Труды конференции «Геометрия и приложения»
13 – 16 марта 2000 г., Новосибирск

НЕКОТОРЫЕ ТЕНДЕНЦИИ В МОНАДОЛОГИИ

С. С. Кутателадзе

Аннотация.

Монадология рассматривается как арена взаимодействия современного нестандартного анализа в его булевозначном и инфинитезимальном вариантах.

Нестандартные методы анализа в известном смысле распадаются на две основные дисциплины: *инфинитезимальный анализ*, известный также как *робинсоновский нестандартный анализ*, и *булевозначный анализ*. У названных дисциплин есть общая черта: каждая осуществляет сравнительное изучение двух интерпретаций математического утверждения или конструкций в двух различных моделях теории множеств, рассматриваемых как формальное символическое выражение одной — стандартной и другой — нестандартной. По поводу соответствующих определений и деталей см. [1]–[3] и цитированную там литературу.

Иногда представляется плодотворным комбинировать теоретические и технические методы, предлагаемые булевозначной и инфинитезимальной версиями нестандартного анализа, которые радикально различны по методу и содержанию. Мыслимы по меньшей мере два пути их совместного применения. Один состоит в изучении стандартной булевозначной модели в универсуме теории внутренних множеств Нельсона (или в универсуме внешних множеств Каваи). Инфинитезимали при этом спускаются из некоторого внешнего мира. Многие приложения требуют другого подхода, состоящего в обнаружении инфинитезималей внутри булевозначных универсумов.

В этом докладе на примере монадологии кратко изложены указанные две комбинации нестандартных методов.

1. Булевозначное моделирование в нестандартном универсуме. В булевозначном анализе выделен новый важный класс математических структур, обладающих свойством цикличности, состоящем в замкнутости относительно перемешиваний. Эти объекты представляют собой спуски соответствующих образований в *(отделимом) булевозначном универсуме* $\mathbf{V}^{(B)}$ над полной булевой алгеброй B.

Развитая инфинитезимальным анализом методология, по существу, связана с созданием специального аппарата для изучения фильтров — *монадологии*.

В самом деле, пусть $\mathcal{F}$ — стандартный фильтр, ${}^{\circ}\mathcal{F}$ — его *стандартное ядро* и ${}^{a}\mathcal{F} := \mathcal{F} \setminus {}^{\circ}\mathcal{F}$ — внешнее множество *удаленных* элементов $\mathcal{F}$. Если

$$\mu(\mathcal{F}) := \bigcap {}^{\circ}\mathcal{F} = \bigcup {}^{a}\mathcal{F}$$

— *монада* $\mathcal{F}$, то $\mathcal{F} = {}^{*}\operatorname{fil}\left(\{\mu(\mathcal{F})\}\right)$, т. е. $\mathcal{F}$ — стандартизация совокупности $\operatorname{fil}\left(\mu(\mathcal{F})\right)$ всех надмножеств монады.

Понятие монады — центральное в теории внешних множеств. В этой связи развитие комбинированных методов, в частности, одновременное применение инфинитезималей и подъемов в теории K-пространств, требует адаптации понятия монады для фильтров и их изображений.

В этом параграфе изучается подход, при котором обычная монадология применяется к изображениям — спускам объектов. Альтернативный путь — применение стандартной монадологии внутри $\mathbf{V}^{(B)}$ с последующим спуском — выбран в следующем параграфе.

1.1. Напомним некоторые конструкции из теории фильтров в $\mathbf{V}^{(B)}$.

Пусть $\mathcal{G}$ — базис фильтра в X, причем $X \in \mathcal{P}(\mathbf{V}^{(B)})$. Положим

$$\mathcal{G}' := \{F \in \mathcal{P}(X{\uparrow}){\downarrow} : (\exists G \in \mathcal{G})\, [\![\, F \supset G{\uparrow} \,]\!] = \mathbf{1}\};$$

$$\mathcal{G}'' := \{G{\uparrow} : G \in \mathcal{G}\}.$$

Тогда $\mathcal{G}'{\uparrow}$ и $\mathcal{G}''{\uparrow}$ — базисы одного и того же фильтра $\mathcal{G}^{\uparrow}$ в $X{\uparrow}$ внутри $\mathbf{V}^{(B)}$. Фильтр $\mathcal{G}^{\uparrow}$ называют *подъемом* $\mathcal{G}$.

