

Das Lösen realitätsorientierter Aufgaben zu periodischen Vorgängen mit Computeralgebra

Hans-Georg Weigand, Gießen
Hubert Weller, Wetzlar

Abstract: *Solving reality-oriented problems involving periodic processes by using computer algebra.* There is a new chance in teaching and learning the relationships between mathematics and the real world while using computers and especially computer-algebra-systems in mathematics education. We discuss three real life problems in the area of periodic actions which can be handled with basic knowledge of trigonometry. First we analyse the motion of the twine of a sewing-machine. Geometrical software (Euklid and Cabri) allows the simulation of the motion and Derive gives us the analytical representation of this curve. The second example tries to answer the question how the stroke of an engine can be described mathematically. The last example shows, how a computer-algebra-system (Mathplus) helps to get an analytical expression for the relationship between the time and the monthly found out average values of the air temperature for Munich. On the one hand computer-algebra-systems are an essential help for modelling real life situations, on the other hand the given results allow to understand the situation.

Kurzreferat: Die Nutzung von Computern und insbesondere von Computeralgebrasystemen im Mathematikunterricht bietet eine neue Chance, die Beziehungen zwischen Mathematik und der realen Welt zu entwickeln. Es werden drei realitätsorientierte Problemstellungen aus dem Bereich periodischer Prozesse diskutiert, die mit trigonometrischem Grundlagenwissen behandelt werden können. Zunächst wird die Bewegung des Fadenholers einer Nähmaschine analysiert. Geometrische Software (Euklid und Cabri) erlaubt die Simulation der Bewegung und Derive liefert die analytische Darstellung dieser Kurve. Das zweite Beispiel versucht die Frage zu beantworten, wie ein Hubkolbenmotor mathematisch dargestellt werden kann. Das letzte Beispiel zeigt, wie man mithilfe eines Computeralgebrasystems (Mathplus) zu einem analytischen Ausdruck für die Beziehung zwischen der Zeit und den monatlichen Luftdurchschnittstemperaturen in München kommen kann. Einerseits stellen Computeralgebrasysteme ein wesentliches Hilfsmittel zur Modellierung realer Situationen dar, andererseits erlauben es die gewonnenen Resultate, die Situation zu verstehen.

ZDM-Classification: H20, R20, U70

Schon vielfach wurde für den Mathematikunterricht die Forderung nach einer verstärkten Betonung von Umweltbezügen oder Anwendungsorientierung erhoben. Sie war ein zentraler Bestandteil der Meraner Beschlüsse von 1905, sie wurde in den 70er Jahren, nach den Irrungen und Wirrungen der Strukturmathematik oder "New Math" der 60er Jahre, lautstark artikuliert, und sie stellt auch gegenwärtig ein Ziel im Mathematikunterricht dar, das sich in allen Präambeln der Lehrplänen aller Schulstufen wiederfinden läßt (vgl. Schupp 1994). Realitätsbezüge lassen sich dabei in vielfältiger Form in den Unterricht integrieren: Sie können als Motivation und Ausgangspunkt für mathematische Überlegungen dienen, sie können als Übungsaufgaben bereits erarbeiteter mathematischer Lerninhalte verwendet werden, oder sie sind

Gegenstand größerer Unterrichtsprojekte. Wie sich ein anwendungsorientierter Unterricht durch "universelle" oder "fundamentale Ideen" charakterisieren läßt, wird in Humenberger u. Reichel (1995) beschrieben. Dabei kann das Wort "Anwendungen" insofern teilweise mißverständlich sein, als Mathematik nicht auf "irgend etwas außerhalb von ihr angewandt wird, sondern es geht vielmehr um das komplexe Beziehungsgeflecht zwischen Mathematik und dem "Rest der Welt", kurz: zwischen Mathematik und Realität" (Blum, 1993, S. V).

Nun gewannen Anwendungsaufgaben gerade im Zusammenhang mit dem verstärkten Unterrichtseinsatz neuer Technologien nochmals an Bedeutung. Dies zeigte sich bereits mit dem Aufkommen der elektronischen Taschenrechner in den 70er Jahren, da sich mit Hilfe dieses neuen Werkzeugs die Möglichkeit bot, im Unterricht realitätsadäquate und nicht nur für das schriftliche Rechnen vereinfachte Zahlenwerte zu verwenden. Mit der verstärkten Integration von Computern und vor allem durch das Schulfach Informatik trat der Gedanke der Anwendungsorientierung im Rahmen von Projektunterricht – eine alte reformpädagogische Idee – in den 80er Jahren in den Vordergrund (vgl. Modrow 1991). Schließlich ergibt sich nun in neuerer Zeit mit dem Aufkommen von Computer-Algebra-Systemen die Möglichkeit, auch solche Umweltsituationen im Mathematikunterricht zu modellieren, die auf komplexere im Unterricht sonst nicht handhabbare Formeln und Gleichungen führen. Dabei gewinnt das "ansatzorientierte Lösen von Aufgaben" (Schumann 1994) an Bedeutung, bei dem es darum geht, Problemstellungen zu analysieren, sie zu mathematisieren, das kalkülmäßige Abarbeiten der sich ergebenden Terme und Gleichungen dem Rechner zu überlassen, und sich dann wieder auf die Interpretation der Ergebnisse zu konzentrieren. Die Verfügbarkeit dieser Systeme wirft – wieder einmal – die Frage nach Zielen und Inhalten des Mathematikunterrichts auf, und damit einher gehen Überlegungen, welche Veränderungen in Anbetracht der neuen Werkzeuge möglich und wünschenswert sind.

