

## FUNCIONES DE HERMITE, DERIVACIÓN FRACCIONARIA Y CIERTAS FAMILIAS DE OPERADORES

PEDRO J. MIANA

*En homenaje al Prof. José Javier Guadalupe Hernández, «Chicho»*

ABSTRACT. In this paper, we study the connection between Weyl fractional calculus of the gaussian function and Hermite functions. This relationship appears in a natural way to treat integrated families. Some particular cases are considered.

Es bien conocido ([Go], pág. 121) que el operador Laplaciano en  $\mathbb{R}$ ,  $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$ , es el generador infinitesimal en  $L^1(\mathbb{R})$  de una función coseno  $(C(t))_{t \geq 0}$  uniformemente acotada:

$$C(t)f(s) = \frac{1}{2}(f(s+t) + f(s-t))$$

con  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , y de un semigrupo holomorfo  $(T(z))_{\Re z > 0}$  de operadores acotados, el semigrupo gaussiano,

$$T(z)f(s) = g^z * f(s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi z}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4z}} f(s-t) dt$$

con  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

La relación entre estas dos familias de operadores viene expresada a través de la fórmula abstracta de Weierstrass, (ver por ejemplo, pág. 120 de [Go] o [KV]):

$$T(z)f = \frac{1}{\sqrt{\pi z}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4z}} C(t)f dt$$

con  $\Re z > 0$  y  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

Este planteamiento es fácilmente ampliado al contexto de espacios de Banach  $X$  y operadores lineales y acotados,  $\mathcal{B}(X)$  (ver [Go], [Vi]).

En 1997, V. Keyantuo [Ke] probó que si  $A$  es el generador infinitesimal de una función coseno  $n$ -veces integrada,  $(C_n(t))_{t \geq 0}$ , en un espacio de Banach  $X$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $A$  es el generador infinitesimal de un semigrupo holomorfo  $(T(z))_{\Re z > 0}$  cuya expresión explícita es:

$$T(z)x = \frac{1}{2^n \sqrt{\pi z}^{\frac{(n+1)}{2}}} \int_0^{+\infty} H_n\left(\frac{t}{2\sqrt{z}}\right) e^{-\frac{t^2}{4z}} C_n(t)x dt$$

con  $\Re z > 0$ ,  $x \in X$ , y  $H_n$  es el polinomio de Hermite de grado  $n$ .

---

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 47D62; Secondary 33E30, 26A33.

*Key words and phrases*. Integrated families, Hermite functions, Weyl fractional calculus.

Esta investigación ha sido subvencionada por el proyecto PB97-0094 de la DGES.

Además V. Keyantuo comenta en su trabajo [Ke], pág. 146, «el resultado puede tomar una forma más precisa en este contexto si uno encuentra un análogo al Lema 2.3 que relacione el semigrupo  $T(t)$  con la función coseno  $\alpha$ -veces integrada  $C_\alpha(s) = 1/\Gamma(\alpha) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} C(s) ds$  generada por  $A$ ».

En particular, el Laplaciano en  $\mathbb{R}^n$  es el generador infinitesimal de una función coseno  $\alpha$ -veces integrada en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , con

$$\alpha > (n-1) \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right|.$$

El cálculo fraccionario se ha revelado como una de las mejores herramientas analíticas para tratar las familias  $\alpha$ -veces integradas, [Mi]. En especial la fórmula de integración por partes (6) permite utilizar a las familias  $\alpha$ -veces integradas como núcleos de expresiones integrales.

En el contexto particular de este trabajo, se hace necesario poder calcular derivadas de Weyl de orden  $\alpha > 0$  de la función  $e^{-t^2}$  y relacionarlas con funciones especiales conocidas en la literatura matemática dando lugar a *fórmulas de Rodrigues* generalizadas.

Esta idea de unir el cálculo fraccionario de funciones elementales y familias de funciones especiales se ha desarrollado trabajando o bien en el contexto de cálculo fraccionario de Riemann-Liouville ([LTO], [LOT]) o bien en el contexto de cálculo fraccionario complejo ([Ca], [GR]) y algunas veces en el contexto del cálculo fraccionario de Weyl ([Sr]).

En la primera sección de este trabajo consideramos las ecuaciones clásicas de Hermite y de Weber y señalamos propiedades conocidas de sus soluciones: las funciones de Hermite y las funciones cilíndricas parabólicas respectivamente.

Una vez introducidas la integral y derivación fraccionaria de Weyl, se calculan explícitamente las integrales y derivadas de las funciones  $e^{-t^2}$  y  $e^{-t^2/2}$  y se establece la relación con las funciones de Hermite y las funciones cilíndricas parabólicas respectivamente.

En la segunda sección, extendemos el resultado obtenido por V. Keyantuo a generadores infinitesimales,  $A$ , de funciones coseno  $\alpha$ -veces integradas con  $\alpha > 0$ . Obtenemos una nueva versión de la fórmula abstracta de Weierstrass que relaciona estas familias de operadores con los semigrupos holomorfos generados por  $A$ .

Para terminar consideramos el caso del Laplaciano en los espacios  $L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $1 \leq p < +\infty$  y  $C_0(\mathbb{R}^n)$ , y relacionamos los resultados conocidos con los hallados en la segunda sección.

Sé que a Chicho este trabajo le habría gustado y sé que habría tenido valiosas aportaciones que hacer a este humilde nota.

## 1. FUNCIONES DE HERMITE, FUNCIONES CILÍNDRICAS PARABÓLICAS Y DERIVACIÓN FRACCIONARIA DE WEYL

En esta sección introduciremos las dos familias de funciones mencionadas: las funciones de Hermite y las funciones cilíndricas parabólicas y expresaremos las relaciones entre ellas. El cálculo fraccionario de Weyl es utilizado para probar nuevos resultados y algunos ya conocidos.