Если $\operatorname{mix}(\mathcal{G})$ — совокупность перемешиваний непустых семейств элементов $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}$ состоит из циклических множеств, то $\operatorname{mix}(\mathcal{G})$ — базис фильтра в X и $\mathcal{G}^{\uparrow} = \operatorname{mix}(\mathcal{G})^{\uparrow}$. Если $\mathcal{F}$ — некоторый фильтр в X внутри $\mathbf{V}^{(B)}$, то полагают $\mathcal{F}^{\downarrow} := \operatorname{fil}\left(\{F{\downarrow} : F \in \mathcal{F}{\downarrow}\}\right)$. Фильтр $\mathcal{F}^{\downarrow}$ в $X{\downarrow}$ называют *спуском* $\mathcal{F}$.

Базис фильтра $\mathcal{G}$ в $X{\downarrow}$ называют *экстенсиональным*, если имеется фильтр $\mathcal{F}$ в X такой, что $\operatorname{fil}\,(\mathcal{G}) = \mathcal{F}$. Наконец, спуски ультрафильтров в X называют *проультрафильтрами* в $X{\downarrow}$.

Фильтр, имеющий базис из циклических множеств, называется *циклическим.* Проультрафильтры — это максимальные циклические фильтры.

1.2. Фиксируем стандартную полную булеву алгебру B и соответствующий булевозначный универсум $\mathbf{V}^{(B)}$, мыслимый как состоящий из внутренних множеств.

Если A — внешнее множество, то *циклическую оболочку* $\operatorname{mix}(A)$ вводят следующим образом. Говорят, что элемент $x \in \mathbf{V}^{(B)}$ лежит в $\operatorname{mix}(A)$, если для некоторого внутреннего семейства $(a_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов A и внутреннего разбиения $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ единицы в B точка x есть перемешивание $(a_\xi)_{\xi\in\Xi}$ с вероятностями $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$, т. е. $b_\xi x = b_\xi a_\xi$ при $\xi \in \Xi$, или, что то же самое, $x = \operatorname{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi a_\xi)$.

1.3. Теорема. *Для фильтра $\mathcal{F}$ в $X{\downarrow}$ рассмотрим*

$$\mathcal{F}{\uparrow}{\downarrow} := \operatorname{fil}\,(\{F{\uparrow}{\downarrow} : F \in \mathcal{F}\}).$$

Тогда $\operatorname{mix}(\mu(\mathcal{F})) = \mu(\mathcal{F}{\uparrow}{\downarrow})$ и при этом $\mathcal{F}{\uparrow}{\downarrow}$ представляет собой наибольший циклический фильтр, более грубый, чем $\mathcal{F}$.

В связи с этой теоремой монаду $\mathcal{F}$ называют *циклической*, если $\mu(\mathcal{F}) = \operatorname{mix}(\mu(\mathcal{F}))$. Цикличность монады не характеризует полностью экстенсиональность фильтров.

В этой связи следует ввести *циклически монадную оболочку* $\mu_c(U)$ внешнего множества U. Именно

$$x \in \mu_c(U) \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}}\, V = V{\uparrow}{\downarrow})V \supset U \rightarrow x \in \mu(V).$$

В частности, если $B = \{0, 1\}$, то $\mu_c(U)$ совпадает с монадой стандартизации внешнего фильтра надмножеств U — с (*дискретной*) *монадной оболочкой* $\mu_d(U)$.

1.4. *Циклически монадная оболочка множества представляет собой циклическую оболочку его монадной оболочки:*

$$\mu_c(U) = \operatorname{mix}(\mu_d(U)).$$

Особую роль играют *существенные точки* $X{\downarrow}$, составляющие внешнее множество ${}^eX$. По определению в ${}^eX$ попадают элементы монад проультрафильтров в $X{\downarrow}$.

1.5. Критерий существенности. *Точка является существенной в том и только в том случае, если ее можно отделить стандартным* *циклическим множеством от любого не содержащего ее стандартного циклического множества.*

Если в монаде ультрафильтра $\mathcal{F}$ есть существенная точка, то $\mu(\mathcal{F}) \subset {}^{e}X$ и, кроме того, $\mathcal{F}{\uparrow}{\downarrow}$ — проультрафильтр.

На основе приведенных конструкций можно вывести следующие утверждения.

