MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE EXTRAPOLACIÓN DE PESOS

JAVIER DUOANDIKOETXEA

Abstract. The extrapolation theorem for weights due to José L. Rubio de Francia is a very useful tool in the study of weighted inequalities. In this paper we present a proof for the A_p classes which is simpler than the usually given one and include some thoughts about the extension of this proof to a more general setting.

1. Introducción desde el recuerdo

La primera vez que encontré a Chicho fue hace mucho tiempo, en Jarandilla de la Vera, en 1982. Más tarde, cuando tuvimos ocasión de conocernos mejor, me empezó a parecer como un hermano mayor. Entre tanto, yo también había pasado a formar parte del pequeño grupo que tuvo la suerte de ser dirigido por José Luis Rubio de Francia, al que él ya pertenecía, así que lo de la hermandad hasta tenía una base «científica».

Cuando ya no puede ser pienso que me hubiera gustado estar con él más veces, para escucharle hablar de esto y de lo otro, porque Chicho tenía muchas cosas que contar. De vez en cuando hablábamos de las Canarias (y de la Caldera de Taburiente), que yo nunca había visitado. Coincidencias de la vida, murió mientras yo visitaba Canarias por primera vez, y cuando vea la Caldera, habré ido a La Palma para su homenaje. De matemáticas, hablamos pocas veces, pero recuerdo que alguna vez hablamos de pesos y el tema, tan ligado a José Luis Rubio de Francia y su entorno, me parece muy apropiado para dedicarle unas páginas a Chicho.

A partir del resultado de Muckenhoupt ([12]) de principios de los setenta para el operador maximal de Hardy-Littlewood, hubo cantidad de trabajos sobre desigualdades con peso: distintos operadores, caracterizaciones, propiedades, aplicaciones, nuevas demostraciones, etc. Pero destacan dos resultados básicos: factorización y extrapolación. El teorema de extrapolación es un invento de José Luis Rubio de Francia, un resultado precioso. Lo anunció en [14] y apareció completo en [15], con una prueba no constructiva que utiliza desigualdades vectoriales. Después, J. García-Cuerva dio una demostración constructiva sin pasar por la teoría vectorial ([9]), que es la manera en que ahora se presenta en la mayoría de sitios; B. Jawerth ([11]) extendió los resultados y J. L. Rubio los formuló en el marco de los retículos de Banach ([16], [17]). Hay además otras formulaciones que dejaré sin mencionar. A pesar

2000 *Mathematics Subject Classification.* 42B25, 47B38.
Key words and phrases. Weighted inequalities, extrapolation, maximal functions.
Financiado en parte por el proyecto EB051/99 de la UPV-EHU.

de todo, yo tengo la impresión de que la extrapolación no ha sido bien aprovechada (a lo mejor por eso no mereció más que una nota en [20, pág. 223]).

Para el lector que no la conozca, me parece interesante reproducir la explicación que José Luis nos dejó en [16] de cómo llegó a este teorema:

> Recientemente, B. Jawerth me preguntó, transmitiendo la curiosidad en este sentido de otros investigadores en la teoría de desigualdades con peso, cómo había llegado a pensar en la posibilidad de un tal teorema de extrapolación. Mi respuesta fue que, pensando en términos abstractos (factorización de operadores, etc.) y sabiendo que hay un operador lineal (e.g., la transformada de Hilbert) que está acotada en $L^p(w)$ si y sólo si $w \in A_p$ $(1 < p < \infty)$, el teorema era obvio, y de hecho, yo lo descubrí durante un viaje en autobús sin necesidad de hacer ningún cálculo, simplemente con la reflexión anterior. Dicha reflexión se basa en que las propiedades de acotación de un operador lineal se hallan contenidas en las desigualdades en espacios L^2 con pesos que tal operador satisface.

(También Poincaré contó en *Science et méthode* cómo se le ocurrió la solución a una cuestión sobre funciones fuchsianas en la que llevaba tiempo trabajando al ir a subir al autobús. Parece que en las campañas oficiales a nadie se le ha ocurrido explotar esta virtud del uso del transporte público.)