**1.1. Funciones de Hermite y funciones cilíndricas parabólicas.**

En los textos tradicionales (ver por ejemplo [Da], pág. 344, o [Vi], pág. 554) de ecuaciones diferenciales, la ecuación diferencial de Hermite es la siguiente:

$$w''(z) - 2zw'(z) + 2\nu w(z) = 0$$

con  $\nu \in \mathbb{C}$ . Se dicen *funciones de Hermite* de orden  $\nu$  a la soluciones de esta ecuación diferencial. Trivialmente, si  $H_\nu(z)$  es una solución de la ecuación anterior entonces  $H_\nu(-z)$  es también solución, y como

$$W(H_\nu(z), H_\nu(-z)) = \frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{z^2},$$

esto es, el wronskiano es no nulo, entonces  $H_\nu(z)$  y  $H_\nu(-z)$  son soluciones linealmente independientes siempre y cuando  $\nu \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Entre las representaciones que admite la función de Hermite consideramos la representación integral

$$H_\nu(z) = A \int_\gamma \frac{e^{-w^2+2zw}}{w^{\nu+1}} dw,$$

donde  $A$  es una constante arbitraria y  $\gamma$  es el camino en el plano complejo que consta de las semirrectas  $(-\infty, -a)$ ,  $(a, +\infty)$  y la semicircunferencia  $|w| = a > 0$ ,  $\Im w \geq 0$ . Además  $H_\nu(z)$  es una función entera en las variables  $z$  y  $\nu$ .

En el caso  $\nu = n \in \mathbb{N}$ , entonces  $H_n$  es el llamado *polinomio de Hermite* y es tomado  $A = \frac{n!}{2\pi i}$  para seguir el convenio de normalizar el polinomio de Hermite de forma que el coeficiente de  $z^n$  sea  $2^n$ . Así, se tiene la fórmula de Rodrigues

$$(1) \quad H_n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{-w^2+2zw}}{w^{n+1}} dw = \frac{n!e^{z^2}}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{-u^2}}{(u+z)^{n+1}} du = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}.$$

Son conocidas otras representaciones integrales; entre ellas destacamos

$$(2) \quad H_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2-2zt}}{t^{\nu+1}} dt$$

con  $\Re \nu < 0$ . También es conocido el desarrollo asintótico de las funciones de Hermite ([Da], pág. 350). Así, se tiene para  $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$  que

$$H_\alpha(z) \sim (2z)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(2k - \alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)(2z)^{2k}}, \quad z \rightarrow \infty,$$

con  $-\frac{3}{4}\pi < \arg(z) < \frac{3}{4}\pi$ . Por tanto  $|H_\alpha(z)| \leq C(1 + |z|^\alpha)$  con  $C > 0$  y  $\Re z > 0$ . Por último, dos relaciones conocidas de las funciones de Hermite son, la llamada relación de recurrencia a tres términos

$$H_{\nu+1}(z) - 2zH_\nu(z) + 2\nu H_{\nu-1}(z) = 0$$

y la igualdad de la derivada  $H'_\nu(z) = 2\nu H_{\nu-1}(z)$ .

Si en la ecuación de Hermite, realizamos la sustitución de la función incógnita  $w(z) = e^{\frac{z^2}{2}}u(z)$ , obtenemos la igualdad

$$w''(z) + (1 + 2\nu - z^2)u(z) = 0.$$

Y si ahora cambiamos la variable  $\sqrt{2}z = v$ , obtenemos la llamada *ecuación de Weber*

$$u''(v) + \left(\frac{1}{2} + \nu - \frac{v^2}{4}\right)u(v) = 0$$

con  $\nu \in \mathbb{C}$ . Esta ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden también se obtiene ([MOS], pág. 489) separando las variables en la ecuación de ondas  $\Delta u = k^2 u$  en coordenadas cilíndricas parabólicas. Las soluciones de esta ecuación diferencial se denominan *funciones de un cilindro parabólico* o *funciones de Weber-Hermite*. También es claro que si  $D_\nu(v)$  es solución de la ecuación de Weber  $D_\nu(-v)$  también es solución.

Estas funciones han sido objeto de un estudio más profundo que las funciones de Hermite, ver por ejemplo [WW], [AS]. Se conocen diversas representaciones de estas funciones. Tal vez la más conocida es

$$D_\nu(z) = 2^{\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}} z^{-\frac{\nu-1}{2}} W_{\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}}\left(\frac{1}{2}z^2\right),$$

donde  $W$  es la función de Whitakker, ver [WW], pág. 347, y por tanto  $D_\nu(z)$  es expresada a partir de las funciones hipergeométricas degeneradas, ver [Vi], pág. 560.  $D_\nu(z)$  es un función entera en  $z$  y real si  $z$  y  $\nu$  son reales.

En el caso  $\nu = n \in \mathbb{N}$ , se prueba la fórmula de Rodrigues

$$(3) \quad D_n(z) = (-1)^n e^{\frac{z^2}{4}} \frac{d^n}{dz^n} e^{-\frac{z^2}{2}} = 2^{-n/2} e^{-\frac{z^2}{4}} H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right).$$

En el caso  $n = 0$  entonces  $D_0(z) = e^{-\frac{z^2}{4}}$ . Otras fórmulas de diferenciación conocidas ([MOS], pág. 327) son

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dz^n} (e^{\frac{z^2}{4}} D_\nu)(z) &= (-1)^n (-\nu)_n e^{\frac{z^2}{4}} D_{\nu-n}(z), \\ \frac{d^n}{dz^n} (e^{-\frac{z^2}{4}} D_\nu)(z) &= (-1)^n e^{-\frac{z^2}{4}} D_{\nu+n}(z), \end{aligned}$$

donde  $(-\nu)_n = (-\nu)(-\nu+1)\cdots(-\nu+n-1)$ .