Diesen im Rahmen der didaktischen Diskussion um neue Technologien immer wieder proklamierten Chancen und Möglichkeiten steht aber eine Unterrichtspraxis des "realen" Mathematikunterrichts gegenüber, in der Realitäts- und Umweltbezüge - wenn man darunter mehr versteht, als das ledigliche Üben in Form von "eingekleideten" Aufgaben - häufig nur eine untergeordnete Rolle spielen (vgl. etwa Tietze u. Förster 1996). Sicherlich lassen sich dafür zahlreiche Gründe anführen:

- So müssen zunächst die für Anwendungen erforderlichen mathematischen Grundlagen erarbeitet und geübt werden. Dann bleibt keine Zeit mehr dafür, diese Grundlagen auch realitätsnah anzuwenden.
- Anwendungsaufgaben sind häufig "Unikate", d. h. es lassen sich keine analogen Problemstellungen für Hausaufgaben und Klassenarbeiten finden.
- Eine realitätsadäquate Behandlung von Anwendungsaufgaben ist komplex und erfordert "anspruchsvolle" Mathematik.
- Über mathematische Kenntnisse hinaus erfordert das Lösen von Anwendungsaufgaben weitergehende in-

haltliche Kenntnisse (z. B. technischer, wirtschaftlicher oder sozialpolitischer Art) der Umweltsituation und deren Umfeld.

- Die Ansprüche an Lehrer und Schüler steigen, mit Realitätsbezug wird der Unterricht nicht einfacher, und er wird weniger kalkulierbar.

Diese Einwände sind ernst zu nehmen, denn die hier ausgedrückten Sachverhalte sind - zumindest teilweise - untrennbar mit der Behandlung realitätsorientierter Aufgaben verbunden. Anwendungsaufgaben können deshalb nicht einfach als isolierte Einheiten in den Unterricht aufgenommen werden, sondern sie müssen in den Rahmen einer umfassenderen Strategie der mathematischen Begriffsbildung integriert werden. Im folgenden werden drei Problemstellungen aus dem Umfeld "periodischer Funktionen" vorgestellt, die von uns im Rahmen kleinerer Unterrichtsprojekte praktisch erprobt wurden. Die Beispiele lassen sich im Rahmen der Trigonometrie in der Jahrgangsstufe 10 behandeln, sie eignen sich aber auch für eine Wiederholungseinheit "Anwendungsorientiertes Arbeiten mit Funktionen" in Klasse 11. Der Computer spielt dabei in mehrfacher Hinsicht eine entscheidende Rolle. Er ist ein Hilfsmittel zur Darstellung der mathematisierten Situation, er wird zur algorithmischen Auswertung von Formeln und Gleichungen verwendet, und er dient schließlich als Werkzeug, mit dessen Hilfe Daten und Parameter verändert werden können, er erlaubt also einen experimentellen Umgang mit der Umweltsituation.

Beim Mathematisierungsprozeß einer Umweltsituation gehen wir von *verschiedenen Stufen* oder *Schritten* aus, wobei vor allem die Wechselbeziehung zwischen dem Arbeiten mit dem Rechner einerseits und dem Aufbauen auf mathematischen Grundlagen andererseits betont werden soll.

1. Analysieren: Die Problemstellung wird hinsichtlich funktionaler Zusammenhänge und Abhängigkeiten qualitativ analysiert und beschrieben, und es werden die hinsichtlich der Zielvorstellung wichtigen Ausgangsgrößen oder -parameter herausgestellt.
2. Simulieren: Die Situation wird mit Hilfe von zeichnerischen Darstellungen, Tabellen oder realen Modellen dargestellt, nachgebildet oder simuliert.
3. Mathematisieren (im engeren Sinne): Abhängigkeiten und funktionale Zusammenhänge werden quantitativ durch Formeln erfaßt und dadurch für die Analyse mit Hilfe des Rechners aufbereitet.
4. Experimentieren: Das Verändern der Ausgangsparameter erlaubt das gezielte Experimentieren mit vorgegebenen Größen und damit das Erkunden der Situation bei abgeänderten Ausgangsgrößen.
5. Interpretieren: Die vom Rechner gelieferten Ergebnisse werden interpretiert und im Hinblick auf die reale Situation diskutiert.
6. Erklären: Die reale Situation wird aufgrund der vom Rechner gelieferten Ergebnisse auf eine neue Weise verstanden.

Diese verschiedenen Stufen besitzen sicherlich nicht bei allen Anwendungsaufgaben die gleiche Bedeutung und

werden auch nicht stets in genau dieser Reihenfolge durchlaufen. So steht bei unserem ersten Beispiel (Der Fadenholer einer Nähmaschine) neben den ersten drei Stufen vor allem die 4. Stufe im Vordergrund, indem der Konstruktionsmechanismus zunächst mit Hilfe eines Geometrieprogramms (hier EUKLID) simuliert und qualitativ erklärt wird. Ein Computer-Algebra-System dient dann dazu, eine analytische Beschreibung des Vorgangs zu erhalten, um die Situation auch quantitativ analysieren zu können. Beim zweiten Beispiel (Der Hubkolbenmotor) sind vor allem die Schritte 5 und 6 bedeutsam, indem aufgrund der mit dem Rechner erhaltenen graphischen Darstellungen der ablaufende Vorgang erst erklärbar wird. Beim dritten Beispiel schließlich (Die mittlere Lufttemperatur in München), geht es wieder um das gezielte Experimentieren und Interpretieren, also um die Schritte 4 und 5.

1. Der Fadenholer einer Nähmaschine

Bei einer Nähmaschine muß der obere Faden abwechselnd gelockert und wieder gespannt werden. Dies wird erreicht, indem die Rotation einer Welle über ein Gestänge in die Bewegung des Fadenholers übersetzt wird (siehe Abb. 1.1).

Abbildung
nur in der gedruckten Fassung

Abb. 1.1

Im Unterricht hatten wir eine Nähmaschine zur Verfügung und konnten dadurch sowohl die Funktionsweise des Fadenholers verstehen, den Gelenkmechanismus identifizieren und die zugehörigen Längen der Gelenkverbindungen messen. Von dieser enaktiven Ebene sind wir dann zur Bildebene übergegangen, indem wir den Gelenkmechanismus mit dem dynamischen Geometriensystem EUKLID simuliert haben. Abb. 1.2 zeigt das Gestänge mit den vier Gelenken, wobei der Stab, durch

den der Faden läuft (Punkt E), fest mit dem Gestänge verbunden ist, d. h. der Winkel CDE ist konstant.