En ([3], ejercicio 1, página 43) propuse una organización de la prueba del teorema de extrapolación para pesos A_p que requiere menos trabajo conceptual y es la que aparece en [5] a sugerencia de D. Cruz-Uribe (traductor al inglés y colaborador en la revisión y puesta al día), en lugar del resultado sin pesos que aparecía en el original en castellano.

En este artículo presento en primer lugar esa demostración y discuto después su adaptación a otros operadores maximales. Creo que se ven claramente cuáles son los elementos esenciales que intervienen en un teorema de este tipo.

2. Extrapolación para las clases A_p

Comienzo recordando definiciones posiblemente familiares para los lectores. La función maximal de Hardy-Littlewood es el promedio de la función sobre cubos que contienen al punto, es decir,

$$Mf(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy,$$

donde Q es un cubo. Se trata de estudiar los espacios de medida $L^p(\mu)$ en los que el operador está acotado o satisface una desigualdad de tipo débil. B. Muckenhoupt demostró en [12] que si M es de tipo débil (p, p) con respecto a una medida μ (por tanto, también si es fuerte), ésta tiene que ser absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue así que podemos limitarnos a hablar de su densidad w y escribiremos $L^p(w)$ el espacio de medida correspondiente.

Se dice que una función localmente integrable w está en la clase A_p para $1 < p < \infty$ si

$$\sup_Q \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\Big)\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}\Big)^{p-1} < \infty$$

y está en A_1 si

$$Mw(x) \le Cw(x) \quad \text{c.t.p.}$$

Teorema 1 ([12]). *La condición necesaria y suficiente para que M esté acotado en $L^p(w)$ si $p > 1$, o para que sea de tipo débil (p, p) con respecto al peso w si $1 \leq p < \infty$, es que w esté en A_p.*

La demostración de este teorema, así como las propiedades de las clases A_p, se puede encontrar en los libros mencionados en la bibliografía ([5], [10], [20]). Enuncio a continuación las propiedades que usaremos en la prueba del teorema de extrapolación.

Teorema 2 (Propiedades de los pesos A_p).

1. $A_q \subset A_p$, $1 \leq q < p$.
2. $w \in A_p$ *si y sólo si* $w^{1-p'} \in A_{p'}$.
3. *Si* $w_0, w_1 \in A_1$, *entonces* $w_0 w_1^{1-p} \in A_p$.
4. *Si* $w \in A_p$, $1 \leq p < \infty$, *existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $w^{1+\epsilon} \in A_p$.
5. *Si* $w \in A_p$, *existe* $q < p$ *tal que* $w \in A_q$.
6. *Si* $Mu(x)$ *es finito en casi todo punto,* $(Mu)^s \in A_1$ *para todo* $0 < s < 1$.

Las tres primeras propiedades son fáciles de verificar. La cuarta y la quinta se obtienen de un resultado difícil, la desigualdad de Hölder al revés, que satisfacen los pesos A_p; la sexta se puede probar directamente (véanse las referencias citadas).

Es interesante notar que la tercera propiedad es, en realidad, una caracterización (*teorema de factorización*). Pero mientras la parte enunciada se deduce inmediatamente de las definiciones, la recíproca es más difícil de probar.

Veamos a continuación el teorema de extrapolación de José Luis Rubio de Francia para las clases A_p.

Teorema 3 (Extrapolación). *Sea T un operador acotado en $L^r(w)$ para algún $r \geq 1$ y para todo peso $w \in A_r$ (con cota que sólo depende de la constante A_r de w), entonces T está acotado en $L^p(w)$ para todo $w \in A_p$, $1 < p < \infty$.*

