Труды конференции «Геометрия и приложения»
13 – 16 марта 2000 г., Новосибирск

СЛОЖНОСТЬ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ: ПРОБЛЕМЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

С. В. Матвеев [1]

1. Определение и свойства сложности.

Сложность трехмерных многообразий представляет собой функцию, которая определена на множестве всех компактных трехмерных многообразий и принимает значения в множестве неотрицательных целых чисел, см. [1, 2]. Ее полезность заключается в том, что она обладает рядом естественных свойств и ее значение на каждом конкретном многообразии довольно правильно показывает, насколько сложно устроено это многообразие в неформальном смысле. Идея вычисления сложности $c(M)$ многообразия M состоит в его замене на двумерный полиэдр с максимально простыми локальными особенностями и в подсчете числа этих особенностей.

Определение 1. *Подполиэдр P компактного трехмерного многообразия M называется его спайном, если либо $\partial M \neq \emptyset$ и многообразие $M \setminus P$ гомеоморфно $\partial M \times (0,1]$, либо $\partial M = \emptyset$ и многообразие $M \setminus P$ гомеоморфно открытому 3-шару.*

Обозначим через $\Delta^{(1)}$ граф с 4 вершинами, каждые две из которых соединены ровно одном ребром. Топологически он представляет собой полиэдр, гомеоморфный одномерному остову тетраэдра.

Определение 2. *Компактный полиэдр P называется* почти простым*, если линк каждой его точки вкладывается в $\Delta^{(1)}$. Точки, линки которых гомеоморфны $\Delta^{(1)}$, называются* истинными вершинами *полиэдра P.*

Несколько типичных особенностей почти простого полиэдра изображены рис. 1. Кроме типично двумерных особенностей (первые три типа) возможны и одномерные части, а также точки сочленения двумерных и одномерных частей (четвертый тип). Нетрудно доказать, что любое компактное трехмерное многообразие M имеет *почти простой спайн*, т. е. спайн, являющийся почти простым полиэдром. Например, можно рассмотреть любую триангуляцию многообразия M и взять двумерный остов двойственного разбиения на клетки. Если M замкнуто, то получившийся спайн будет иметь особенности только первых трех типов. Такие спайны называются *простыми*.

Определение 3. *Простой спайн называется* специальным*, если он имеет хотя бы одну истинную вершину и все его 2-компоненты (связ-*

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант N 99-01-00813, INTAS, проект 97-808, и программы "Университеты России", грант 99-2472.

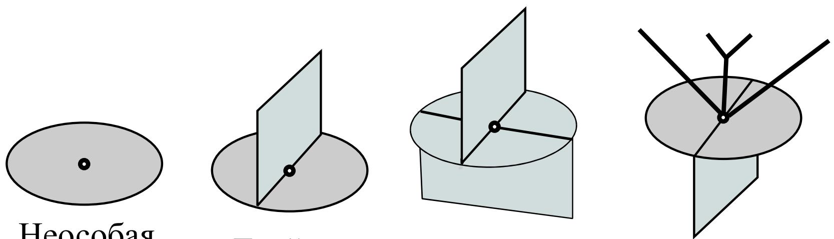

Рис. 1: Особенности почти простого полиэдра

ные компоненты множества неособых точек) являются открытыми 2-клетками.

Определение 4. Сложность $c(M)$ *компактного трехмерного многообразия M равна k, если оно имеет почти простой спайн с k истинными вершинами и не имеет почти простых спайнов с меньшим числом истинных вершин.*

Например, сложность трехмерной сферы равна 0, поскольку в качестве ее почти простого спайна можно взять точку (которая, конечно, не является истинной вершиной). Тот же ответ получается для проективного пространства RP^3 и линзового пространства $L_{3,1}$, поскольку их естественные почти специальные спайны представляют собой соответственно проективную плоскость RP^2 и факторпространство диска D^2 по стандартному действию поворотами группы Z_3 на его крае. Оказывается, что это – единственные замкнутые неприводимые многообразия сложности 0.

Сложность $c(M)$ обладает рядом полезных свойств.