1.6. Критерий экстенсиональности фильтра. *Фильтр является экстенсиональным в том и только в том случае, если его монада представляет собой циклически монадную оболочку множества своих существенных точек.*

1.7. *Стандартное множество циклично в том и только в том случае, если оно является циклически монадной оболочкой своих существенных точек.*

1.8. Нестандартный критерий перемешивания фильтров. *Пусть заданы стандартное семейство экстенсиональных фильтров $(\mathcal{F}_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и стандартное разбиение единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Фильтр $\mathcal{F}$ является перемешиванием $(\mathcal{F}_\xi)_{\xi\in\Xi}$ с вероятностями $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в том и только в том случае, если*

$$(\forall^{\mathrm{St}}\ \xi \in \Xi) b_\xi \mu(\mathcal{F}) = b_\xi \mu(\mathcal{F}_\xi).$$

Особенность предлагаемого подхода проявляется в приложениях к спускам топологических пространств через специальную роль существенных точек. В этой связи отметим некоторые их свойства.

1.9. *Справедливы следующие утверждения:*

(**1**) *Образ существенной точки при произвольном экстенсиональном отображении — существенная точка в образе.*

(**2**) *Пусть E — некоторое стандартное множество и X — стандартный элемент $\mathbf{V}^{(B)}$. Рассмотрим произведение $X^{E^\wedge}$ внутри $\mathbf{V}^{(B)}$, где $E^\wedge$ — стандартное имя E в $\mathbf{V}^{(B)}$. Если x — существенная точка $X^{E^\wedge}{\downarrow}$, то для всякого стандартного $e \in E$ точка $x{\downarrow}(e)$ — существенная в $X{\downarrow}$.*

(**3**) *Пусть $\mathcal{F}$ — циклический фильтр в $X{\downarrow}$ и ${}^{e}\mu(\mathcal{F}) := \mu(\mathcal{F}) \cap {}^{e}X$ — множество существенных точек его монады. Тогда ${}^{e}\mu(\mathcal{F}) = {}^{e}\mu(\mathcal{F}^{\uparrow\downarrow})$.*

Пусть $(X,\mathcal{U})$ — равномерное пространство внутри $\mathbf{V}^{(B)}$. Равномерное пространство $(X{\downarrow},\mathcal{U}^{\downarrow})$ называют *прокомпактным* или *циклически* *компактным*, если $(X,\mathcal{U})$ компактно внутри $\mathbf{V}^{(B)}$. Аналогичный смысл вкладывают в термин *прополная ограниченность* и т. п.

1.10. Нестандартный критерий прокомпактности. *Любая существенная точка $X{\downarrow}$ околостандартна, т. е. бесконечно близка к некоторой стандартной, в том и только в том случае, если множество $X{\downarrow}$ прокомпактно.*

Приведенная теорема 1.10 ясно демонстрирует отличия булевозначного критерия прокомпактности от привычного: «компактное пространство — это пространство с околостандартными точками». Колоссальное количество прокомпактных и некомпактных пространств обеспечивает разнообразие примеров несущественных точек. Отметим здесь же, что совместное применение 1.10 и 1.9 (2) позволяет, конечно же, дать нестандартное доказательство естественного аналога теоремы Тихонова для произведения прокомпактных пространств — «спуска теоремы Тихонова в $\mathbf{V}^{(B)}$».

1.11. Нестандартный критерий пропредкомпактности. *Стандартное пространство является спуском некоторого вполне ограниченного равномерного пространства в том и только в том случае, если каждая его существенная точка предоколостандартна. т. е. лежит в монаде некоторого фильтра Коши.*

Применим изложенный подход для описания o-сходимости в произвольном K-пространстве Y. Для экономии слов мы ограничимся рассмотрением фильтров, содержащих порядковые интервалы (или, что то же самое, фильтров с *ограниченными монадами*). Помимо этого, в соответствии с названной целью K-пространство Y считается *расширенным.*

На основании теоремы Гордона пространство Y можно считать канонически реализованным как спуск $\mathcal{R}{\downarrow}$ элемента $\mathcal{R}$, представляющего поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ в булевозначном универсуме $\mathbf{V}^{(B)}$, построенном над базой B пространства Y.

Условимся символом $\mathcal{E}$ обозначать фильтр порядковых единиц в Y, т. е. $\mathcal{E} := \{\varepsilon \in Y_+ : [\![\varepsilon = 0]\!] = \mathbf{0}\}$. Запись $x \approx y$ выражает бесконечную близость элементов $x, y \in Y$, порожденную спуском обычной топологии $\mathcal{R}$ в $\mathbf{V}^{(B)}$, т. е. $x \approx y \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}}\ \varepsilon \in \mathcal{E})\, |x - y| < \varepsilon$.