Demostración. (1) Probamos primero que si $1 < q < r$ y $w \in A_1$, entonces T está acotado en $L^q(w)$. Sea $f \in L^q(w)$ y $V = Mf$. Por el teorema de Muckenhoupt V es finito en casi todo punto, luego por el apartado 6 del teorema 2, $V^{(r-q)/(r-1)}$ está en A_1, puesto que $r - q < r - 1$, y por la propiedad 3, wV^{q-r} está en A_r. Por tanto,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^n} |Tf|^q w &= \int_{\mathbf{R}^n} |Tf|^q V^{-(r-q)q/r} V^{(r-q)q/r} w \\
&\leq \left(\int_{\mathbf{R}^n} |Tf|^r w V^{q-r} \right)^{q/r} \left(\int_{\mathbf{R}^n} V^q w \right)^{(r-q)/r} \\
&\leq C \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f|^r w V^{q-r} \right)^{q/r} \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f|^q w \right)^{(r-q)/r} \\
&\leq C \int_{\mathbf{R}^n} |f|^q w;
\end{aligned}
$$

donde la segunda desigualdad se deduce de la hipótesis sobre T y del teorema de Muckenhoupt, y la tercera desigualdad de $|f(x)| \leq V(x)$ en casi todo punto y $q - r < 0$, de modo que $V(x)^{q-r} \leq |f(x)|^{q-r}$ en casi todo punto.

(2) Mostramos ahora que si $1 < p < \infty$ y q es tal que $1 < q < \mathrm{mín}(p, r)$, T está acotado en $L^p(w)$ para $w \in A_{p/q}$. El teorema 3 se deducirá de la propiedad 5 del teorema 2.

Fijemos $w \in A_{p/q}$; por dualidad existe $u \in L^{(p/q)'}(w)$ de norma 1 tal que

$$\left(\int_{\mathbf{R}^n} |Tf|^p w\right)^{q/p} = \int_{\mathbf{R}^n} |Tf|^q wu.$$

Para $s > 1$, $wu \leq M((wu)^s)^{1/s}$ y $M((wu)^s)^{1/s} \in A_1$. Por tanto, utilizando la primera parte de la prueba

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} |Tf|^q wu &\leq \int_{\mathbf{R}^n} |Tf|^q M((wu)^s)^{1/s} \\ &\leq C \int_{\mathbf{R}^n} |f|^q M((wu)^s)^{1/s} \\ &= C \int_{\mathbf{R}^n} |f|^q w^{q/p} M((wu)^s)^{1/s} w^{-q/p} \\ &\leq C \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f|^p w\right)^{q/p} \left(\int_{\mathbf{R}^n} M((wu)^s)^{(p/q)'/s} w^{1-(p/q)'}\right)^{1/(p/q)'} . \end{aligned}$$

Como $w \in A_{p/q}$, por la propiedad 2, $w^{1-(p/q)'} \in A_{(p/q)'}$. Si ahora tomamos s suficientemente cercano a 1, $w^{1-(p/q)'} \in A_{(p/q)'/s}$ por la propiedad 5. Por el teorema 1, la segunda integral se acota por

$$C \int_{\mathbf{R}^n} (wu)^{(p/q)'} w^{1-(p/q)'} = C.$$

Esto termina la prueba. □

La ventaja de esta prueba está en que es más fácil bajar en el índice si sólo pedimos pesos A_1 y para subir utilizamos el resultado que se prueba en la primera parte y no la hipótesis directamente.

Si $s > 1$, sin más que escoger $V = (Mf^s)^{1/s}$ en la primera parte de la prueba podemos obtener una variante del teorema anterior.

Teorema 4. *Sea T un operador acotado en $L^r(w)$ para todo peso $w \in A_{r/s}$ (con cota que sólo depende de la constante del peso w), entonces T está acotado en $L^p(w)$ para todo $w \in A_{p/s}$, $s < p < \infty$.*

Para dar otra variante necesitamos unas definiciones. Sea $\lambda > 1$, diremos que $w \in A_p^\lambda$ para $1 < p < \infty$ si

$$\sup_Q \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\lambda'/(\lambda'-p)}\Big)^{(\lambda'-p)/\lambda'} \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1-p'}\Big)^{p-1} < \infty\,,$$

y diremos que $w \in A_1^\lambda$ si $M(w^\lambda)(x) \leq C w^\lambda(x)$ c.t.p. El siguiente teorema, que aparece en [18], se prueba como antes.

Teorema 5. *Sea $1 < r < \lambda'$ y T un operador acotado en $L^r(w)$ para todo $w \in A_r^\lambda$ (con constante que sólo depende de la constante del peso). Entonces, T está acotado en $L^p(w)$ para todo $w \in A_p^\lambda$ y todo $p \in (1, \lambda')$.*

3. Extensión a otros operadores

Si analizamos la prueba veremos que estamos utilizando varios elementos que son exclusivos de la función maximal de Hardy-Littlewood, lo que parece restringir su uso con otros operadores.

