{6,7,9,12,14,18,19,21,24,27,28,36,38,42,54,57,63,76,84\}$;

(2) *если диаметр* Γ *больше* 3, *то* $\mu \leqslant 21$.

$\lhd$ В случае параметров $(133, 24, 5, 4)$ по лемме 6 имеем $4 < \mu < 108$. Так как μ делит $28 \cdot 27 \cdot 19$, то $\mu \in \{6, 7, 9, 12, 14, 18, 19, 21, 24, 27, 28, 36, 38, 42, 54, 57, 63, 76, 84\}$.

Если диаметр Γ больше 3, то ввиду утверждения (3) леммы 5 имеем $\mu \leqslant 9 \cdot 19/8$, поэтому $\mu \leqslant 21$. $\rhd$

Аналогично доказываются следующие две леммы.

Лемма 7. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *если* $t = 4$, *то* $\mu \in \{6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 36, 40, 42, 48, 50, 56, 60, 70, 72, 80, 84, 90, 100, 112, 120, 126, 140\}$, *в случае* $d(\Gamma) > 3$ *имеем* $\mu \leqslant 25$;

(2) *если* $t = 6$, *то* $\mu \in \{18, 24, 28, 36, 42, 54, 56, 72, 74, 50, 84, 108, 126, 148, 168\}$, *в случае* $d(\Gamma) > 3$ *имеем* $\mu \leqslant 31$.

Лемма 8. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *если* $t = 8$, *то* $\mu \in \{32, 36, 42, 48, 54, 56, 72, 84, 96, 98, 112, 126, 144, 168, 196, 224, 252\}$, *в случае* $d(\Gamma) > 3$ *имеем* $\mu = 32, 36$;

(2) *если* $t = 9$, *то* $\mu \in \{36, 42, 44, 45, 54, 55, 60, 63, 66, 70, 77, 81, 84, 90, 99, 105, 108, 110, 126, 132, 140, 154, 162, 165, 189, 198, 210, 220, 231, 252, 264, 270, 297, 308, 315\}$, *в случае* $d(\Gamma) > 3$ *имеем* $\mu = 36$.

Лемма 9. *Пусть* $t \geqslant 12$. *Тогда диаметр* Γ *равен* 3 *и верны следующие утверждения:*

(1) *если* $t = 12$, *то* $\mu \in \{72, 84, 108, 112, 126, 144, 146, 168, 216, 252, 292, 336, 378\}$;

(2) *если* $t = 14$, *то* $\mu \in \{72, 84, 90, 102, 118, 120, 126, 136, 140, 168, 170, 180, 196, 204, 210, 238, 252, 280, 294, 306, 360, 392, 408, 420, 476, 490\}$;

(3) *если* $t = 15$, *то* $\mu \in \{78, 84, 90, 91, 98, 105, 108, 117, 126, 130, 140, 135, 147, 156, 180, 182, 189, 195, 196, 210, 234, 245, 252, 260, 270, 273, 294, 315, 351, 364, 378, 420, 441, 455, 490, 510\}$;

(4) *если* $t = 22$, *то* $\mu \in \{132, 152, 154, 168, 196, 198, 224, 252, 264, 266, 294, 308, 342, 392, 396, 418, 456, 462, 504, 528, 588, 616, 684\}$;

(5) *если* $t = 24$, *то* $\mu \in \{144, 160, 168, 174, 180, 210, 216, 232, 224, 240, 252, 270, 280, 288, 290, 336, 348, 360, 378, 406, 420, 432, 464, 480, 504, 522, 540, 560, 580, 630, 672, 696, 720, 756, 812, 840\}$;

(6) *если* $t = 29$, *то* $\mu \in \{180, 203, 210, 225, 252, 261, 290, 300, 315, 348, 350, 406, 420, 435, 450, 522, 525, 580, 609, 630, 700, 725, 812, 870, 1015\}$;

(7) *если* $t = 30$, *то* $\mu \in \{210, 216, 252, 270, 280, 360, 362, 420, 504, 540, 630, 724, 840\}$;

(8) *если* $t = 36$, *то* $\mu \in \{248, 252, 294, 324, 336, 372, 378, 392, 432, 434, 496, 504, 558, 588, 648, 672, 744, 756, 784, 868, 882, 1008, 1116, 1134\}$.