Здесь и в дальнейшем считается, что $a < b$ для $a, b \in Y$, если $[\![a < b]\!] = \mathbf{1}$, т. е. $a > b \leftrightarrow a - b \in \mathcal{E}$. Таким образом, тут имеется отступление от соглашений теории упорядоченных векторных пространств. Разумеется, это обстоятельство вызвано необходимостью соблюдать принципы введения обозначений при спусках и подъемах.

Пусть ${}^{\approx}Y$ — *околостандартная часть* Y. Для $y \in {}^{\approx}Y$ символом ${}^{\circ}y$ (или st (y)) указана *стандартная часть* y, т. е. единственный стандартный элемент, бесконечно близкий к y.

1.12. Теорема. *Для стандартного фильтра $\mathcal{F}$ в Y и стандартного $z \in Y$ справедливы утверждения:*

(**1**) $\inf_{F\in\mathcal{F}} \sup F \le z \leftrightarrow (\forall y \in {}^{\cdot}\mu(\mathcal{F}\uparrow\downarrow))\, {}^{\circ}y{\le}z \leftrightarrow (\forall y \in {}^{e}\mu(\mathcal{F}\uparrow\downarrow))\, {}^{\circ}y{\le}z;$

(**2**) $\sup_{F\in\mathcal{F}} \inf F{\ge}z \leftrightarrow (\forall y \in {}^{\cdot}\mu(\mathcal{F}\uparrow\downarrow))\, {}^{\circ}y{\ge}z \leftrightarrow (\forall y \in {}^{e}\mu(\mathcal{F}\uparrow\downarrow))\, {}^{\circ}y{\ge}z;$

(**3**) $\inf_{F\in\mathcal{F}} \sup F{\ge}z \leftrightarrow (\exists y \in {}^{\cdot}\mu(\mathcal{F}\uparrow\downarrow))\, {}^{\circ}y{\ge}z \leftrightarrow (\exists y \in {}^{e}\mu(\mathcal{F}\uparrow\downarrow))\, {}^{\circ}y{\ge}z;$

(**4**) $\sup_{F\in\mathcal{F}} \inf F{\le}z \leftrightarrow (\exists y \in {}^{\cdot}\mu(\mathcal{F}\uparrow\downarrow))\, {}^{\circ}y{\le}z \leftrightarrow (\exists y \in {}^{e}\mu(\mathcal{F}\uparrow\downarrow)){}^{\circ}y{\le}z;$

(**5**) $\mathcal{F} \overset{(o)}{\to} z \leftrightarrow (\forall y \in {}^{e}\mu(\mathcal{F}\uparrow\downarrow))y \approx z \leftrightarrow (\forall y \in \mu(\mathcal{F}^{\uparrow\downarrow}))y \approx z.$

Здесь ${}^{\cdot}\mu(\mathcal{F}\uparrow\downarrow) := \mu(\mathcal{F}\uparrow\downarrow) \cap {}^{\approx}Y$ *и, как обычно,* ${}^{e}\mu(\mathcal{F}\uparrow\downarrow)$ *— множество существенных точек монады* $\mu(\mathcal{F}\uparrow\downarrow)$*, т. е.* ${}^{e}\mu(\mathcal{F}\uparrow\downarrow) = \mu(\mathcal{F}\uparrow\downarrow) \cap {}^{e}\mathcal{R}$.

Доказательство. Для иллюстрации установим (3).

Пусть сначала в более широком множестве ${}^{\cdot}\mu(\mathcal{F}\uparrow\downarrow)$ есть элемент y, для которого ${}^{\circ}y \ge z$.

При всяком стандартном $F \in \mathcal{F}$ выполнено $y \in F\uparrow\downarrow$. Значит, для $\varepsilon \in {}^{\circ}\mathcal{E}$ будет $y > z - \varepsilon$ и $\sup F = \sup F\uparrow\downarrow > z - \varepsilon$.

По принципу Лейбница заключаем $(\forall^{\mathrm{st}}\ F \in \mathcal{F})\,(\forall^{\mathrm{st}}\ \varepsilon > 0)\, \sup F \ge z$, т. е. $(\forall F \in \mathcal{F})\, \sup F \ge z$ и $\inf_{F\in\mathcal{F}} \sup F \ge z$.