El desarrollo asintótico de las funciones cilíndricas parabólicas ([WW], pág. 347) para  $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$  es

$$D_\alpha(z) \sim e^{-\frac{z^2}{4}} z^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(2k - \alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)2^k z^{2k}}, \quad z \rightarrow \infty,$$

con  $-\frac{3}{4}\pi < \arg(z) < \frac{3}{4}\pi$ . Por tanto  $|D_\alpha(z)| \leq M|e^{-\frac{z^2}{4}}|(1+|z|^\alpha)$  con  $M > 0$  y  $\Re z > 0$ . Las relaciones de recurrencia siguientes son conocidas:

$$\begin{aligned} D_{\nu+1}(z) - zD_\nu(z) + \nu D_{\nu-1}(z) &= 0, \\ D'_\nu(z) + \frac{z}{2}D_\nu(z) - \nu D_{\nu-1}(z) &= 0, \\ D'_\nu(z) - \frac{z}{2}D_\nu(z) + D_{\nu-1}(z) &= 0, \\ 2D'_\nu(z) - \nu D_{\nu-1}(z) + D_{\nu+1}(z) &= 0. \end{aligned}$$

Además, en [GrR] se tabulan varias representaciones integrales de estas funciones. Entre ellas señalamos la enumerada con 3.642, (1), pág. 337,

$$(4) \quad \int_0^{+\infty} x^{\nu-1} e^{-\beta x^2 - \gamma x} dx = (2\beta)^{-\frac{\nu}{2}} \Gamma(\nu) e^{\frac{\gamma^2}{8\beta}} D_{-\nu} \left( \frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}} \right)$$

con  $\Re\beta > 0$  y  $\Re\nu > 0$ . De entre las que son combinaciones de funciones cilíndricas parabólicas y funciones exponenciales, (pág. 885 y ss.) necesitaremos la enumerada con 7.728, pág. 887,

$$(5) \quad \int_0^{+\infty} (2t)^{-\frac{\nu}{2}} e^{-pt} e^{-\frac{q^2}{8t}} D_{\nu-1} \left( \frac{q}{\sqrt{2t}} \right) dt = \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} p^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-q\sqrt{p}}.$$

**1.2. Derivación fraccionaria de Weyl.**

Con ayuda de la derivación fraccionaria en sentido Weyl vamos a conseguir establecer relaciones entre las funciones de Hermite y las funciones cilíndricas parabólicas de igual orden extendiendo la igualdad (3) a cualquier orden  $\nu \in \mathbb{C}$ .

El factor  $(-1)^n$  y la derivada de orden  $n$  que aparecen en las fórmulas (1) y (3) hace pensar que para considerar una extensión de estas igualdades a órdenes  $\nu \in \mathbb{C}$ , deberemos trabajar con la derivada fraccionaria de Weyl.

Recordemos que dada  $f \in \mathcal{D} = \mathcal{C}_c^{(\infty)}(\mathbb{R})$ , o más generalmente  $f \in \mathcal{S}$  (funciones de la clase de Schwartz sobre  $\mathbb{R}$ ) se define ([MR], [SKM]) la integral fraccionaria de Weyl de orden  $\alpha$  con  $\alpha > 0$  mediante la expresión

$$W^{-\alpha} f(u) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_u^{+\infty} (t-u)^{\alpha-1} f(t) dt$$

con  $u \in \mathbb{R}$ . Para definir la derivada de Weyl de orden  $\alpha$  con  $\alpha > 0$  se toma  $n = [\alpha] + 1$  y se considera

$$W^\alpha f(u) := \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{du^n} \int_u^{+\infty} (t-u)^{n-\alpha-1} f(t) dt.$$

Notar que si  $\alpha \in \mathbb{N}$  entonces  $W^\alpha f = (-1)^\alpha f^{(\alpha)}$ ,  $W^{\alpha+\beta} = W^\alpha W^\beta$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $W^0 = \text{Id}$ , el operador identidad.

Fácilmente se prueba que dadas  $f, g \in \mathcal{S}$  y  $\alpha > 0$  entonces

$$(6) \quad \int_0^{+\infty} f(t)g(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} W^\alpha f(t) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds dt.$$

En [SKM], pág. 96, se encuentran formulaciones equivalentes de esta igualdad. Otra propiedad del cálculo fraccionario de Weyl es la siguiente.

**Proposición 1.1.** *Dada  $f \in \mathcal{S}$  y  $a > 0$ , consideramos  $f_a(t) := f(at)$ . Entonces*

$$W^\alpha f_a(t) = a^\alpha W^\alpha f(at)$$

con  $\alpha, t \in \mathbb{R}$ .

En esta sección estamos interesados en estudiar la función

$$G_\alpha(t) := e^{t^2} W^\alpha(e^{-t^2})(t)$$

con  $\alpha, t \in \mathbb{R}$ . A posteriori probaremos, Teorema 1.4, que  $G_\alpha(t) = H_\alpha(t)$ .

**Proposición 1.2.** Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $G_\alpha(t) := e^{t^2} W^\alpha(e^{-t^2})(t)$  entonces se cumple:

- $G'_\alpha(t) = 2tG_\alpha(t) - G_{\alpha+1}(t)$ , con  $t \in \mathbb{R}$ , y
- $G''_\alpha(t) = G_{\alpha+2}(t) - 4tG_{\alpha+1}(t) + (2 + 4t^2)G_\alpha(t)$ , con  $t \in \mathbb{R}$ .