Die Punkte A und B sind fest – aber drehbar – gelagert, in C und D sind Gelenke, der Punkt E ist der Fadenholer, d. h. durch diesen Punkt wird der Faden geführt. Durch die Drehung des Punktes D wird das gesamte Gestänge bewegt. Den Winkel CDE haben wir an der Nähmaschine ausgemessen, er ist 29° .

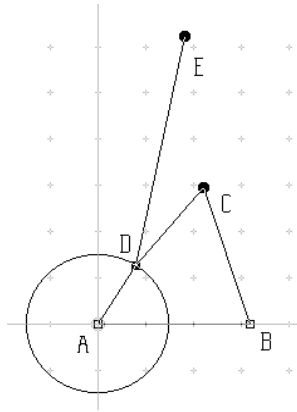


Abb. 1.2

Welche Kurve beschreibt nun der Fadenholer im Punkt E bei Rotation des Punktes D um den Punkt A?

Dies ist ein für die Getriebelehre typisches Beispiel der Analyse von sogenannten Koppelkurven (hier die Koppelkurve, die von einer Kurbelschwinge abhängt).

Eine Simulation der Bewegung mit einem dynamischen Geometriesystem, z.B. EUKLID, liefert eine Vorstellung von der Kurve! (Abb. 1.3)

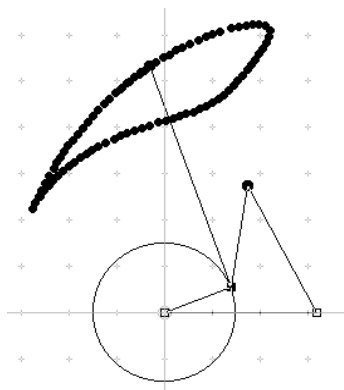


Abb. 1.3

Wenn man nun über die qualitative Beschreibung hinaus auch die quantitativen Auswirkungen der Veränderung der Ausgangsdaten auf die Kurve beschreiben möchte, so bedarf es der Kenntnis des quantitativen Zusammenhangs zwischen Ausgangswerten und Zielkurve.

Für die analytische Beschreibung reichen Kenntnisse der elementaren Trigonometrie aus, die erforderlichen allerdings etwas komplizierten Umformungen überlassen wir dabei einem Computer-Algebra-System. Wir benutzen die an der Nähmaschine gemessenen Winkel- und Längenmaße, und stellen die Koordinaten (x, y) des Punktes E in Abhängigkeit von der Größe des Drehwinkels α dar (Abb. 1.4 und Abb. 1.5). Im Unterricht der Fach-

schule für Technik werden heute solche Kurven immer noch mühsam punktweise per Hand gezeichnet!

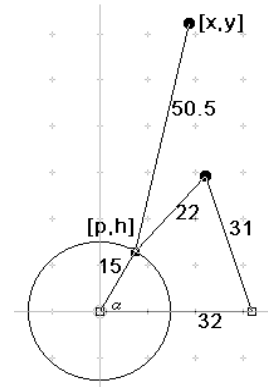


Abb. 1.4

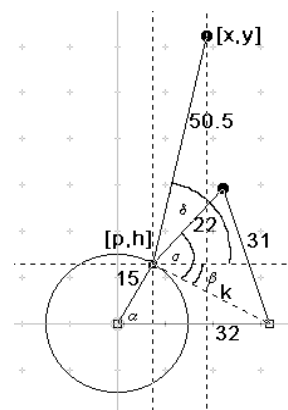


Abb. 1.5

Mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems (hier Derive) lassen sich die x - und y -Werte und damit die Punkte der Kurve bei Veränderung der α -Werte darstellen.

“Punkt des sich drehenden Rades: $[p, h]$ ”

$$p := 15 \cdot \cos(\alpha)$$

$$h := 15 \cdot \sin(\alpha)$$

$$\beta := \arctan\left(\frac{h}{32 - p}\right)$$

“Diagonale $k = DB$ im Viereck ABCD”

$$k := \sqrt{h^2 + (32 - p)^2}$$

“Wir benutzen den Kosinussatz”

$$31^2 = k^2 + 22^2 - 2 \cdot 22 \cdot k \cdot \cos(\sigma)$$

”Löse die Gleichung nach $\cos(\sigma)$ ”

$$\cos(\sigma) = \frac{193 - 240 \cdot \cos(\alpha)}{11 \cdot \sqrt{1249 - 960 \cdot \cos(\alpha)}} = \text{Wert}$$

$$\sigma := \arccos(\text{Wert})$$

$$\delta := \sigma - \beta + 29^\circ$$

“Punkt des Fadenholers $[x, y]$ ”

$$x := p + 50.5 \cdot \cos(\delta)$$

$$y := h + 50.5 \cdot \sin(\delta)$$

Damit läßt sich nun die Kurve des Fadenholers zeichnen (Abb. 1.6).

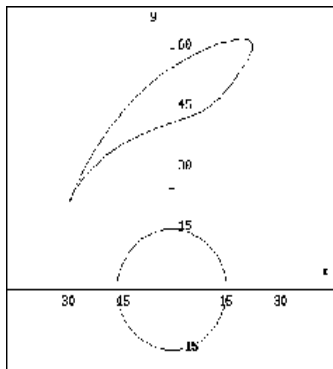


Abb. 1.6

Obige Umformungen sind nur bei Verwendung eines Computer-Algebra-Systems zu realisieren. An diesem Beispiel läßt sich auch sehr schön die Bedeutung des hier praktizierten Vorgehens für die reale Konstruktion von Maschinen und Werkzeugteilen diskutieren. So wird beispielsweise bei der Neuentwicklung einer Maschine oder eines Geräts zunächst so lange im mathematischen Modell experimentiert, bis eine akzeptable Lösung der Problemstellung gefunden ist. Erst dann wird ein Prototyp der Maschine oder des Geräts hergestellt, um die geforderten Eigenschaften am realen Objekt zu überprüfen. Eventuell muß danach noch einmal im mathematischen Modell weitergearbeitet werden, um einen verbesserten Prototyp herzustellen. Das Hintergrundwissen für einen derartigen Entwicklungsprozeß erwarb einer der Autoren durch seine Tätigkeit im Entwicklungsbüro der Firma Leitz in Wetzlar. Dort wurden Mikroskope genau nach dieser Vorgehensweise konstruiert, indem zunächst die Strahlengänge für bestimmte Abmessungen und Glasarten – anhand eines mathematischen Modells – durchgerechnet wurden. Dann wurde ein Prototyp erstellt, an dem die geforderten Eigenschaften überprüft werden konnten. Evtl. mußte dann erneut am mathematischen Modell weitergearbeitet werden.