3.1. Sobre la primera parte de la prueba. Para $f \in L^p(w)$ basta con tener $V \in L^p(w)$ que cumpla

$$|f(x)| \leq V(x) \text{ c.t.p.}, \ MV(x) \leq CV(x) \text{ c.t.p.}, \ \|V\|_{p,w} \leq C\|f\|_{p,w} .$$

(En realidad, $V = Mf$ no cumple la segunda condición si no se eleva a una potencia menor que uno.) Para construir una función V con estas propiedades no necesitamos tener expresamente el operador maximal de Hardy-Littlewood, cualquier operador positivo acotado en $L^p(w)$ sirve igual aplicando lo que se ha dado en llamar *algoritmo de Rubio de Francia* (terminología introducida por S. Bloom en [1]), es decir,

$$V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} N^{-k} M^k f(x) ,$$

donde N es el doble de la norma de M en $L^p(w)$ y M^k es el operador obtenido al iterar k veces M.

También usamos la parte fácil de la factorización, es decir, $w_0 w_1^{1-p} \in A_p$. Esta inclusión se comprueba inmediatamente a partir de la condición A_p de Muckenhoupt. ¿Podríamos conseguirla sin ella? En realidad, usamos algo menos, $w_0 w_1^{s-p} \in A_p$ para algún $s > 1$, y esto es fácil de probar por interpolación. Observemos primero que es fácil de probar que M está acotado en $L^p(w)$ si $w \in A_1$ (véase, por ejemplo, [5, teorema 2.16], [10, teorema 2.12]). Entonces, el operador $f \mapsto w_1^{-1} M(w_1 f)$ está acotado en $L^s(w_0 w_1^s)$ para $w_0 \in A_1$ y en $L^\infty(w_0 w_1^s)$, así que basta interpolar y escribir el resultado en L^p. Para repetir este argumento con otro operador positivo sólo necesitamos que esté acotado para pesos de tipo A_1.

3.2. Sobre la segunda parte de la prueba. La elección del peso A_1 que mayore a uw la podemos hacer igualmente con el algoritmo de Rubio de Francia mencionado. Además, estamos utilizando las propiedades de dualidad y la desigualdad de Hölder inversa para recuperar la clase A_p.

Si consideramos $B_p = \{w : w^{s(1-p')} \in A_{p'} \text{ para algún } s > 1\}$, la prueba funciona directamente con esta clase de pesos. Sólo utilizamos las propiedades de las clases A_p para asegurarnos de que este conjunto coincide con A_p, de modo que a falta de éstas para otro operador distinto del maximal de Hardy-Littlewood, el teorema de extrapolación dará el resultado en la clase B_p.

3.3. Intervienen dos operadores. Sea S un operador lineal y positivo y S^* su adjunto. S está acotado en $L^1(w)$ si y sólo si $S^* w \leq Cw$ en casi todo punto y está acotado en $L^p(w)$ si y sólo si S^* está acotado en $L^{p'}(w^{1-p})$. Además, un argumento como el de más arriba prueba que está acotado en $L^p(w_0 w_1^{1-p})$ si $S^* w_0 \leq Cw_0$ y $Sw_1 \leq Cw_1$ en casi todo punto. Tenemos los ingredientes para enunciar y probar un teorema de extrapolación análogo al teorema 3. Lo que me interesa resaltar con este ejemplo es que intervienen dos operadores si S no es autoadjunto.