Для доказательства еще не проверенных соотношений, прежде всего заметим, что в силу свойств верхнего предела в $\mathbb{R}$ и принципа переноса булевозначного анализа выполнено

$$[\![\,(\exists\mathcal{G})\,(\mathcal{G}\ \text{— ультрафильтр в } \mathcal{R} \wedge \mathcal{G} \supset \mathcal{F}^{\uparrow} \wedge \inf_{G\in\mathcal{G}} \sup G \ge z)\,]\!] = \mathbf{1}.$$

На основании принципа максимума имеется проультрафильтр $\mathcal{G}$ такой, что $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}^{\uparrow\downarrow}$ и $\inf_{G\in\mathcal{G}} \sup G \ge z$. Используя принципы переноса и идеализации, последовательно получаем

$$(\forall^{\mathrm{st}}\ G \in \mathcal{G})\ \sup G \ge z\ \leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}}\ G \in \mathcal{G})\,[\![\,\sup(G\uparrow) = z\,]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\ (\forall^{\mathrm{st}}\ G \in \mathcal{G})\,[\![\,(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists g \in G\uparrow)\ g > z - \varepsilon\,]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall^{\mathrm{st}}\ G \in \mathcal{G})\,(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists g \in G\uparrow\downarrow)g > z - \varepsilon \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\ (\forall^{\mathrm{st}}\ G \in \mathcal{G})\,(\forall^{\mathrm{st}}\ \varepsilon > 0)\,(\exists g \in G\uparrow\downarrow)g > z - \varepsilon \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\ (\forall^{\mathrm{st\ fin}}\mathcal{G}_0 \supset \mathcal{G})\,(\forall^{\mathrm{st\ fin}}\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E})\,(\exists g)$$

$$(\forall G \in \mathcal{G}_0)\,(\forall\varepsilon \in \mathcal{E}_0)\,(g \in G\uparrow\downarrow \wedge g > z - \varepsilon) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\ (\exists g)\,(\forall^{\mathrm{st}}\ G \in \mathcal{G})\,(\forall^{\mathrm{st}}\ \varepsilon > 0)\,(g \in G\uparrow\downarrow \wedge g > z - \varepsilon) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\ (\exists g \in \mu(\mathcal{G}^{\uparrow\downarrow}))\,{}^{\circ}g \geq z\ \leftrightarrow\ (\exists g \in \mu(\mathcal{G}))^{\circ} g = z.$$

Остается отметить, что

$$\mu(\mathcal{G}) \subset {}^{e}\mu(\mathcal{F}^{\uparrow\downarrow}) = {}^{e}\mu(\mathcal{F}{\uparrow}{\downarrow}) \subset {}^{\circ}\mu(\mathcal{F}{\uparrow}{\downarrow}).$$

Доказательство закончено.

2. Инфинитезимальное моделирование внутри булевозначного универсума.

В этом параграфе мы считаем фиксированной некоторую полную булеву алгебру B и соответствующий отделимый универсум $\mathbf{V}^{(B)}$ над B.

Применяя средства инфинитезимального анализа, мы имеем в виду классический подход А. Робинсона, реализованный внутри $\mathbf{V}^{(B)}$. Иными словами, в конкретных ситуациях подразумеваются классический и внутренний универсумы и соответствующее $*$-изображение — робинсоновская стандартизация, представленные элементами $\mathbf{V}^{(B)}$. При этом мы считаем нестандартный мир должным образом насыщенным.

2.1. Под *спуск-стандартизацией* по определению понимается спуск $*$-изображения.

Наряду с термином «спуск-стандартизация» используются также выражения: «B-стандартизация», «простандартизация» и т. п. При этом для робинсоновской стандартизации B-множества A применяется символ ${}^*A$. Соответственно *спуск-стандартизация множества A*, наделенного B-структурой (т. е. подмножества $\mathbf{V}^{(B)}$), по определению представленная $({}^*(A{\uparrow})){\downarrow}$, обозначается символом ${}_*A$ (здесь подразумевается, что $A{\uparrow}$ — это элемент рассматриваемого в $\mathbf{V}^{(B)}$ стандартного мира классических множеств). Таким образом, ${}^*a \in {}_*A \leftrightarrow a \in A\uparrow\downarrow$.