$\lhd$ Если $t \geqslant 12$, то нарушается неравенство $7(t-4) \leqslant \mu \leqslant (t+6)(6t+1)/(2t+2)$, поэтому диаметр Γ равен 3.

В случае параметров $(511, 78, 5, 13)$ имеем $56 < \mu < 432$. Так как μ делит $84 \cdot 36 \cdot 73$, то $\mu \in \{72, 84, 108, 112, 126, 144, 146, 168, 216, 252, 292, 336, 378\}$.

В случае параметров $(595, 90, 5, 15)$ имеем $70 < \mu < 504$. Так как μ делит $98 \cdot 36 \cdot 85$, то $\mu \in \{72, 84, 90, 102, 118, 120, 126, 136, 140, 168, 170, 180, 196, 204, 210, 238, 252, 280, 294, 306, 360, 392, 408, 420, 476, 490\}$.

В случае параметров $(637, 96, 5, 16)$ имеем $77 < \mu < 540$. Так как μ делит $42 \cdot 90 \cdot 91$, то $\mu \in \{78, 84, 90, 91, 98, 105, 108, 117, 126, 130, 140, 135, 147, 156, 180, 182, 189, 195, 196, 210, 234, 245, 252, 260, 270, 273, 294, 315, 351, 364, 378, 420, 441, 455, 490, 510\}$.

В случае параметров $(931, 138, 5, 23)$ имеем $126 < \mu < 792$. Так как μ делит $931 \cdot 792$, то $\mu \in \{132, 152, 154, 168, 196, 198, 224, 252, 264, 266, 294, 308, 342, 392, 396, 418, 456, 462, 504, 528, 588, 616, 684\}$.

В случае параметров $(1015, 150, 5, 25)$ имеем $140 < \mu < 864$. Так как μ делит $1015\cdot 864$, то $\mu \in \{144, 160, 168, 174, 180, 210, 216, 232, 224, 240, 252, 270, 280, 288, 290, 336, 348, 360, 378, 406, 420, 432, 464, 480, 504, 522, 540, 560, 580, 630, 672, 696, 720, 756, 812, 840\}$.

В случае параметров $(1225, 180, 5, 30)$ имеем $175 < \mu < 1044$. Так как μ делит $1225 \cdot 1044$, то $\mu \in \{180, 203, 210, 225, 252, 261, 290, 300, 315, 348, 350, 406, 420, 435, 450, 522, 525, 580, 609, 630, 700, 725, 812, 870, 1015\}$.

В случае параметров $(1267, 186, 5, 31)$ имеем $182 < \mu < 1080$. Так как μ делит $1267 \cdot 1080$, то $\mu \in \{210, 216, 252, 270, 280, 360, 362, 420, 504, 540, 630, 724, 840\}$.

В случае параметров $(1519, 252, 5, 37)$ имеем $224 < \mu < 1296$. Так как μ делит $1519 \cdot 1296$, то $\mu \in \{248, 252, 294, 324, 336, 372, 378, 392, 432, 434, 496, 504, 558, 588, 648, 672, 744, 756, 784, 868, 882, 1008, 1116, 1134\}$.

Лемма 9 и теорема 2 доказаны. $\rhd$

3. Дистанционно регулярные локально псевдо $pG_{s-5}(s,t)$-графы

В этом параграфе предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geqslant 3$, в котором окрестности вершин — псевдогеометрические исключительные графы для $pG_{s-5}(s,t)$. Пусть $\theta_0 > \theta_1 > \dots > \theta_d$ — собственные значения графа Γ. Зафиксируем вершину $u \in \Gamma$ и положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$. Если $s = 6$, то по [8, теорема 4.4.3] верны неравенства $-(t+1) \geqslant b^- = -1 - b_1/(\theta_1 + 1)$ и $5 \leqslant b^+ = -1 - b_1/(\theta_d + 1)$. Так как $b_1 = 36$, то $\theta_d \geqslant -6t - 1$ и $\theta_1 \leqslant 35$. Ввиду границы Тервиллигера [6, следствие 5.2.2] имеем $d \leqslant (k + c_d)/(a_1 + 2)$, поэтому $d \leqslant 14(6t + 1)/(6t + 8)$.