3.4. Otro enunciado para el teorema de extrapolación. Dado un operador $\mathcal{M}$ que es un supremo de operadores lineales positivos, llamamos $\mathcal{M}^*$ al supremo de su adjuntos y definimos

$$W_1(\mathcal{M}) = \{w : \mathcal{M}^* w \leq w \text{ c.t.p.}\}$$

y, si $1 < p < \infty$,

$$W_p(\mathcal{M}) = \{w : \mathcal{M} \text{ está acotado en } L^p(w)\}\,.$$

(Si $\mathcal{M}$ es lineal, las dos definiciones coinciden para $p = 1$; para la función maximal de Hardy-Littlewood los operadores $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^*$ coinciden.) Diremos que $\mathcal{M}$ es *admisible* si $W_1(\mathcal{M}) \subset W_p(\mathcal{M})$ para todo $p > 1$. Definimos también

$$\begin{aligned} B_p(\mathcal{M}) &= \{w : w^{s(1-p')} \in W_{p'}(\mathcal{M}^*) \ \text{ para algún } s > 1\} \\ &= \bigcup_{s>1} \{w^{(1-p)/s} : w \in W_{p'}(\mathcal{M}^*)\}\,. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las observaciones previas, la prueba del teorema de extrapolación se puede copiar para probar el siguiente teorema.

Teorema 6. *Sea $\mathcal{M}$ un operador admisible. Si T está acotado en $L^r(w_0 w_1^{s-r})$ para todo $1 < s < r$ y todos los pesos $w_0 \in W_1(\mathcal{M})$ y $w_1 \in W_1(\mathcal{M}^*)$ (con cota que sólo depende de las constantes de la condición W_1 y de s), entonces T está acotado en $L^p(w)$ para todo $w \in B_p(\mathcal{M})$ y todo $1 < p < \infty$.*

Definición.

1. Diremos que $\mathcal{M}$ no tiene *pesos extremales* si para todo p y todo $w \in W_p(\mathcal{M})$ existe $s > 1$ tal que $w^s \in W_p(\mathcal{M})$.
2. Diremos que $\mathcal{M}$ tiene la *propiedad de dualidad* si $W_{p'}(\mathcal{M}^*) = \{w^{1-p'} : w \in W_p(\mathcal{M})\}$.

Cuando $\mathcal{M}$ tiene estas dos propiedades se tiene $B_p(\mathcal{M}) = W_p(\mathcal{M})$ y la conclusión del teorema es que T está acotado en $L^p(w)$ para todo $w \in W_p(\mathcal{M})$.

4. Algunos ejemplos

Si tomamos como $\mathcal{M}$ el operador maximal fuerte definido como el supremo de los promedios sobre todos los rectángulos de $\mathbf{R}^n$ de lados paralelos a los ejes (que coincide con $\mathcal{M}^*$), todo funciona como en el caso de la función maximal de Hardy-Littlewood porque no tiene pesos extremales y cumple la propiedad de dualidad. Del mismo modo podríamos considerar otros operadores maximales de los que aparecen en [11].

Si escogemos como $\mathcal{M}$ el operador maximal de Hardy-Littlewood a la derecha en $\mathbf{R}$, $\mathcal{M}^*$ es el operador maximal de Hardy-Littlewood a la izquierda. Sus pesos se estudian en [19]; el teorema 6 se aplica y como $\mathcal{M}$ tiene las propiedades de dualidad y no existencia de pesos extremales, la conclusión vale con $W_p(\mathcal{M})$.

Sea Ω una función no negativa e integrable en la esfera unidad S^{n-1}. Definimos la función maximal

$$M_\Omega f(x) = \sup_{R>0} \frac{1}{R^n} \int_{|y|<R} \Omega(y') \, |f(x-y)| \, dy \,,$$

donde $y' = |y|^{-1}y$. El supremo de los adjuntos es $M_{\tilde{\Omega}}$ con $\tilde{\Omega}(y) = \Omega(-y)$. En [22] se prueba, siguiendo el método de [15], que si $\Omega \in L^q(S^{n-1})$ para algún $q > 1$, los pesos no extremales de $\mathcal{M} = M_\Omega + M$ (donde M es el operador de Hardy-Littlewood) se pueden extrapolar. Como esos pesos no extremales se pueden factorizar y tienen una propiedad de dualidad, el teorema 6 también vale (la hipótesis se cumple con w_0 no extremal, pero eso es suficiente).

El operador M_Ω entra dentro de una familia de operadores maximales (algunos también considerados en [22]) para los que en [4] se describen clases de pesos a los que se puede aplicar el teorema 6. Mencionaremos entre ellos el operador maximal esférico diádico (supremo de promedios sobre esferas de radios diádicos) para el que en [7] se prueba que tiene pesos extremales y además no cumple la propiedad de dualidad.