2. Der Hubkolbenmotor

Ausgangspunkt unserer Überlegungen war die folgende Beobachtung:

In der Kfz-Werkstatt stellt man immer wieder fest, daß der Zylinder oberhalb der Mittellage des Kolbens stärker abgenutzt wird als unterhalb. Woran liegt das? Wie läßt sich überhaupt die Bewegung des Kolbens beim Hubkolbenmotor beschreiben?

Einen ersten Zugang zu dieser Problemstellung erhielten wir durch die Besichtigung eines in der Kfz-Werkstatt vorhandenen 1:1-Modells eines Automotors. Ein besseres Nachvollziehen der Bewegung für die Arbeit im Klassenraum lieferte dann ein Motormodell aus der Physiksammlung.

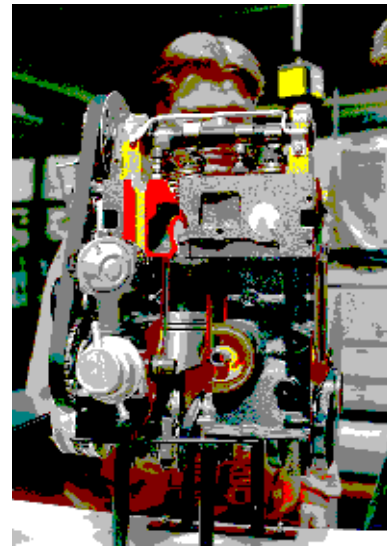


Abb. 2.1

Die Aufgabe besteht nun darin, die Höhe des Kolbens in Abhängigkeit vom Drehwinkel der Pleuelstange zu beschreiben (der Pleuelstange ist über den Pleuelstange mit der Pleuelstange verbunden). Auch hierzu reichen wieder einfache trigonometrische Kenntnisse und der Satz des Pythagoras aus.

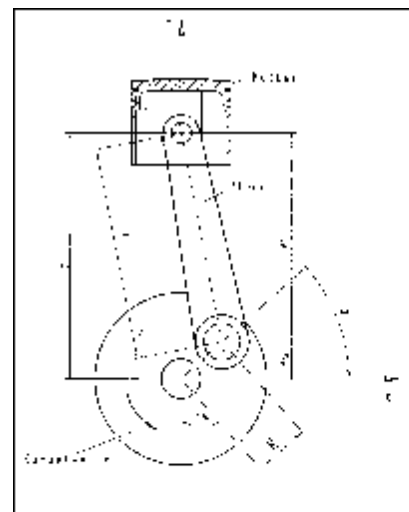


Abb. 2.2

Ein erster geometrischer Zugang zu dieser Problemstellung kann wiederum durch die Simulation mit einem Geometrieprogramm erreicht werden. Schumann hat hierzu Cabri1 verwendet (1991, S.217). Mit Cabri2 ist es jetzt sogar möglich, den funktionalen Zusammenhang zwischen dem Hub und dem Drehwinkel sofort graphisch darzustellen (Abb. 2.3 von H. Schumann). Ist der Zusammenhang zwischen Drehwinkel und Hub eine Sinusfunktion?

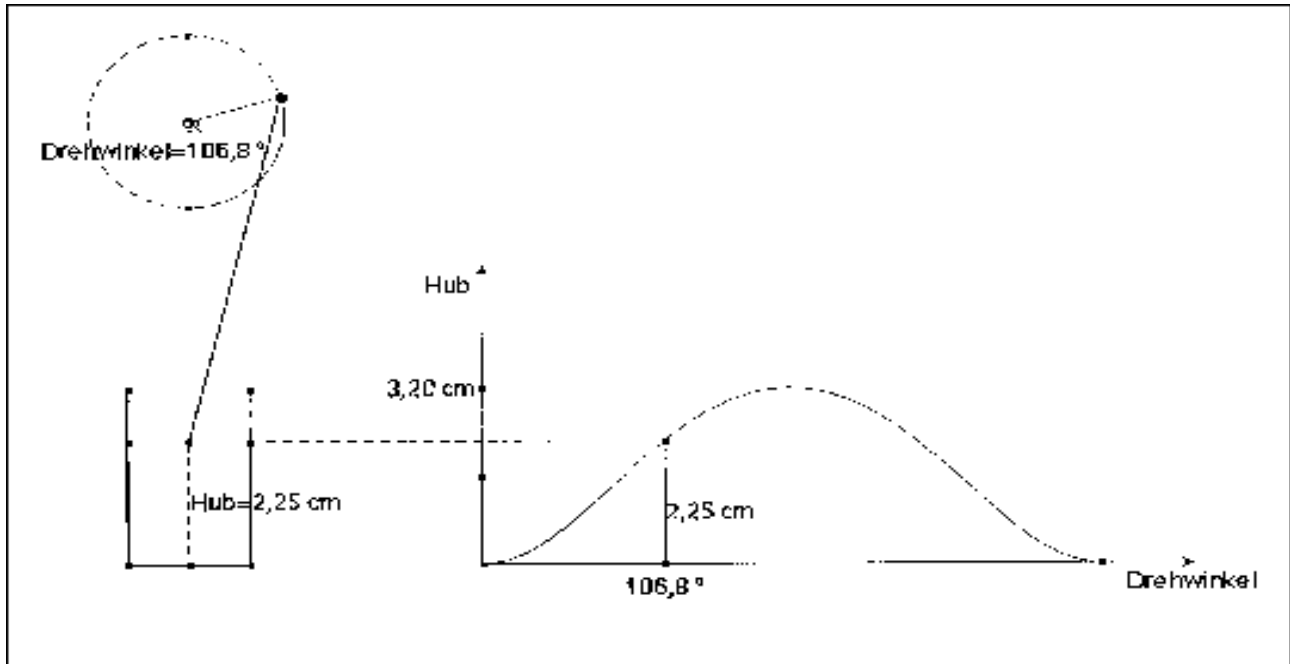


Abb. 2.3

Die vertikale Auslenkung des Kolbens (y_k) lässt sich nun durch Überlagerung der vertikalen Auslenkung der Kurbelwelle (y_{kw}) und der Auslenkung der Pleuelhöhe (y_p) ausdrücken:

$$y_k = y_{kw} + y_p.$$

Für die grafische Darstellung wählten wir die Werte

$$r = 5 \quad \text{und} \quad l = 10.$$

Dies entspricht nicht den realen Werten (üblich ist ein Verhältnis von 0.2–0.3, siehe Rösch 1993, S. 346), die wesentlichen Zusammenhänge lassen sich aber bei diesen Werten besser beobachten.

- #1 : "Der Hubkolbenmotor"
- #2 : "Die Kurbelwelle"
- #3 : $y_{kw} := r \cdot \text{SIN}(\alpha)$
- #4 : $x_{kw} := r \cdot \text{COS}(\alpha)$
- #5 : "Berechnung der Pleuelhöhe"
- #6 : $y_p^2 + x_{kw}^2 = l^2$
- #7 : "Löse nach y_p "
- #8 : $y_p = \sqrt{(l^2 - r^2 \cdot \text{COS}(\alpha)^2)}$
- #9 : $y_p := \sqrt{(l^2 - r^2 \cdot \text{COS}(\alpha)^2)}$
- #10 : "Die Höhe des Kolbens"
- #11 : $y_k := y_{kw} + y_p$

Abb. 2.4: Derive-File

Die Graphen der Funktionen: $\alpha \rightarrow y_k$, $\alpha \rightarrow y_{kw}$ und $\alpha \rightarrow y_p$ lassen sich darstellen und interpretieren (Abb. 2.5).

Interessant ist hierbei die Interpretation der Kurven, wobei man insbesondere erkennt, daß $\alpha \rightarrow y_p$ die doppelte Frequenz der Drehung der Kurbelwelle

besitzt, d. h. bei einer vollen Umdrehung der Kurbelwelle hat die Pleuelhöhe y_p je zwei Minima und Maxima. Dies ist den Schülern im Unterricht erst nach der Beobachtung der Funktionsgraphen bewußt geworden, und sie haben danach das Phänomen am Modell erklären können. Jetzt erkennt man auch, daß die Gesamtauslenkung des Hubkolbens *keine* Sinuskurve darstellt und daß – bezogen auf die Mittellage der Kurbelwelle – die Auslenkung des Kolbens nach oben stärker ist als nach unten. "Die Überlagerung bewirkt, daß die 'Berge' der Sinuskurve spitzer und schmaler, die 'Täler' flacher und breiter werden" (Kirsch 1994, S. 217).

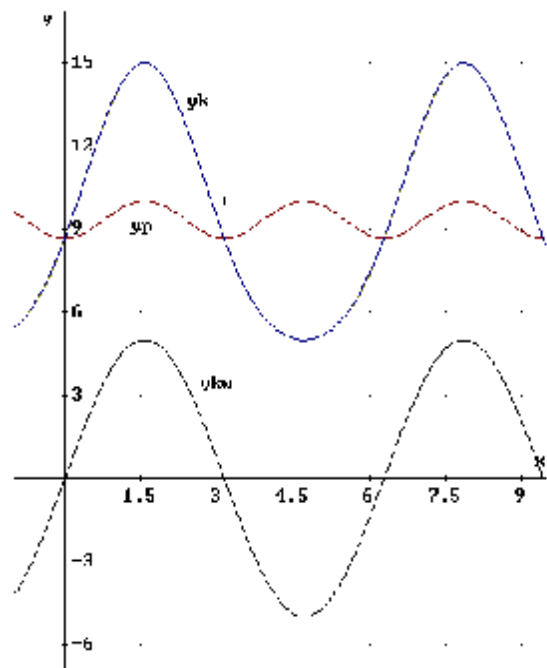


Abb. 2.5

Bei der Interpretation dieses Problems liefert erst das Zusammenspiel der gegenständlichen Ebene, d. h. das

Studieren des realen Modells, der symbolischen und graphischen Ebene ein tieferes quantitatives Verständnis der Bewegungsvorgänge beim Hubkolbenmotor.

3. Mittlere Lufttemperatur in München

Die Lufttemperatur schwankt täglich und ist von zahlreichen Einflüssen abhängig. Wenn man die langjährigen Monatsmittelwerte der Lufttemperatur berechnet, dann erhält man für München die folgenden Werte (vgl. Schmidt 1984, S. 74):

Monat	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jan.	Febr.	März	April
Temp	8,0	12,5	15,8	17,5	16,6	13,4	7,9	3,0	-0,7	-2,1	-0,9	3,3	8,0

Tab. 1

Ausgehend von dieser Tabelle ergibt sich die Frage nach einer Gesetzmäßigkeit der vorliegenden Werte. Um diese zu erkennen, ist eine graphische Darstellung hilfreich oder sogar notwendig.

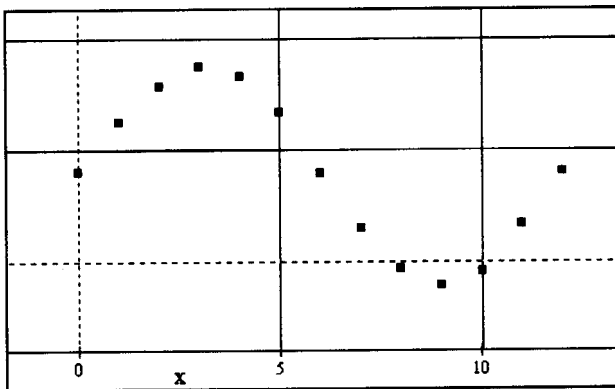


Abb. 3.1

Jetzt liegt die Vermutung nahe, daß sich die Lufttemperatur in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch eine Sinusfunktion $y = a \sin(bt) + c$ beschreiben läßt. Die Behandlung dieser Aufgabe kann nun nach verschiedenen Stufen oder Schwierigkeitsgraden erfolgen.