Естественным путем определена и *спуск-стандартизация ${}_*\Phi$ экстенсионального соответствия* Φ.

При необходимости рассматривать спуск-стандартизации стандартных имен элементов универсума фон Неймана $\mathbf{V}$ мы для удобства используем сокращения, полагая ${}^*x := {}^*(x^{\wedge})$ и соответственно ${}_*x := ({}^*x){\downarrow}$ для $x \in \mathbf{V}$. Правила расстановки и опускания (по умолчанию) звездочек при использовании спуск-стандартизации без особых оговорок считаются столь же свободными, как и применяемые для робинсоновского $*$-изображения.

2.2. Принцип переноса. *Пусть $\varphi = \varphi(x, y)$ — формула теории Цермело — Френкеля (не содержащая никаких свободных переменных, кроме*

x и y). Для непустого в $\mathbf{V}^{(B)}$ элемента F и каждого z выполнено

$$(\exists x \in {}_*F)\, [\![\, \varphi(x, {}^*z)\,]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow (\exists x \in F{\downarrow})\, [\![\, \varphi(x, z)\,]\!] = \mathbf{1};$$

$$(\forall x \in {}_*F)\, [\![\, \varphi(x, {}^*z)\,]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow (\forall x \in F{\downarrow})\, [\![\, \varphi(x, z)\,]\!] = \mathbf{1}.$$

Если G — некоторое подмножество $\mathbf{V}^{(B)}$, то справедливы эквивалентности

$$(\exists x \in {}_*G)[\![\, \varphi(x, {}^*z)\,]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow (\exists x \in G{\uparrow}{\downarrow})\, [\![\, \varphi(x, z)\,]\!] = \mathbf{1};$$

$$(\forall x \in {}_*G)[\![\, \varphi(x, {}^*z)\,]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow (\forall x \in G{\uparrow}{\downarrow})\, [\![\, \varphi(x, z)\,]\!] = \mathbf{1}.$$

2.3. Принцип идеализации. *Пусть $X{\uparrow}$ и Y — (классические) элементы $\mathbf{V}^{(B)}$ и $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — формула теории Цермело — Френкеля. Для внутреннего в $\mathbf{V}^{(B)}$ элемента z выполнено:*

$$(\forall^{\mathrm{fin}} A \subset X)\, (\exists y \in {}_*Y)\, (\forall x \in A)\, [\![\, \varphi({}^*x, y, z)\,]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists y \in {}_*Y)\, (\forall x \in X)\, [\![\, \varphi({}^*x, y, z)\,]\!] = \mathbf{1}.$$

Для фильтра $\mathcal{F}$ из множества с B-структурой его *спуск-монаду* $m(\mathcal{F})$ определяют соотношением

$$m(\mathcal{F}) := \bigcap_{F \in \mathcal{F}} {}_*F.$$

2.4. Теорема. *Пусть $\mathcal{S}$ — некоторое множество фильтров и $\mathcal{S}^{\uparrow} := \{\mathcal{F}^{\uparrow} : \mathcal{F} \in \mathcal{S}\}$ — его подъем в $\mathbf{V}^{(B)}$. Эквивалентны утверждения:*

(**1**) *множество циклических оболочек элементов $\mathcal{S}$, т. е. $\mathcal{S}{\uparrow}{\downarrow} := \{\mathcal{F}{\uparrow}{\downarrow} : \mathcal{F} \in \mathcal{S}\}$, ограничено сверху;*

(**2**) *множество $\mathcal{S}^{\uparrow}$ ограничено сверху внутри $\mathbf{V}^{(B)}$;*

(**3**) $\bigcap\{m(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \in \mathcal{S}\} \neq \varnothing$.

$\cap\{m(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \in \mathcal{E}\} \neq \varnothing$.

При выполнении эквивалентных условий (1)–(3) *справедливы равенства*

$$m(\sup \mathcal{S}{\uparrow}{\downarrow}) = \bigcap\{m(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \in \mathcal{S}\};$$

$$\sup \mathcal{S}^{\uparrow} = (\sup \mathcal{S})^{\uparrow}.$$

Полезно подчеркнуть, что для бесконечного множества спуск-монад их объединение и даже циклическая оболочка этого объединения спуск-монадой, вообще говоря, не являются. Ситуация здесь повторяет общеизвестную для обычных монад.