El teorema de extrapolación se puede aplicar para obtener desigualdades con peso para operadores integrales singulares de tipo homogéneo con núcleo no regular, a partir de los resultados para $p = 2$. La ventaja de la extrapolación y de considerar las clases asociadas a M_Ω es clara cuando se compara con resultados parciales anteriores ([2], [21]). Lo mismo se puede decir para las funciones cuadráticas de [8]; en [6] obtenemos mejores resultados con menos trabajo.

5. Otras observaciones

5.1. Dos pesos. Si repasamos la segunda parte de la prueba del teorema 3 comprobaremos que podemos deducir resultados con dos pesos, a partir de resultados con un peso. Diremos que el par $(u, v) \in S_p$ si M está acotado de $L^p(v)$ en $L^p(u)$.

Teorema 7. *Sea T un operador acotado en $L^r(w)$ para algún $r \geq 1$ y para todo peso $w \in A_r$ (con cota que sólo depende de la constante A_r de w); entonces, si $1 < p < \infty$, T está acotado de $L^p(v)$ en $L^p(u)$ siempre que $(v^{s(1-p')}, u^{s(1-p')}) \in S_{p'}$ para algún $s > 1$.*

Ahora no podemos evitar la potencia $s > 1$ como en el teorema 3 original, porque la propiedad 4 del teorema 2 no se cumple para pares de pesos distintos. Se puede ver que los pesos de la conclusión coinciden con los pesos no extremales de S_p.

No debe extrañar la conclusión con dos pesos partiendo de desigualdades con un peso, porque para pesos no extremales se puede incluir un peso de la clase A_p entre ellos ([13]); con este resultado, el teorema 7 también es consecuencia directa del teorema original.

5.2. Operadores más singulares. Las hipótesis del teorema 6 no requieren que el operador maximal $\mathcal{M}$ esté acotado en los espacios para los que el operador T debe estarlo; esto puede parecer una observación inútil pero, como en otras situaciones, el operador maximal esférico sirve para aclarar las ideas. Este operador no está acotado si $p \leq n/(n-1)$ ni siquiera para $w \equiv 1$ y, claramente, $1 \in W_1(\mathcal{M})$ (ahora $\mathcal{M} = \mathcal{M}^*$). Por tanto, no es admisible en el sentido definido más arriba. Sin embargo, hay algunos resultados posibles.

Recientemente, en [6] mostramos que cierta función cuadrática singular está acotada en $L^2((w_0 w_1^{-1})^{1/s})$ para pesos $w_0, w_1 \in W_1(\mathcal{M})$ y $s > 1$, lo que es suficiente para aplicar la primera parte de la prueba del teorema de extrapolación; la conclusión es que un operador que satisfaga esa propiedad está acotado en $L^p(w^{1/s})$, para $p < 2$ y $s > 1$, si $w \in W_1(\mathcal{M})$ y además $w \in W_{p/(2-p)}(\mathcal{M})$. Debido a las restricciones impuestas por la función maximal esférica, esta última condición no se cumple para cualquier p ni siquiera si $w \equiv 1$, en cuyo caso vale si $p/(2-p) > n/(n-1)$, o sea, $2n/(2n-1) < p \leq 2$; para estos valores de p también valen los pesos $w(x) = |x|^\alpha$ con $1 - n < \alpha < 0$ (véase [7]). De modo que salen desigualdades con peso para índices p para los que la función maximal esférica no está acotada. También se pueden dar resultados para $p > 2$.

Al hilo de este ejemplo me gustaría mencionar una cuestión que encuentro interesante por sí misma: ¿es cierta la inclusión $W_1(\mathcal{M}) \subset W_p(\mathcal{M})$ para el operador maximal esférico cuando $p > n/(n-1)$, al menos para los pesos no extremales de $W_1(\mathcal{M})$? Si la respuesta es afirmativa, $2n/(2n-1) < p \leq 2$ y $w^s \in W_1(\mathcal{M})$ para $s > 1$ son las únicas condiciones en el resultado del párrafo anterior.