1. Stufe: Rein experimentelles Arbeiten

Um die Parameter a , b und c obiger Sinusfunktion zu bestimmen, können die Parameter im Sinne des experimentellen Arbeitens sukzessive variiert werden. Dies setzt allerdings grundlegende Kenntnisse hinsichtlich der Bedeutung der Parameter für den Graphen der Funktion voraus. Für diesen experimentellen Suchprozeß haben wir das Programm MATHPLUS verwendet, da hier Terme und zugehörige Graphen interaktiv gekoppelt sind, d. h. bei Veränderung des eingegebenen Terms ändert sich unmittelbar auch der zugehörige Graph. Die Abbildungen 3.2 und 3.3 zeigen die Veränderung des Graphen, wenn man von der Funktion mit $y = 7 \sin(0.5x) + 8$ zu $y = 9 \sin(0.5x) + 8$ übergeht.

Derartige Suchprozesse halten wir in vielfacher Hinsicht für wichtige Übungen im Mathematikunterricht. So vertiefen sie zum einen das Verständnis der graphischen Bedeutung der einzelnen Parameter und tragen dazu bei, die Beziehung zwischen Termdarstellungen und graphischen Darstellungen aufzubauen. Zum zweiten sind sie eine Schulung der Denkweisen, die bei Ein- oder Inter-

vallschachtelungsverfahren benötigt werden. Schließlich und zum dritten bereiten sie die Idee einer optimalen Annäherung einer Kurve an vorgegebene Werte vor.

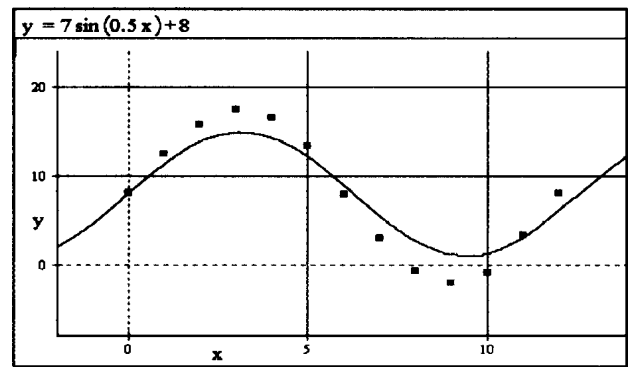


Abb. 3.2

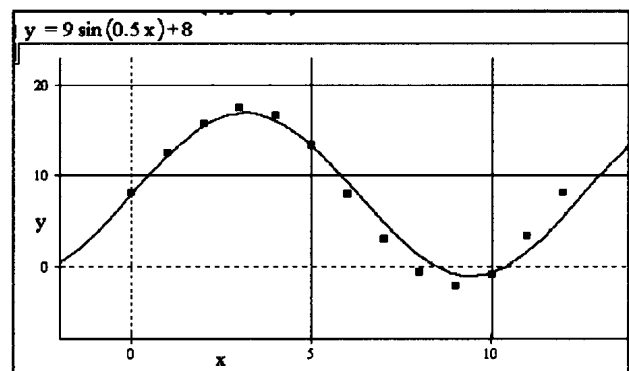


Abb. 3.3

Einige typische von unseren Schüler ermittelten Ergebnisse waren:

$$y = 9.87 \sin(0.522x) + 7.88$$

$$y = 10.2 \sin(0.523x) + 7.6$$

$$y = 10 \sin(0.5x) + 7.8$$

2. Stufe: Theoretische Überlegungen und experimentelles Vorgehen

Neben diesem rein experimentellen Vorgehen beobachten wir bei unseren Schülern aber auch – vor allem dann, wenn sie auf rein experimentellem Weg nicht zum Ziel kamen – ein auf theoretische Überlegungen gestütztes Vorgehen. So lassen sich aus den in der Tabelle 1 angegebenen Werten Amplitude, Periode und vertikale Verschiebung der Sinuskurve unmittelbar bestimmen. Damit erhält man die in Abb. 3.4 dargestellte Funktion.

Es läßt sich fragen, ob diese Kurve tatsächlich die – zunächst nur im optischen Sinn – “beste” Näherungskurve ist, oder ob durch Parametervariation nicht eine bessere Übereinstimmung erreicht werden kann. Damit ist man schon bei einer Methode, die sowohl theoretische Überlegungen als auch experimentelle Vorgehensweisen kombiniert. Dieses Vorgehen wurde bei den folgenden beiden Schülerlösungen beobachtet:

$$y = 10 \sin(2\pi/12x) + 7.6$$

$$y = 9.8 \sin(0.52x) + 8$$

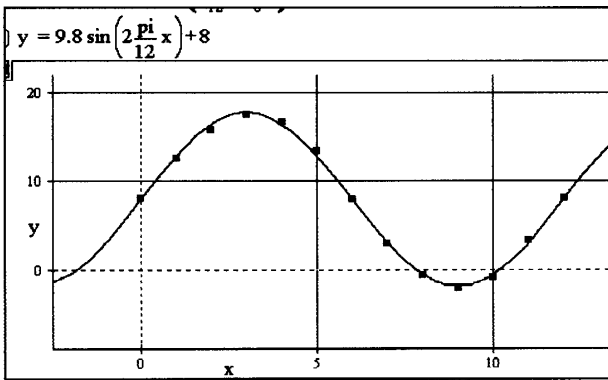


Abb. 3.4

3. Stufe: Rückbeziehung der mathematischen Lösung auf die Umweltsituation

Es ergibt sich hier die Frage nach der Bedeutung einer geschlossenen mathematischen Darstellung für das Verständnis der Umweltsituation. Zunächst einmal lassen sich die Bedeutungen die Konstanten a, b und c für den Temperaturverlauf in München diskutieren. Weitere Fragen sind etwa: In welchen Monaten ändert sich die Lufttemperatur am stärksten? Wie ist der Temperaturverlauf in anderen Städten der Welt? Der Verlauf der mittleren Lufttemperatur in Alma-Ata (Kasachstan, diese Stadt wurde gewählt, da sich in der Klasse ein Schüler aus Alma Ata befand und er so von den Temperaturverhältnissen in Alma Ata erzählend berichten konnte) läßt sich näherungsweise durch die Funktion beschreiben:

$$y = 15 \sin\left(\frac{2\pi}{12} x\right) + 8.3.$$

“Auf einen Blick” lassen sich nun Fragen nach Unterschieden und Gemeinsamkeiten hinsichtlich der Lufttemperatur in Alma-Ata bzw. München beantworten, und gerade darin liegt der Vorteil einer geschlossenen Darstellung.