1. Сложность аддитивна по отношению к связной сумме и краевой связной сумме многообразий: $c(M_1 \# M_2) = c(M_1) + c(M_2)$ и $c(M_1 \perp\!\!\!\perp M_2) = c(M_1) + c(M_2)$, см. [1, 2].

2. Для любого числа k существует только конечное множество трехмерных многообразий сложности $\leq k$, которые являются неприводимыми и не содержат существенных колец, см. [3].

3. Все замкнутые ориентируемые трехмерные многообразия сложности ≤ 8 являются граф-многообразиями Вальдхаузена [1, 4]. На уровне сложности 9 появляются первые четыре замкнутые ориентируемые многообразия, которые обладают гиперболической структурой и поэтому граф-многообразиями не являются [1, 5].

2. Верхние оценки сложности.

Построение верхних оценок сложности данного трехмерного многообразия M не представляет труда. Действительно, для этого достаточно построить хотя бы один его почти специальный спайн. Это можно сделать многими способами.

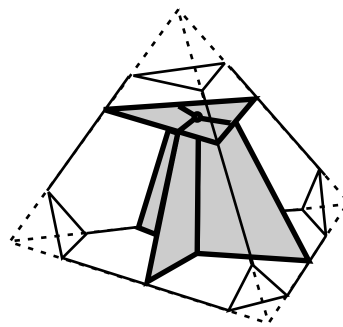

Рис. 2: Типичная окрестность истинной вершины в усеченном тетраэдре

От триангуляции к спайну. Пусть T – произвольная триангуляция замкнутого многообразия M, содержащая k тетраэдров. Тогда двумерный остов двойственного разбиения многообразия M на клетки является специальным спайном n раз пунктированного M, т. е. многообразия M с удаленными шаровыми окрестностями вершин. Число истинных вершин этого спайна равно k. Удаление 2-компонент, разделяющих различные шаровые окрестности, приводит к почти специальному спайну с $\leq k$ истинными вершинами. Та же самая конструкция проходит и для сингулярных триангуляций, появляющихся в результате склеивания многообразия M из нескольких тетраэдров по аффинным отождествлениям их граней.

В случае многообразия M с краем вместо триангуляций удобно рассматривать разбиения на усеченные тетраэдры. При этом разбиения могут быть сингулярными, т. е. мы не требуем, чтобы каждые два тетраэдры либо не пересекались, либо пересекались по их общей грани. Заменяя каждый усеченный тетраэдр на содержащийся в нем экземпляр типичной окрестности истинной вершины (см. рис. 2), мы автоматически получим специальный спайн. Интересно отметить, это построение работает и в обратном направлении: каждый специальный спайн многообразия с краем определяет его сингулярное разбиение на усеченные тетраэдры.

От диаграммы Хегора к спайну. Пусть $(F, \mu_i, \lambda_i, 1 \leq i \leq n)$ – диаграмма Хегора замкнутого трехмерного многообразия M. Здесь F - поверхность в M, разбивающая его на два полных кренделя рода n, а μ_i, λ_i – полные наборы меридианов этих кренделей. Тогда объединение поверхности F с $2n$ меридиональными дисками является простым спайном дважды пунктированного многообразия M. Число истинных вершин этого спайна равно общему числу точек пересечения меридианов. При слиянии двух шаров в один путем удаления одной из областей диаграммы число истинных вершин может только уменьшится.

Спайны пространств узлов. Пусть узел K задан своей проекцией на S^2, которая, как это принято в теории узлов, разорвана в двойных точках для указания, какой из участков диаграммы проходит выше. Приклеим длинную замкнутую полоску (туннель) к S^2 и к самой себе вдоль проекции так, как это показано на рис. 3. Мы получим специальный спайн дважды пунктированного дополнительного пространства узла. Число его