5.3. Desigualdades débiles. En la hipótesis del teorema 3 se pueden reemplazar las acotaciones fuertes por acotaciones débiles (en la conclusión resultan acotaciones fuertes). La prueba que presentamos también funciona en este caso y, de hecho, basta con modificar la primera parte. Definimos $E_\lambda = \{x : |Tf(x)| > \lambda\}$ y sea $w \in A_1$. Entonces

$$w(E_\lambda) := \int_{E_\lambda} w \leq \left(\int_{E_\lambda} w V^{q-r} \right)^{q/r} \left(\int_{\mathbf{R}^n} V^q w \right)^{(r-q)/r}$$

y la elección de V es como arriba. Ahora, T satisface desigualdades débiles para el peso $w \in A_1$ si $1 < q < r$; del teorema de interpolación de Marcinkiewicz se deducen las desigualdades fuertes para pesos A_1.

Referencias

[1] S. Bloom, Solving weighted inequalities using the Rubio de Francia algorithm, *Proc. Amer. Math. Soc.* **101** (1987), 306–312.

[2] J. Duoandikoetxea, Weighted norm inequalities for homogeneous singular integrals, *Trans. Amer. Math. Soc.* **336** (1993), 869–880.

[3] J. Duoandikoetxea, *Desigualdades con peso en análisis armónico*, Séptima Escuela Venezolana de Matemáticas, Universidad de los Andes (Mérida, Venezuela), 1994.

[4] J. Duoandikoetxea, Almost orthogonality and weighted inequalities, *Contemp. Math.* **189** (1995), 213–226.

[5] J. Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, Graduate Studies in Mathematics **29**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[6] J. Duoandikoetxea y E. Seijo, Weighted inequalities for square functions through extrapolation, aparecerá en *Studia Math.*

[7] J. Duoandikoetxea y L. Vega, Spherical means and weighted inequalities, *J. London Math. Soc.* **53** (1996), 343–353.

[8] Y. Ding, D. Fan y Y. Pan, Weighted boundedness for a class of rough Marcinkiewicz integrals, *Indiana Univ. Math. J.* **48** (1999), 1037–1055.

[9] J. García-Cuerva, An extrapolation theorem in the theory of A_p weights, *Proc. Amer. Math. Soc.* **87** (1983), 422–426.

[10] J. García-Cuerva y J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North Holland Math. Studies **116**, North Holland, Amsterdam, 1985.

[11] B. Jawerth, Weighted norm inequalities: linearization, localization and factorization, *Amer. J. Math.* **108** (1986), 361–414.

[12] B. Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, *Trans. Amer. Math. Soc.* **165** (1972), 207–226.

[13] C. J. Neugebauer, Inserting A_p-weights, *Proc. Amer. Math. Soc.* **87** (1983), 644–648.

[14] J. L. Rubio de Francia, Factorization and extrapolation of weights, *Bull. Amer. Math. Soc.* **7** (1982), 393–395.

[15] J. L. Rubio de Francia, Factorization theory and A_p weights, *Amer. J. Math.* **106** (1984), 533–547.

[16] J. L. Rubio de Francia, Acotación de operadores en retículos de Banach y desigualdades con peso, *Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* **18** (1985), 187–204.

[17] J. L. Rubio de Francia, Linear operators in Banach lattices and weighted L^2 inequalities, *Math. Nachr.* **133** (1987), 197–209.

[18] F. J. Ruiz, *Teoría de Calderón-Zygmund para funciones vectoriales y desigualdades con peso*, Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza, 1983.

[19] E. Sawyer, Weighted inequalities for the one-sided Hardy-Littlewood maximal functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **297** (1986), 53–61.

[20] E. M. Stein, *Harmonic analysis: real variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1993.

[21] D. K. Watson, Weighted estimates for singular integrals via Fourier transform estimates, *Duke Math. J.* **60** (1990), 389–399.

[22] D. K. Watson, Vector-valued inequalities, factorization and extrapolation for a family of rough operators, *J. Funct. Anal.* **121** (1994), 389–415.

Departamento de Matemáticas, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea, Apartado 644, 48080 Bilbao, Spain

Correo electrónico: `mtpduzuj@lg.ehu.es`