Por tanto es inmediato que

$$G''_\alpha(t) - 2tG'_\alpha(t) + 2\alpha G_\alpha(t) = G_{\alpha+2}(t) - 2tG_{\alpha+1}(t) + 2(\alpha + 1)G_\alpha(t)$$

con  $t \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Aplicar la definición de  $G_\alpha$ ,  $\frac{d}{dt}W^\alpha(e^{-t^2}) = -W^{\alpha+1}(e^{-t^2})$  y obtenemos la primera igualdad. Para la segunda, utilizar la primera igualdad y agrupar.  $\square$

**Lema 1.3.** Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $G_\alpha(t) := e^{t^2} W^\alpha(e^{-t^2})(t)$ . Si se cumple que

$$G_{\alpha+1}(t) - 2tG_\alpha(t) + 2\alpha G_{\alpha-1}(t) = 0$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ , entonces

$$G_{\alpha+2}(t) - 2tG_{\alpha+1}(t) + 2(\alpha + 1)G_\alpha(t) = 0$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Basta aplicar derivación y la primera igualdad de la Proposición 1.2.  $\square$

En el siguiente teorema se da la fórmula de Rodrigues para el cálculo fraccionario de Weyl de la función gaussiana.

**Teorema 1.4.** Dada  $\alpha \in \mathbb{R}$ , se cumple  $W^\alpha(e^{-t^2})(t) = e^{-t^2} H_\alpha(t)$ .

*Demostración.* Si  $\alpha < 0$  entonces

$$\begin{aligned} W^\alpha(e^{-t^2})(t) &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_t^{+\infty} (u-t)^{-\alpha-1} e^{-u^2} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(s+t)^2}}{s^{\alpha+1}} ds = \frac{e^{-t^2}}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-s^2-2ts}}{s^{\alpha+1}} ds. \end{aligned}$$

Ahora aplicamos la fórmula (2) y obtenemos  $W^\alpha(e^{-t^2})(t) = e^{-t^2} H_\alpha(t)$ . Si  $\alpha = 0$ , sabemos  $H_0(t) = 1$  y por tanto se cumple la igualdad. En el caso en que  $\alpha > 0$ , tomar  $n \in \mathbb{N}$  y tal que  $n - \alpha > 0$ , y  $\beta = \alpha - n < 0$ . Entonces se cumple que  $G_\beta(t) = H_\beta(t)$ , y por tanto

$$G_{\beta+2}(t) - 2tG_{\beta+1}(t) + 2(\beta + 1)G_\beta(t) = 0$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Reiterando el Lema 1.3,  $n$  veces, y aplicando la Proposición 1.2, obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= G_{\beta+n+2}(t) - 2tG_{\beta+n+1}(t) + 2(\beta + n + 1)G_{\beta+n}(t) \\ &= G_{\alpha+2}(t) - 2tG_{\alpha+1}(t) + 2(\alpha + 1)G_\alpha(t) = G''_\alpha(t) - 2tG'_\alpha(t) + 2\alpha G_\alpha(t). \end{aligned}$$

Y por tanto se concluye que  $G_\alpha(t) = H_\alpha(t)$  con  $t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Notas.** Otro planteamiento que se puede seguir en esta sección a la vista del Teorema 1.4 es trabajar con el concepto de derivación fraccionaria holomorfa de Weyl (ver por ejemplo [Ca], [GaR]).

El teorema anterior tiene una inmediata aplicación: estimar el módulo de  $H_\alpha$  sin necesidad de desarrollos asintóticos. Así, obtenemos

**Teorema 1.5.** *Dada  $\alpha \in \mathbb{R}$ , se cumple*

- $|H_\alpha(t)| \leq (2t)^\alpha$  con  $\alpha < 0$  y  $t > 0$ , y
- $|H_\alpha(t)| \leq C_\alpha(1 + t^\alpha)$  con  $\alpha > 0$  y  $t \geq 0$ .

*Demostración.* Si  $\alpha < 0$ , sabemos por el Teorema 1.4 que

$$e^{-t^2} H_\alpha(t) = W^\alpha(e^{-t^2})(t) = \frac{e^{-t^2}}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{+\infty} s^{-\alpha-1} e^{-s^2-2st} ds \leq e^{-t^2} (2t)^\alpha.$$

Si  $\alpha > 0$ , tomamos  $n > \alpha$ ; entonces

$$\begin{aligned} e^{-t^2} |H_\alpha(t)| &= |W^\alpha(e^{-t^2})(t)| = |W^{-(n-\alpha)} W^n(e^{-t^2})(t)| \\ &\leq \frac{e^{-t^2}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^{+\infty} u^{n-\alpha-1} |H_n(t+u) e^{-u^2-2ut}| du. \end{aligned}$$

Por tanto, sabiendo  $H_n$  es un polinomio de grado  $n$ , se tiene que

$$\begin{aligned} |H_\alpha(t)| &\leq C_\alpha \int_0^{+\infty} u^{n-\alpha-1} (1 + (t+u)^n) e^{-u^2-2ut} du \\ &\leq C_\alpha \int_0^{+\infty} u^{n-\alpha-1} e^{-u^2-2ut} du + C_\alpha \sum_{j=0}^n t^{n-j} \int_0^{+\infty} u^{n+j-\alpha-1} e^{-u^2-2ut} du. \end{aligned}$$

Aplicamos la fórmula (2) a cada una de las integrales y obtenemos

$$|H_\alpha(t)| \leq C_\alpha H_{-(n-\alpha)}(t) + C_\alpha \sum_{j=0}^n t^{n-j} H_{-(n+j-\alpha)}(t).$$

Por el primer apartado, deducimos que

$$|H_\alpha(t)| \leq C_\alpha t^{\alpha-n} + C_\alpha \sum_{j=0}^n t^{\alpha-2j}.$$

Como  $H_\alpha$  es una función continua en 0, es claro que  $|H_\alpha(t)| \leq C_\alpha(1 + t^\alpha)$  con  $t \geq 0$ . □

**1.3. De nuevo, funciones cilíndricas parabólicas.**

De igual forma que se ha trabajado con las funciones de Hermite, las funciones parabólicas cilíndricas admiten un tratamiento análogo. En el siguiente teorema presentamos los resultados obtenidos.