4. Stufe: Die “beste” Näherungsfunktion

Die Frage der Schüler, welche der gefundenen Lösungen denn nun die “richtige” Lösung sei, führt auf die Frage nach einem Kriterium für einen quantitativen Vergleich der gegebenen Werte und der gefundenen Funktion. Ein Kriterium kann dabei die Summe der Abweichungen der in Tab. 1 gegebenen Werte von den jeweiligen Funktionswerten sein. Insbesondere läßt sich hier auch gut die Bedeutung oder der Sinn der Einführung der quadratischen Abstandssumme diskutieren und erklären. Das Computer-Algebra-System ist jetzt ein Hilfsmittel zur Berechnung dieser quadratischen Abstandssumme. Ausgehend von der Funktion mit $F(x, a, c) = a \sin\left(\frac{2\pi}{12} x\right) + c$ läßt sich jeweils der Wert $|F(x_i, a, c) - Y(x_i)|$ bestimmen, wenn a und c Werte aus einem bestimmten Intervall mit einer bestimmten Schrittweite durchlaufen, und $Y(x_i)$ die in Tab. 1 gegebenen Werte sind. In der Tabelle in Abb. 3.5 ist der Wert von c (in den Zeilen) von 7.85 bis 7.92, der Wert von a (in den Spalten) von 9.78 bis 9.82 mit der Schrittweite 0.01 variiert und jeweils die quadratische Abstandssumme

berechnet worden. Man erkennt, daß für $a = 9.81$ und $c = 7.87$ die quadratische Abstandssumme ein Minimum annimmt.

```
#1 : F(x, a, c) := a · SIN[ $\frac{2\pi \cdot x}{12}$ ] + c
#2 : “Die Summe der Abweichungsquadrate : ”
#3 : FEHLER(a, c) :=  $\sum_{x=0}^{12} (F(x, a, c) - Y(x))^2$ 
#4 : VECTOR(VECTOR(FEHLER(a, c), c,
    7.85, 7.92, 0.01), a, 9.78, 9.82, 0.01)
    c = 7.85  7.86  7.87  7.88  ...
a = 9.78  1.1373 1.1336 1.1325 1.1340
    1.1381 1.1448 1.1541 1.1660
    = 9.79  1.1346 1.1309 1.1298 1.1313
    1.1354 1.1421 1.1514 1.1633
    = 9.80  1.1331 1.1294 1.1283 1.1298
    1.1339 1.1406 1.1499 1.1618
    = 9.81 1.1328 1.1291 1.1280 1.1295
    1.1336 1.1403 1.1496 1.1615
    = 9.82  1.1337 1.1300 1.1289 1.1304
    1.1345 1.1412 1.1505 1.1624
#6 : “Der kleinste Wert wird bei a = 9.81
    und c = 7.87 angenommen”
#7 : F(x, 9.81, 7.87) = 9.81 · SIN(0.52359877 · x) + 7.87
```

Abb. 3.5

5. Stufe: Automatische Bestimmung der Näherungsfunktion

Viele Computer-Algebra-Systeme bieten die Möglichkeit einer automatischen Bestimmung einer optimalen Näherungsfunktion. Eine Behandlung bietet sich hier dann im Unterricht an, wenn diese Funktion bereits bei linearen und quadratischen Näherungen verwendet wurde. Eine spätere Behandlung mit Mitteln der Differentialrechnung kann hier vorbereitet werden. So verwendet man in DERIVE die “Fit-Funktion”

$$F(x, a, c) := a \sin\left(\frac{2\pi}{12} x\right) + c$$

$$\text{FIT}([x, F(x, a, c)], \text{Daten})$$

Dabei sind in “Daten” die in Tab. 1 gegebenen Werte $[x_i, Y(x_i)]$ gespeichert.

#24: “DERIVE findet den optimalen Wert mit der FIT-Funktion”

```
#25: FIT([x, F(x, a, c)], daten) =
    = 9.8074772 · SIN(0.52359877 · x) + 7.8692307
```

Es ergibt sich also als Ergebnis:

$$y = 9.81 \sin(x) \left(\frac{2\pi}{12} x\right) + 7.87$$

Dies ist eine beruhigende Bestätigung der experimentellen Ergebnisse.

6. Stufe: Näherungspolynome

Die jährliche Periodizität der Daten legt es sicherlich nahe, als Näherungsfunktion eine trigonometrische Funktion zu suchen. Bei einer Lehrerfortbildungsveranstaltung wurde die Frage gestellt, ob in dem betrachteten Intervall nicht ein Polynom als Näherungsfunktion eine bessere Annäherung darstellt. Das Interesse der Teilnehmer war geweckt, und sie versuchten, dieses Problem sofort zu lösen. (Eine ähnliche Situation ist auch im Unterricht denkbar). Das Werkzeug Computer-Algebra-System ermöglicht eine sofortige Bearbeitung solcher Fragen. Mit der FIT-Funktion können die optimalen Polynome ermittelt und danach grafisch dargestellt werden.