2.5. Нестандартные критерии проультрафильтра. *Эквивалентны следующие утверждения:*

Nonstandard criteria for a proultrafilter The following are equivalent:

(**1**) $\mathcal{U}$ *— это проультрафильтр;*

(**2**) $\mathcal{U}$ *— это экстенсиональный фильтр с минимальной по включению спуск-монадой;*

(**3**) *для каждой точки* x *из спуск-монады* $m(\mathcal{U})$ *имеет место представление* $\mathcal{U} = (x)^{\downarrow} := \mathrm{fil}\ (\{U{\uparrow}{\downarrow} : x \in {}_*A\})$;

(**4**) $\mathcal{U}$ *— это экстенсиональный фильтр, спуск-монаду которого легко поймать любым циклическим множеством, т. е. для всякого* $U = U{\uparrow}{\downarrow}$ *верно либо* $m(\mathcal{U}) \subset {}_*U$, *либо* $m(\mathcal{U}) \subset {}_*(X \setminus U)$;

(**5**) $\mathcal{U}$ *— это циклический фильтр такой, что для всякого циклического* U *при* ${}_*U \cap m(\mathcal{A}) \neq \varnothing$ *будет* $U \in \mathcal{U}$.

2.6. Нестандартный критерий перемешивания фильтров. *Допустим, что* $(\mathcal{F}_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *— семейство фильтров,* $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *— разбиение единицы и* $\mathcal{F} = \mathrm{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi \mathcal{F}_\xi^{\uparrow})$ *— перемешивание элементов* $\mathcal{F}_\xi^{\uparrow}$ *с вероятностями* b_ξ. *Тогда*

$$m(\mathcal{F}^{\downarrow}) = \underset{\xi\in\Xi}{\mathrm{mix}}(b_\xi m(\mathcal{F}_\xi)).$$

Полезно сопоставить 2.6 с 1.8.

Точку y из множества ${}_*X$ называют *спуск-околостандартной* или просто *околостандартной*, если нет опасности недоразумений, при условии, что для некоторого $x \in X{\downarrow}$ будет ${}^*x \approx y$ (т. е. $(x, y) \in m(\mathcal{U}^{\downarrow})$, где $\mathcal{U}$ — равномерность на X).

2.7. Нестандартный критерий прокомпактности. *Любая точка спуска* ${}_*A$ *спуск-околостандартна в том и только в том случае, если само множество* $A{\uparrow}{\downarrow}$ *прокомпактно.*

Стоит сравнить 2.7 с 1.10.

Сформулируем теперь общие принципы использования спуск-стандартизации.

2.8. *Заметим сначала, что если* $\varphi = \varphi(x)$ *— формула теории Цермело — Френкеля, то оценка истинности* φ *постоянна на спуск-монаде* *любого проультрафильтра $\mathcal{A}$, т. е.*

$$(\forall x, y \in m(\mathcal{A}))\, [\![\, \varphi(x)\,]\!] = [\![\, \varphi(y)\,]\!].$$

2.9. Теорема. *Пусть $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — некоторая формула теории Цермело — Френкеля и $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ — фильтры множеств с B-структурой. Имеют место следующие правила квантификации (при внутренних y, z в универсуме $\mathbf{V}^{(B)}$):*

(**1**) $(\exists x \in m(\mathcal{F}))\, [\![\, \varphi(x,y,z)\,]\!]{=}\mathbf{1} \leftrightarrow (\forall F{\in}\mathcal{F})\, (\exists x \in {}^*F)\, [\![\, \varphi(x,y,z)\,]\!]{=}\mathbf{1}$;

(**2**) $(\forall x \in m(\mathcal{F}))\, [\![\, \varphi(x,y,z)\,]\!]{=}\mathbf{1} \leftrightarrow (\exists F \in \mathcal{F}^{\uparrow\downarrow})(\forall x{\in}_*F)\, [\![\, \varphi(x,y,z)\,]\!]{=}\mathbf{1}$;

(**3**) $(\forall x \in m(\mathcal{F}))\, (\exists y \in m(\mathcal{G}))[\![\, \varphi(x,y,z)\,]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow (\forall G \in \mathcal{G})\, (\exists F \in \mathcal{F}^{\uparrow\downarrow})$
$(\forall x \in {}^*F)\, (\exists y \in {}^*G)\, [\![\, \varphi(x,y,z)\,]\!] = \mathbf{1}$;

(**4**) $(\exists x \in m(\mathcal{F}))\, (\forall y \in m(\mathcal{G}))\, [\![\, \varphi(x,y,z)\,]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow (\exists G \in \mathcal{G}^{\uparrow\downarrow})\, (\forall F \in \mathcal{F})$
$(\exists x \in {}^*F)\, (\forall y \in {}^*G)\, [\![\, \varphi(x,y,z)\,]\!] = \mathbf{1}$.