**Teorema 1.6.** *Dada  $\alpha \in \mathbb{R}$ , se tiene*

- $W^\alpha(e^{-\frac{t^2}{2}})(t) = e^{-\frac{t^2}{4}} D_\alpha(t)$  con  $t \in \mathbb{R}$ ,
- $W^\alpha(e^{-t^2})(t) = 2^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} D_\alpha(\sqrt{2}t)$  con  $t \in \mathbb{R}$ ,
- $H_\alpha(z) = 2^{\frac{\alpha}{2}} e^{\frac{z^2}{2}} D_\alpha(\sqrt{2}z)$  con  $z \in \mathbb{C}$ ,

- $|D_\alpha(t)| \leq e^{-\frac{t^2}{4}} t^\alpha$  con  $\alpha < 0$  y  $t > 0$ ,
- $|D_\alpha(t)| \leq M_\alpha e^{-\frac{t^2}{4}} (1 + t^\alpha)$  con  $\alpha > 0$  y  $t \geq 0$ .

## 2. FUNCIONES COSENO $\alpha$ -VECES INTEGRADAS Y SEMIGRUPOS HOLOMORFOS

En esta sección queremos probar directamente que los generadores de funciones coseno  $\alpha$ -veces integradas con  $\alpha > 0$  generan semigrupos holomorfos de ángulo  $\frac{\pi}{2}$ .

Una función coseno  $(C(t))_{t \geq 0}$  está formada por operadores lineales y acotados, fuertemente continuos sobre un espacio de Banach  $X$  que satisfacen la ecuación funcional

$$2C(s)C(t) = C(s+t) + C(s-t)$$

para  $s, t > 0$  y  $C(0) = I$ , ver [Go], pág. 120. Se define el *generador infinitesimal* (posiblemente un operador no acotado) de  $(C(t))_{t \geq 0}$  como la derivada de segundo orden de esta función en el cero para aquellos  $x \in X$  que exista, esto es,  $A(x) := C''(0)x$  para  $x \in D(A)$ .

Un  $C_0$ -semigrupo de operadores  $(T(t))_{t \geq 0}$  está formado por operadores lineales y acotados, fuertemente continuos sobre un espacio de Banach  $X$  que satisfacen la ecuación funcional

$$T(s+t) = T(t)T(s)$$

para  $s, t > 0$  y  $T(0) = I$ , ver [Go]. También se define el *generador infinitesimal* (posiblemente un operador no acotado) de  $(T(t))_{t \geq 0}$  como la derivada, en este caso, de primer orden de esta familia en el cero para aquellos  $x \in X$  que exista, esto es,  $A(x) := T'(0)x$  para  $x \in D(A)$ .

Impropriamente hablado, los  $C_0$ -semigrupos son las «funciones exponenciales» y las funciones coseno son los «cosenos trigonométricos» de los operadores lineales y acotados sobre un espacio de Banach  $X$ . Y de igual forma que en variable real, se cumple que si  $A$  genera una función coseno entonces la expresión conocida como fórmula abstracta de Weierstrass o de Poisson

$$T(t)x := \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} C(s)x ds$$

con  $x \in X$  y  $t > 0$  define un  $C_0$ -semigrupo de operadores cuyo generador infinitesimal es  $A$ .

Esta línea de investigación ha sido tratada en varios artículos y se ha considerado su generalización, primero para funciones coseno 1-vez integradas, ver [AK], Theorem 5.2, y después para funciones coseno  $n$ -veces integradas, ver [Ke], Proposition 2.5.

**Definición 2.1.** Dada  $\alpha > 0$ , una familia de operadores fuertemente continuos  $C_\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{B}(X)$  se dice que es una función coseno  $\alpha$ -veces integrada generada por  $A$  si existe  $\omega, M > 0$  tal que  $\|C_\alpha(t)\| \leq M e^{\omega t}$ , para  $\lambda > \omega$ ,  $\lambda^2 \in \rho(A)$  y

$$R(\lambda^2, A) = \lambda^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} C_\alpha(t) dt.$$



Es inmediato probar que si  $(C_\alpha(t))_{t>0}$  es una función coseno  $\alpha$ -veces integrada generada por  $A$ , entonces

$$(7) \quad C_\beta(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{\beta - \alpha - 1} C_\alpha(s) ds,$$

con  $\beta > \alpha$  y  $t > 0$ , define una función coseno  $\beta$ -veces integrada generada también por  $A$ , para más detalles ver [Ya].

Denotaremos por  $\Sigma(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |\arg(z)| < \alpha\}$ .