Polynom 3. Grades

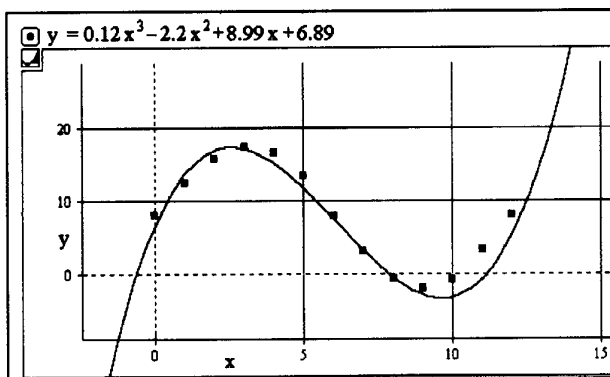


Abb. 3.6

Polynom 5. Grades

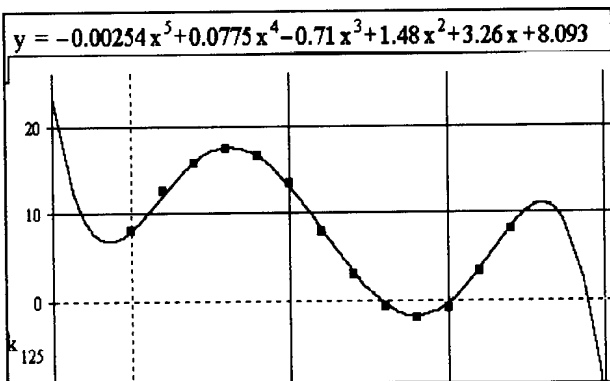


Abb. 3.7

Interessant ist es nun, die quadratische Abstandssumme dieser gefundenen Polynome mit obiger Sinusfunktion zu vergleichen. Dabei stellt man fest, daß die Summe der Abweichungsquadrate bei der optimalen Sinusfunktion (1.1280) erheblich niedriger ist, als bei den optimalen Polynomen 3. Grades (12.5099) oder 4. Grades (12.0987). Erst bei dem optimalen Polynom 5. Grades wird der Wert der Sinusfunktion unterschritten (0.3875).

4. Rückblick und Ausblick

Die hier erörterten Beispiele zeigen, daß ein computerunterstützter anwendungs- oder realitätsorientierter Unterricht neue Anforderungen an Schüler(innen) und Lehrer(innen), stellt, daß er über den bisherigen inhaltlichen Rahmen des traditionellen Unterrichts hin-

ausgeht, und daß er auch den organisatorischen Rahmen eines traditionellen Unterrichts sprengt, indem er verstärkt Einzel- und Partnerarbeit in Beziehung zum Arbeiten mit der ganzen Klasse setzt. Der Rechner wird dabei zum einen zu einem zentralen Hilfsmittel, um Umweltsituationen "in den Klassenraum" zu holen. Ein Computer-Algebra-System bildet die Grundlage für einen "handlungsorientierten" Unterricht, indem auf der Bildschirmenebene mit den dargestellten mathematischen Objekten (Konstruktionen, Termen, Gleichungen, Funktionen) operiert oder hantiert werden kann. Dieses Hantieren bezieht sich zwar zunächst nur auf Bildschirmobjekte, diese sind aber in Bezug zu den realen Objekten und den auf sie ausgeübten Handlungen zu sehen. Ganz im Sinne der Überlegungen zum "operativen Prinzip", dessen Grundlage das Analysieren von Objekten einschließlich der auf sie ausgeübten Operationen oder Handlungen darstellt, wird der Computer somit zu einem Hilfsmittel für ein tieferes Verständnis der dargestellten oder simulierten Situationen.

5. Literatur

- Blum, W.: Analysisunterricht: Aktuelle Tendenzen und Perspektiven für das Jahr 2000. – In: *Mathematik in der Schule* 33 (1995) H. 1, S. 1–11 und H. 2, S. 66–75
- Blum, W. (Hg.): *Anwendungen und Modellbildung im Mathematikunterricht*. – Hildesheim: Franzbecker, 1993
- Hergert, W.: "Die alternative Aufgabe" – veränderte Aufgabenstellungen und veränderte Lösungswege mit/trotz Computersoftware. – In: H. Hischer (Hg.), *Mathematikunterricht und Computer*. Hildesheim: Franzbecker, 1994
- Heugl, H.; Klinger, W.; Lechner, J.: *Mathematikunterricht mit Computer-Algebrasystemen*. – Bonn: Addison-Wesley, 1996
- Humenberger, J.; Reichel, H.-Ch.: *Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik*. – Mannheim: B.I., 1995
- Kirsch, A.: Zur Behandlung des Hubkolbenmotors im Mathematikunterricht. – In: *MNU* 47 (1994) H. 4, S. 216–218
- Modrow, E.: *Zur Didaktik des Informatikunterrichts*. – Bonn: Dümmler, 1991
- Rösch, P.: Der Hubkolbenmotor – ein harmonischer Oszillator? – In: *MNU* 46(1993)H. 6, S. 343–346
- Schmidt, W.: *Anwendungen aus der modernen Technik und Arbeitswelt*. – Stuttgart: Klett, 1984
- Schumann, H.: *Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer*. – Stuttgart: Metzler, Teubner, 1991
- Schumann, H.: Ansatzorientiertes Lösen komplexer Algebraaufgaben mit Computer-Algebra. – In: *MNU* 47(1994)H. 8, S. 496–502
- Schupp, H.: Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zwischen Tradition und neuen Impulsen. – In: W. Blum u. a. (Hrsg.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht*, Bd. 1. Hildesheim: Franzbecker, 1994
- Tietze, U.-P.; Förster, F.: Über die Bedeutung eines problem- und anwendungsorientierten Mathematikunterrichts für den Übergang zur Hochschule. – In: *MU* (1996)H. 4/5, S. 85–120
- Weigand, H.-G.: *Neue Werkzeuge und Kalkülkompetenz*. – In: H. Hischer; M. Weiß, *Rechenfertigkeit und Begriffsbildung*. Hildesheim: Franzbecker, 1996

Autoren

Weigand, Hans-Georg, Prof. Dr., Universität Gießen, Institut für Didaktik der Mathematik, Karl-Glöckner-Str. 21C, D-35394 Gießen, hans-georg.weigand@math.uni-giessen.de
Weller, Hubert, Dr., Werner-von Siemens Schule, Dammstr. 62, D-35576 Wetzlar