При этом для стандартизированных свободных переменных будет

(**1′**) $(\exists x \in m(\mathcal{F}))[\![\, \varphi(x, {}^*y, {}^*z)\,]\!]{=}\mathbf{1} \leftrightarrow (\forall F \in \mathcal{F})(\exists x \in F{\uparrow\downarrow})[\![\, \varphi(x,y,z)\,]\!]{=}\mathbf{1}$;

(**2′**) $(\forall x \in m(\mathcal{F}))[\![\, \varphi(x, {}^*y, {}^*z)\,]\!]{=}\mathbf{1} \leftrightarrow (\exists F \in \mathcal{F}^{\uparrow\downarrow})(\forall x \in F)[\![\, \varphi(x,y,z)\,]\!]{=}\mathbf{1}$;

(**3′**) $(\forall x \in m(\mathcal{F}))(\exists y \in m(\mathcal{G}))[\![\, \varphi(x,y,{}^*z)\,]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow (\forall G \in \mathcal{G})(\exists F \in \mathcal{F}^{\uparrow\downarrow})$
$(\forall x \in F)(\exists y \in G{\uparrow\downarrow})[\![\, \varphi(x,y,z)\,]\!] = \mathbf{1}$;

(**4′**) $(\exists x \in m(\mathcal{F}))(\forall y \in m(\mathcal{G}))[\![\, \varphi(x,y,{}^*z)\,]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow (\exists G \in \mathcal{G}^{\uparrow\downarrow})(\forall F \in \mathcal{F})$
$(\exists x \in F{\uparrow\downarrow})(\forall y \in G)[\![\, \varphi(x,y,z)\,]\!] = \mathbf{1}$.

В порядке иллюстрации,приведем формулу для вычисления *осколков* положительного линейного оператора. Напомним, что положительный элемент y называется *осколком* положительного элемента x, где x и y принадлежат некоторой векторной решетке, при условии, что y *дизъюнктен* $x - y$, т. е. $y \wedge (x - y) = 0$. Есть много причин для описания осколков, что сравнительно легко для функционалов но представляет собой интригующую проблемы в случае операторов (см. [4]).

Пусть Y — некоторое K-пространство с базой B и ${}_*Y$ — некоторая B-стандартизация Y. Пусть далее X— векторная решетка и S, T, R — три положительных оператора: $S, T, R \in L_+(X, Y)$.

Будем считать, что R — это проекция S на главную компоненту в $L_*(X, Y)$, порожденную T. Символами $\approx$ и $^\circ$ обозначим, как обычно, бесконечную близость и стандартную часть в ${}_*Y$.

Осуществляя инфинитезимальную интерпретацию очевидной формулы для осколков положительного функционала, мы приходим к искомому представлению осколков положительного оператора.

2.10. Теорема. *Имеет место следующая формула, в которой инфимум достигается:*

$$Rx = \inf \left\{ \pi\,{}^\circ Sy + \pi^d Sx \mid \pi T(x-y) \approx 0, \quad 0 \le y \le x \right\},$$

где π *— это элемент базы* Y*, проектор* π^d *дополнителен к* π*, а* x *— элемент* X*.*

Как обычно, опущены символы робинсоновской B-стандартизации там, где это не должно вызывать неудобств.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кусраев А. Г. и Кутателадзе С. С. *Нестандартные методы анализа.* Новосибирск: Наука, 1990. Zbl 0718.03046

[2] Кусраев А. Г. и Кутателадзе С. С. *Булевозначный анализ.* Новосибирск: Изд.-во Института математики, 1999. Zbl 0955.46046

[3] Гутман А. Е. и др., *Нестандартный анализ и векторные решетки.* Новосибирск: Изд.-во Института математики, 1999. Zbl pre01433923

[4] Бухвалов А. В. и др. *Векторные решетки и интегральные операторы.* Новосибирск: Наука, 1992. Zbl 0752.46001

Институт математики им. С. Л. Соболева, г. Новосибирск
e-mail: sskut@member.ams.org