**Definición 2.2.** *Un operador cerrado y densamente definido  $A$  es el generador de un semigrupo holomorfo de ángulo  $\alpha$  si existe  $T : \Sigma(\alpha) \rightarrow \mathcal{B}(X)$  holomorfa tal que  $T(z + z') = T(z)T(z')$  con  $z, z' \in \Sigma(\alpha)$ .*

**Teorema 2.3** (Proposition 2.5 y Theorem 2.6 de [Ke]). *Sea  $A$  un operador lineal densamente definido y generador de una función coseno  $n$ -veces integrada  $(C_n(t))_{t>0}$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $A$  genera un semigrupo holomorfo de ángulo  $\pi/2$  dado por*

$$T(t)x := \frac{1}{2^n \sqrt{\pi} t^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^{+\infty} H_n\left(\frac{s}{2\sqrt{t}}\right) e^{-\frac{s^2}{4t}} C_n(s)x ds,$$

con  $t > 0$ , y la integral existe en sentido de Bochner con  $x \in X$ . Además si  $\|C_n(t)\| \leq Mt^n$ , entonces

$$\|T(z)\| \leq C \left(\frac{|z|}{\Re z}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Este resultado obtenido por V. Keyantuo es parcial ya que existen funciones coseno  $\alpha$ -veces integradas con  $\alpha > 0$  (ver ejemplos en el tercer párrafo) y no son consideradas directamente. Mediante las funciones de Hermite  $H_\alpha$  podemos extender este resultado a tales valores encontrando la subyacente naturaleza de la fórmula abstracta de Weierstrass.

**Teorema 2.4.** *Sea  $A$  un operador lineal densamente definido y generador de una función coseno  $\alpha$ -veces integrada  $(C_\alpha(t))_{t>0}$ . Entonces  $A$  genera un semigrupo holomorfo de ángulo  $\pi/2$  dado por*

$$T(z)x := \frac{1}{2^\alpha \sqrt{\pi} z^{\frac{\alpha+1}{2}}} \int_0^{+\infty} H_\alpha\left(\frac{s}{2\sqrt{z}}\right) e^{-\frac{s^2}{4z}} C_\alpha(s)x ds$$

con  $z \in \Sigma(\pi/2)$ , la integral existe en sentido de Bochner y  $x \in X$ . Además si  $\|C_\alpha(t)\| \leq Mt^\alpha$ , entonces

$$\|T(z)\| \leq C \left(\frac{|z|}{\Re z}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}.$$

*Demostración.* Tomemos  $z \in \Sigma(\pi/2)$ ; sabemos que  $\|C_\alpha(t)\| \leq Ce^{\omega t}$  con  $C, \omega > 0$ . Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \|T(z)x\| &\leq \frac{1}{2^\alpha \sqrt{\pi} |z|^{\frac{\alpha+1}{2}}} \int_0^{+\infty} \left| H_\alpha\left(\frac{s}{2\sqrt{z}}\right) e^{-\frac{s^2}{4z}} \right| \|C_\alpha(s)x\| ds \\ &\leq \frac{C}{|z|^{\frac{\alpha+1}{2}}} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{s^\alpha}{2^\alpha |z|^{\frac{\alpha}{2}}}\right) e^{-\frac{s^2 \Re z}{4|z|^2}} e^{\omega s} ds \end{aligned}$$

y  $T(z)$  define un operador acotado en  $\mathcal{B}(X)$  con  $z \in \Sigma(\pi/2)$ . Claramente  $T : \Sigma(\pi/2) \rightarrow \mathcal{B}(X)$  es holomorfa.

Tomemos  $n > \alpha$  con  $n \in \mathbb{N}$ , es inmediato que  $A$  genera una función coseno  $n$ -veces integrada  $(C_n(t))_{t>0}$  definido por la igualdad (7). Por el Teorema 2.3,  $A$  genera un semigrupo holomorfo dado por

$$\tilde{T}(t)x := \frac{1}{2^n \sqrt{\pi} t^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^{+\infty} H_n\left(\frac{s}{2\sqrt{t}}\right) e^{\frac{-s^2}{4t}} C_n(s)x ds$$

con  $t > 0$ . Como se cumple que

$$\frac{1}{2^\alpha \sqrt{\pi} t^{\frac{\alpha+1}{2}}} W^{n-\alpha} \left( H_\alpha \left( \frac{s}{2\sqrt{t}} \right) e^{\frac{-s^2}{4t}} \right) (s) = \frac{1}{2^n \sqrt{\pi} t^{\frac{n+1}{2}}} H_n \left( \frac{s}{2\sqrt{t}} \right) e^{\frac{-s^2}{4t}},$$

es inmediato que  $\tilde{T}(t) = T(t)$  y por holomorfía  $\tilde{T}(z) = T(z)$  con  $z \in \Sigma(\pi/2)$ . Así,  $(T(z))_{\Re z > 0}$  es un semigrupo holomorfo.

Si  $\|C_\alpha(t)\| \leq Mt^\alpha$  entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} \|T(z)x\| &\leq \frac{1}{2^\alpha \sqrt{\pi} |z|^{\frac{\alpha+1}{2}}} \int_0^{+\infty} \left| H_\alpha \left( \frac{s}{2\sqrt{z}} \right) \right| e^{\frac{-s^2 \Re z}{4|z|^2}} s^\alpha ds \\ &\leq \frac{C}{|z|^{\frac{\alpha+1}{2}}} \int_0^{+\infty} \left( 1 + \frac{s^\alpha}{2^\alpha z^{\frac{\alpha}{2}}} \right) e^{\frac{-s^2 \Re z}{4|z|^2}} s^\alpha ds \\ &\leq \frac{C}{|z|^{\frac{\alpha+1}{2}}} \int_0^{+\infty} e^{\frac{-s^2 \Re z}{4|z|^2}} s^\alpha ds + \frac{C}{|z|^{\alpha+\frac{1}{2}}} \int_0^{+\infty} e^{\frac{-s^2 \Re z}{4|z|^2}} s^{2\alpha} ds \\ &\leq \frac{C}{|z|^{\frac{\alpha+1}{2}}} \left( \frac{\Re z}{4|z|^2} \right)^{\frac{-(\alpha+1)}{2}} + \frac{C}{|z|^{\alpha+\frac{1}{2}}} \left( \frac{\Re z}{4|z|^2} \right)^{\frac{-(2\alpha+1)}{2}} \leq C \left( \frac{|z|}{\Re z} \right)^{\alpha+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Notar que en este caso  $(T(z))_{\Re z > 0}$  es un  $C_0$ -semigrupo holomorfo, ver Corollary 2.7 de [Ke].  $\square$