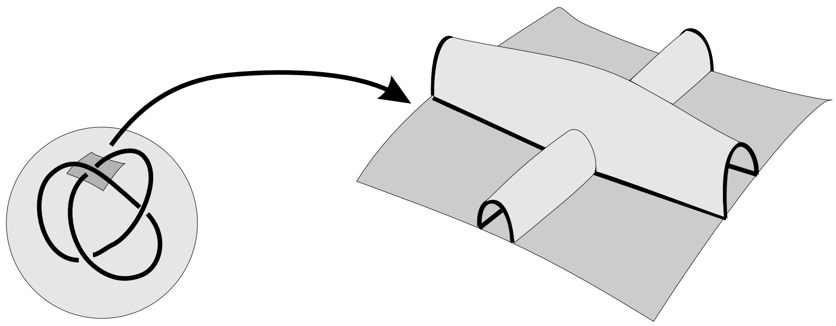

Рис. 3: Построение спайна пространства узла

истинных вершин равно $4n$, где n – число двойных точек проекции. Удалении двух 2-компонент спайна, которые отделяют шар от шара и один из шаров от внутренности туннеля, дает специальный спайн с меньшим числом вершин. Например, в случае узла восьмерки эта процедура приводит к специальному спайну с двумя вершинами, который двойствен известному представлению Торстона дополнительного пространства узла восьмерки в виде объединения двух усеченных тетраэдров. Можно отметить, что, в отличие от метода Торстона, описанный метод построения спайнов более алгоритмичен и работает для всех узлов и зацеплений.

3. Вычисление сложности.

Пока точные значения сложности известны только для табличных многообразий. Такие таблицы построены для замкнутых ориентированных многообразий до сложности 6 [6] и (без идентификации многообразий) до сложности 9 [5] путем обширных компьютерных вычислений. На основе этих вычислений получен ряд эмпирических формул (или, вернее, эмпирических способов) для вычисления сложности некоторых многообразий. Справедливость этих формул в общем случае остается открытой.

Сложность линзовых пространств. Пусть p, q - взаимно простые положительные числа. Представим число p/q в виде цепной дроби. Обозначим через $\{p/q\}$ сумму ее полных частных.

Гипотеза 1. *Если* $p \geq 3$, *то* $c(L_{p,q}) = \{p/q\} - 3$.

Эту гипотезу можно эквивалентным образом сформулировать так: если $p > 2q$, то $c(L_{p,q}) = c(L_{p-q,q}) + 1$. Отсюда получается простой эмпирический способ вычисления сложности. Например,

$c(L_{17,4}) = c(L_{13,4}) + 1 = c(L_{9,4}) + 2 = c(L_{5,4}) + 3 = c(L_{5,1}) + 3 = c(L_{4,1}) + 4 = c(L_{3,1}) + 5 = 5$

Следует отметить, что справедливость неравенства $c(L_{p,q}) \leq \{p/q\} - 3$ известна [6]. Аналогичные эмпирические способы вычисления сложности можно предложить для всех многообразий Зейферта, расслоенных над сферой с двумя особыми слоями. Существенное продвижение в вычислении сложности многообразия Столлингса M_A со слоем тор и матрицей монодромии A было достигнуто С. Анисовым [7]. С. Анисов доказал, что $c(M_A) \leq \max\{6, c(A) + 5\}$, где $c(A)$ – определенный им эффективно вычислимый целочисленный инвариант матрицы A, и предположил, что эта оценка точна.

Гипотеза 2. $c(M_A) = \max\{6, c(A) + 5\}$.

Аналогичную оценку сложности можно дать с помощью теории правильных функций Морса на специальных спайнах [8]. Было бы интересно получить аналогичные результаты для многообразий Столлингса с другими слоями, в частности, со слоем проколотый тор.

4. Нижние оценки сложности.

Задача нахождения нижних оценок сложности весьма трудна. Кроме замкнутых ориентируемых неприводимых многообразий сложности ≤ 7, которые табулированы и сложность которых поэтому известна, до недавнего времени никаких результатов в этом направлении получено не было. С другой стороны, сложность многообразия, имеющего большую первую группу гомологий, не может быть слишком мала. Это наблюдение было оформлено в виде строгой теоремы в работе [9].