Лемма 10. *Если $d \geqslant 4$, то верно одно из утверждений:*

(1) *$s = 6$, $t = 4$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{175, 144, 40, 1; 1, 10, 144, 175\}$;*

(2) *$s = 7$, $t = 1$ и Γ — половинный 9-куб.*

$\lhd$ Пусть диаметр Γ больше 3 и u, w, x, y, z — геодезический путь в Γ. В случае $s = 7$ по лемме 3 имеем $t = 1$ и $32\mu \leqslant 36 \cdot 7$, поэтому $\mu = 6$ и μ-подграфы в Γ — октаэдры. Далее, для вершины $u \in \Gamma$ граф $\Delta = [u]$ — треугольный граф $T(9)$. В этом случае Γ — половинный 9-куб.

Если $s = 6$, то по лемме 2 имеем $t \in \{3, 4, 6, 8, 9\}$ и $\mu \leqslant (t+6)(6t+1)/(2t+2)$. Далее, $7(t - 4) \leqslant \mu$ и в случае $t = 9$ имеем $35 \leqslant \mu \leqslant 41$. Так как μ делит $7(6t + 1)36t$, то в этом случае $\mu = 36$, $k_2 = 63 \cdot 55$. По лемме 2 имеем $125^2 36 b_2 \leqslant (385 - 36)(385 - b_2)15^2$, поэтому $b_2 \leqslant 47$. С другой стороны, $c_3 \geqslant 3\mu/2 = 54$, поэтому $d = 4$. С помощью компьютерных вычислений получим, что в этом случае допустимых массивов пересечений нет.

По [6, лемма 3.2.1] средняя степень графа не превосходит его наибольшего собственного значения, причем равенство достигается только в случае регулярного графа. Поэтому мы ищем шар наименьшего радиуса r, в котором средняя степень не меньше $-b_1/(\eta_2 + 1) - 1$, где $\eta_1 > \eta_2$ — неглавные собственные значения окрестности вершины. Согласно [6, теорема 4.4.3] в графе Γ не может быть двух изолированных шаров радиуса r, значит, $d \leqslant 2r + 1$.

По условию окрестности вершин в Γ сильно регулярны с параметрами $(42t+7, 6t+6, 5, t+1)$. Тогда $b_1 = 36t$, $\eta_1 = 5, \eta_2 = -(t + 1)$. Если $d > 4$, то $\bar{k} = k - b_2k_2/v_2 < -b_1/(\eta_2+1)-1 = 35$, противоречие. Значит, $d \leqslant 4$. С помощью компьютерных вычислений получим, что $t = 4$ и Γ имеет массив пересечений $\{175, 144, 40, 1; 1, 10, 144, 175\}$. $\rhd$

Замечание. Графа с массивом пересечений $\{175, 144, 40, 1; 1, 10, 144, 175\}$ не существует.

$\lhd$ Граф с массивом пересечений $\{175, 144, 40, 1; 1, 10, 144, 175\}$ является $AT4(5, 5, 5)$-графом и согласно [7] не существует. $\rhd$

Лемма 11. *Если $d=3$ и $s\geqslant 7$, то $s=7$, $t=18$ и Γ — граф с массивом пересечений* $\{512,378,1;1,189,512\}$.

$\lhd$ Пусть диаметр Γ равен 3.

Если $s=9$, то по лемме 4 имеем $t=12$, $k=280$, $b_1=162$ и $118\leqslant\mu\leqslant 162$. Ввиду леммы 1 получим $\mu\leqslant 108$, противоречие.

Если $s=8$, то $t=2,4,6,9,10,12,14,18,24,30,34,39,42,54,66,74,84$ и ввиду леммы 2 имеем $k(3t-2)/(8t+3)\leqslant\mu\leqslant 4k/9$, где $k=3(8t+3)$. Так как $b_1=22t+1$, то по лемме 1 имеем $\mu<(44t+2)/3$. С помощью компьютерных вычислений получим, что в этом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $s=7$, то $t=1,4,6,8,9,14,15,18,22,24,29,34,36,50,54$ и ввиду леммы 2 имеем $k(2t-3)/(7t+2)\leqslant\mu\leqslant 3k/8$, где $k=4(7t+2)$. Так как $b_1=27t+1$, то по лемме 1 имеем $\mu<(54t+2)/3$. С помощью компьютерных вычислений получим, что в этом случае $t=18$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{512,378,1;1,189,512\}$. $\rhd$

Лемма 12. *Если $d=3$ и $s=6$, то либо $t=4$ и Γ — граф с массивом пересечений* $\{175,144,22;1,24,154\}$ *или* $\{175,144,1;1,12,175\}$, *либо $t=8$ и Γ — граф с массивом пересечений* $\{343,288,1;1,96,343\}$.