**Notas.** La demostración del anterior teorema puede hacerse directamente sin necesidad de utilizar los resultados de V. Keyantuo. Es más, a través de este camino más largo se aprecia el papel que desempeñan las funciones de Hermite como puente entre los funciones coseno  $\alpha$ -veces integradas y los semigrupos holomorfos. Un ejemplo de este hecho se aprecia al calcular directamente la transformada de Laplace del semigrupo holomorfo. Así, tomando  $x \in D(A^n)$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  con  $\lambda > \omega^2$ , se tiene que

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \|T(t)x\| dt < +\infty;$$

y por el Teorema de Fubini, con  $\lambda > \omega^2$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt &= \frac{1}{2^\alpha \sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}} \int_0^{+\infty} H_\alpha \left( \frac{s}{2\sqrt{t}} \right) e^{\frac{-s^2}{4t}} C_\alpha(s)x ds dt \\ &= \frac{1}{2^\alpha \sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} C_\alpha(s)x \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}} H_\alpha \left( \frac{s}{2\sqrt{t}} \right) e^{\frac{-s^2}{4t}} dt ds. \end{aligned}$$

Aplicando que  $H_\alpha(z) = e^{\frac{z^2}{2}} 2^{\frac{\alpha}{2}} D_\alpha(\sqrt{2}z)$ , obtenemos

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}} H_\alpha\left(\frac{s}{\sqrt{2t}}\right) e^{\frac{-s^2}{4t}} dt = 2^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}} D_\alpha\left(\frac{s}{\sqrt{2t}}\right) e^{\frac{-s^2}{8t}} dt.$$

Por la ecuación (5), se sigue que

$$2^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}} D_\alpha\left(\frac{s}{\sqrt{2t}}\right) e^{\frac{-s^2}{8t}} dt = 2^\alpha \sqrt{\pi} \lambda^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{-s\sqrt{\lambda}}$$

y por tanto

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) x dt = (\sqrt{\lambda})^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} C_\alpha(s) x e^{-s\sqrt{\lambda}} ds = R(\lambda, A)x$$

para todo  $x \in D(A^n)$ .

En el caso  $0 < \alpha \leq 1$ , la suposición de que  $A$  sea densamente definido no es necesaria debido al hecho de que  $H_1(s) = 2s$  y se puede aplicar Fubini directamente (ver la demostración de Theorem 5.2 en [AK]).

Otra conexión entre polinomios de Hermite y semigrupos holomorfos puede ser encontrado en [TO].

### 3. UN EJEMPLO

En este último párrafo consideraremos los espacios  $X = L^p(\mathbb{R}^n)$  y  $C_0(\mathbb{R}^n)$  y el operador laplaciano  $A = \Delta_p = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$  con dominio distribucional máximo.

A priori, sabemos que  $\Delta_1$  genera en  $L^1(\mathbb{R}^n)$  un  $C_0$ -semigrupo holomorfo  $(g^z)_{\Re z > 0}$  llamado *gaussiano* o de *Weierstrass*:

$$g^z(s) = \frac{1}{(4\pi z)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-|s|^2}{4z}}$$

con  $s \in \mathbb{R}^n$  y  $\Re z > 0$ . Además  $\|g^z\|_1 = \left(\frac{|z|}{\Re z}\right)^{\frac{n}{2}}$ , ver [Si], pág. 25. Este semigrupo holomorfo actúa en  $X = L^p(\mathbb{R}^n)$  y  $C_0(\mathbb{R}^n)$  con  $1 \leq p < +\infty$  por convolución. Y así, es conocido (ver por ejemplo [dLP])

$$\|g^z\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}^n))} \leq \left(\frac{|z|}{\Re z}\right)^{n|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}|}$$

y  $\|g^z\|_{\mathcal{B}(C_0(\mathbb{R}^n))} \leq \left(\frac{|z|}{\Re z}\right)^{\frac{n}{2}}$ .

Por otro lado es conocido en la literatura matemática que  $\Delta_p$  genera en algunos casos funciones cosenos acotadas o funciones coseno  $\alpha$ -veces integradas.

Buscamos en este párrafo señalar primero las estimaciones conocidas para las funciones coseno  $\alpha$ -veces integradas generadas por  $\Delta_p$  en los espacios  $X$  ya mencionados. Aplicamos el Teorema 2.4 probado en el párrafo anterior y calculamos la norma del semigrupo holomorfo generado por  $\Delta_p$  en  $X$  y lo comparamos con el valor conocido a priori.

**3.1.**  $X = L^p(\mathbb{R}), C_0(\mathbb{R})$  con  $1 \leq p < +\infty$ .

$\Delta_p$  genera una función coseno uniformemente acotada  $(C(t))_{t>0}$  definida mediante la igualdad

$$C(t)f(x) = \frac{1}{2}(f(x+t) - f(x-t))$$

con  $x \in \mathbb{R}$  y  $f \in X$ . Por el Teorema 2.3, su generador infinitesimal  $\Delta_p = \frac{d^2}{dx^2}$  genera un semigrupo holomorfo que verifica la estimación

$$\|g^z\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \left(\frac{|z|}{\Re z}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Notar en este caso que

$$\frac{1}{2} \geq \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|$$

y se da la igualdad en el caso  $p = 1$  y en  $C_0(\mathbb{R})$ .