Теорема 1. *Пусть $M \neq L_{3,1}$ - замкнутое ориентируемое неприводимое трехмерное многообразие. Тогда $c(M) \geq 2\log_5 |Tor(H_1(M; Z))| + \beta - 1$, где $|Tor(H_1(M; Z))|$ – порядок подгруппы кручения группы гомологий и β - первое число Бетти.*

Для некоторых многообразий (например, для линзы $L_{5,2}$) эта оценка точна. Интересно отметить, что упомянутый выше способ нахождения верхней оценки сложности линзовых пространств при $n > 2$ приводит к неравенству $c(L_{f_n, f_{n-2}}) \leq (2\log_2 5)\log_5(f_n) - 2$, где $f_i, 1 \leq i < \infty$, – последовательность чисел Фибоначчи, начинающаяся с $f_1 = f_2 = 1$. Так как $H_1(L_{f_n, f_{n-2}}; Z) = Z_{f_n}$, то в результате объединения верхних и нижних оценок получается двустороннее неравенство

$$2\log_5(f_n) - 1 \leq c(L_{f_n, f_{n-2}}) \leq (2\log_2 5)\log_5(f_n) - 2.$$

Это означает, что по крайней мере для одной бесконечной серии многообразий с конечными группами гомологий сложность логарифмически зависит от порядков этих групп.

Другую нижнюю оценку сложности можно получить через фундаментальную группу. Назовем *длиной копредставления* $< a_1, \dots, a_n | r_1, \dots r_m >$ число $|r_1| + |r_2| + \dots + |r_m|$, где через $|r_i|$ обозначена длина слова r_i в алфавите $a_1, \dots, a_n$.

Определение 5. Сложностью $c(G)$ *конечнопредставимой группы G называется минимум длин всех ее конечных копредставлений.*

Как и в случае сложности многообразий, сложность группы трудно вычислить, но легко оценить сверху. Например, сложность циклической группы Z_{40} не превосходит 13, так как ее можно задать копредставлением $< a, b, c | a^4, b^2a^{-1}, c^5b^{-1} >$. Может показаться, что неожиданная малость сложности (по сравнению с порядком группы) связана с тем, что число 40 имеет нетривиальные делители. Однако, группа Z_{47} простого порядка также может быть задана копредставлением $< a, b, c, d | a^3c, a^2dc^{-1}, cd^2b, db^4 >$ неожиданно малой длины 17.

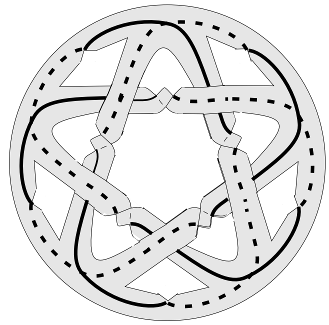

Рис. 4: Пространство додекаэдра

Теорема 2. [9] *пусть M – замкнутое ориентируемое неприводимое трехмерное многообразие. Тогда $c(M) \geq -1 + (1/3)c(\pi_1(M))$.*

Иногда эта простая теорема позволяет получить лучшую оценку, чем даваемую теоремой 1. Например, из нее следует, что сложность любой нетривиальной гомологической сферы не меньше 3. На самом деле, сложность самой простой нетривиальной гомологической сферы (пространства додекаэдра) равна 5. Окрестность особого графа ее простейшего специального спайна изображена на рис. 4.

5. Расширенная сложность.

Один из основных методов исследования трехмерных многообразий состоит в разрезании данного многообразия на более простые части вдоль несжимаемой поверхности. При таком разрезании сложность не увеличивается. Однако, для индуктивных доказательств хотелось бы иметь строгое уменьшение сложности. Это достигается путем введения более тонкого понятия расширенной сложности.

Пусть P – почти простой спайн, имеющий $c(P)$ истинных вершин, $c_1(P)$ замкнутых тройных линий и $c_2(P)$ 2-компонент. Тогда тройка

$\bar{c}(P) = (c(P), c_1(P), c_2(P))$ называется *расширенной сложностью* спайна P. Тройки расматриваются в лексикографическом порядке.