$\lhd$ Пусть диаметр Γ равен 3 и $s=6$.

Если $t=3$, то ввиду леммы 1 и теоремы 2 имеем $6\leqslant\mu\leqslant 63$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $t=4$, то ввиду леммы 1 и теоремы 2 имеем $6\leqslant\mu\leqslant 90$. С помощью компьютерных вычислений получим, что Γ — граф с массивом пересечений $\{175,144,22;1,24,154\}$ или $\{175,144,1;1,12,175\}$.

Если $t=6$, то ввиду леммы 1 и теоремы 2 имеем $18\leqslant\mu\leqslant 126$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $t=8$, то ввиду леммы 1 и теоремы 2 имеем $32\leqslant\mu\leqslant 168$. С помощью компьютерных вычислений получим, что Γ — граф с массивом пересечений $\{343,288,1;1,96,343\}$.

В случае $t>8$ допустимых массивов пересечений нет. Лемма 12 и следствие из § 1 доказаны. $\rhd$

Литература

1. *Гутнова А.К., Махнев А.А.* Расширения псевдогеометрических графов для $pG_{s-4}(s,t)$ // Владикавк. мат. журн.—2015.—Т. 17, № 1.—С. 21–30.
2. *Makhnev A. A.* Strongly regular graphs with nonprincipal eigenvalue 5 and its extensions // International conference «Groups and Graphs, Algorithms and Automata».—Yekaterinburg: Abstracts, 2015.—С. 68.
3. *Koolen J. H., Park J.* Distance-regular graphs with a_1 or c_2 at least half the valency // J. Comb. Theory, Ser. A.—2012.—Vol. 119.—P. 546–555.
4. *Brouwer A. E., Haemers W. H.* The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb.—1993.—Vol. 14.—P. 397–407.
5. *Brouwer A. E., Haemers W. H.* Spectra of graphs (course notes).—http://www.win.tue.nl/ aeb/.
6. *Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.* Distance-regular graphs.—Berlin etc: Springer-Verlag, 1989.
7. *Jurisic A., Koolen J.* Classification of the family $AT4(qs,q,q)$ of antipodal tight graphs // J. Comb. Theory.—2011.—Vol. 118, № 3.—P. 842–852.

Статья поступила 18 февраля 2016 г.

Гутнова Алина Казбековна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: gutnovaalina@gmail.com

Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики УрО РАН,
зав. отделом алгебры и топологии
РОССИЯ, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: makhnev@imm.uran.ru

EXTENSIONS OF PSEUDOGEOMETRIC GRAPHS FOR $pG_{s-5}(s,t)$

Gutnova A. K., Makhnev A. A.

J. Koolen posed the problem of studying distance-regular graphs in which neighborhoods of vertices are strongly regular graphs with the second eigenvalue $\leqslant t$ for a given positive integer t. This problem is reduced to the description of distance-regular graphs in which neighborhoods of vertices are strongly regular graphs with non-principal eigenvalue t for $t = 1, 2, \dots$ In the article by A. K. Gutnova and A. A. Makhnev «Extensions of pseudogeometrical graphs for $pG_{s-4}(s,t)$» the Koolen problem was solved for $t = 4$ and for pseudogeometrical neighborhoods of vertices. In the article of A.A.Makhnev «Strongly regular graphs with nonprincipal eigenvalue 5 and its extensions» the Koolen problem for $t = 5$ was reduced to the case where the neighborhoods of vertices are exceptional graphs. In this paper intersection arrays for distance-regular graphs whose local subgraphs are exceptional pseudogeometric graphs for $pG_{s-5}(s,t)$.

Key words: distance-regular graph, pseudogeometric graph, eigenvalue of graph.