**3.2.**  $X = L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $1 \leq p < +\infty$ .

Por la Proposition 3.2 de [EK],  $\Delta_p$  genera una función coseno  $\alpha$ -veces integrada para  $\alpha > (n-1)\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|$ . Por tanto, el Teorema 2.4 implica que  $\Delta_p$  genera un semigrupo holomorfo para  $\alpha + \frac{1}{2}$  con  $\alpha > (n-1)\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|$ .

Es inmediato probar que

$$(n-1)\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right| + \frac{1}{2} \geq n\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|$$

y se da la igualdad si y solo si  $p = 1$ . Por tanto la estimación obtenida a través del Teorema 2.4 es siempre peor que la conocida a priori.

**3.3.**  $X = C_0(\mathbb{R}^n)$ .

De igual manera que la Proposition 3.2 de [EK], se prueba que  $\Delta_0$  genera una función coseno  $\alpha$ -veces integrada para  $\alpha > \frac{(n-1)}{2}$ . El Teorema 2.4 implica que  $\Delta_0$  genera un semigrupo holomorfo para  $\beta > \frac{n}{2}$  y por tanto la obtenida es peor que la conocida a priori.

**Nota.** El hecho de no obtener mediante el Teorema 2.4 la cota predicha intuimos que es debido a las acotaciones conocidas para las funciones coseno  $\alpha$ -veces integradas (que son obtenidas como valores fronteras de semigrupos holomorfos).

#### REFERENCIAS

- [AS] M. Abramowitz y I. A. Segun, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, Nueva York, 1968.
- [AK] W. Arendt y H. Kellermann, Integrated solutions of Volterra integrodifferential equations and applications, en *Integro-differential equations* (Proc. Conf. Trento, 1987), *Pitman Res. Notes in Math. Series* **190**, Longman Sci. Tech., Harlow (1987), 21–51.
- [Ca] L. M. B. C. Campos, On a concept of derivative of complex order with applications to special functions, *IMA J. Appl. Math.* **33** (1984),
- [Da] B. Davies, *Integral transforms and their applications*, 2.<sup>a</sup> edición, Springer-Verlag, Berlín, 1985.
- [dLP] R. deLaubenfels y S. Piskarev, The growth rate of cosine families, *Journal Math. Anal. Appl.* **196** (1995), 442–451.

- [EK] O. El-Mennaoui y V. Keyantuo, Trace theorems for holomorphic semigroups and the second order Cauchy problem, *Proc. Amer. Math. Soc.* **124** (1996), 1445–1458.
- [GaR] M. C. Gaer y L. A. Rubel, The fractional derivative and entire functions, en *Fractional calculus and its applications* (Proc. Internat. Conf., Univ. New Haven, West Haven, Conn., 1974), *Lecture Notes in Math.* **457**, Springer-Verlag, Berlín (1975), 171–206.
- [Go] J. A. Goldstein, *Semigroups of linear operators and applications*, Oxford Mathematical Monographs, Nueva York, 1985.
- [GrR] I. S. Gradshteyn y I. M. Ryzhik, *Tables of integrals, series and products*, Academic Press, Nueva York, 1980.
- [Ke] V. Keyantuo, Integrated semigroups and related partial differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **212** (1997), 135–153.
- [KV] V. Keyantuo y P. Vieten, On analytic semigroups and cosine functions, *Studia Math.* **129** (1998), 137–156.
- [LOT] J. L. Lavoie, T. J. Osler y R. Tremblay, Fractional derivatives and special functions, *SIAM Review* **18** (1976), 240–268.
- [LTO] J. L. Lavoie, R. Tremblay y T. J. Osler, Fundamental properties of fractional derivatives via Pochhammer integrals, en *Fractional calculus and its applications* (Proc. Internat. Conf., Univ. New Haven, West Haven, Conn., 1974), *Lecture Notes in Math.* **457**, Springer-Verlag, Berlín (1975), 323–356.
- [MOS] W. Magnus, F. Oberhettinger y R. P. Soni, *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*, Springer-Verlag, Berlín, 1966.
- [Mi] P. J. Miana,  $\alpha$ -times integrated semigroups and fractional derivation, *Forum Math.*, en prensa.
- [MR] K. S. Miller y B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, Wiley, Nueva York, 1993.
- [SKM] S. G. Samko, A. A. Kilbas y O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives*, Gordon and Breach, Amsterdam, 1993.
- [Si] A. M. Sinclair, *Continuous semigroups in Banach algebras*, Cambridge Univeristy Press, *Lecture Note Series* **63**, Cambridge, 1982.
- [Sr] H. M. Srivastava, The Weyl fractional integral of a general class of polynomials, *Boll. Un. Mat. Ital. B (6)* **2** (1983), 219–228.
- [TO] T. Takenaka y N. Okazawa, Wellposedness of abstract Cauchy problems for second order differential equations, *Israel J. Math.* **69** (1990), 257–288.
- [Vi] I. M. Vinogradov, *Enciclopedia de las matemáticas*, Editorial MIR, Rubiños-1860, Moscú-Madrid, 1993/94.
- [WW] E. T. Whittaker y G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1962.
- [Ya] G. Yang,  $\alpha$ -times integrated cosine function, en *Recent advances in differential equations* (Kunming, 1997), *Pitman Res. Notes in Math. Series* **386**, Addison Wesley Longman, Harlow (1998), 199–212.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA, EDIFICIO DE MATEMÁTICAS,  
 CIUDAD UNIVERSITARIA S/N, 50009 ZARAGOZA, SPAIN  
 Correo electrónico: [pjmiana@posta.unizar.es](mailto:pjmiana@posta.unizar.es)