Определение 6. Расширенная сложность $\bar{c}(M)$ *компактного трехмерного многообразия M задается формулой $\bar{c}(M) = min_P \bar{c}(P)$, где минимум берется по всем его почти простым спайнам.*

Например, расширенная сложность сферы S^3 равна $(0, 0, 0)$, расширенная сложность линзы $L_{3,1}$ равна $(0, 1, 1)$, а расширенная сложность любого косого произведения связной замкнутой поверхности на отрезок равна $(0, 0, 1)$.

Теорема 3. *Пусть многообразие M_F получается из трехмерного многообразия M разрезанием по собственной связной несжимаемой поверхности F в M. Тогда*

1. *$c(M_F) \leq c(M)$;*

2. *Если M неприводимо и $\partial F \neq \emptyset$, то $\bar{c}(M_F) \leq \bar{c}(M)$;*

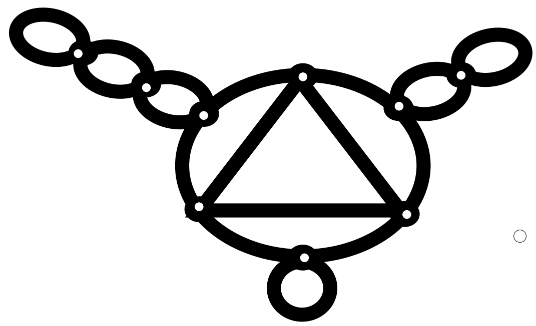

Рис. 5: Треугольник с хвостами

3. *Если к тому же M гранично неприводимо и $F \neq S^2, D^2$ гранично несжимаема, то $\bar{c}(M_F) < \bar{c}(M)$.*

Разумеется, наиболее важно последнее заключение этой теоремы.

6. Приведенная сложность.

Исследование минимальных спайнов табличных многообразий показывает, что особые графы многих из них имеют петли и *хвосты* (цепочки приклеенных друг к другу петель). Типичный пример такого графа (с одной петлей и двумя хвостами) приведен на рис. 5.

Можно показать, что если исходный спайн минимален, то он определяет многообразие Зейферта, получающееся факторизацией 3-сферы по линейному действию группы конечной группы. Наращивание петель и хвостов не меняет существа дела, поскольку изменяются только параметры особых слоев. Поэтому имеет смысл ввести понятие *приведенной сложности* многообразия, которая не учитывает длины хвостов.

Будем называть истинную вершину почти специального спайна *существенной*, если она не лежит строго внутри некоторого хвоста особого графа. Например, на рис. 5 существенны только те вершины, которые лежат на большой окружности.

Определение 7. Приведенная сложность $r(M)$ *компактного трехмерного многообразия M равна k, если оно имеет почти простой спайн с k существенными истинными вершинами и не имеет почти простых спайнов с меньшим числом таких вершин.*

Мотивировкой этого определения является следующая гипотеза, выдвинутая И. Рубинштейном и В. Джейко (в оригинальном препринте [10] она была высказана для триангуляций многообразий):

Гипотеза 3. *Пусть специальный спайн P замкнутого неприводимого трехмерного многообразия M, не содержащего несжимаемых торов, минимален в смысле приведенной сложности. Тогда любая строго неприводимая поверхность Хегора многообразия M изотопна одной из конечного алгоритмически конструируемого множества поверхностей, почти нормальных по отношению к P.*

Так как любая поверхность Хегора минимального рода строго неприводима, то из справедливости этой гипотезы следует существование алгоритма вычисления рода Хегора многообразий, не являющихся достаточно большими. Для достаточно больших многообразий существование такого алгоритма следует из [11]. Связь между минимальностью в смысле приведенной сложности и конечностью числа почти нормальных поверхностей данного рода состоит в следующем. К любой почти нормальной поверхности F можно добавить нормальный тор и получить новую поверхность того же рода. Априори, многократное применение этой операции может привести к бесконечному множеству почти нормальных поверхностей, что исключает алгоритмичность. Как заметили И. Рубинштейн и В. Джейко, добавление к F нормальных торов, отсекающих хвосты, не меняет поверхности F (это следует из того, что нормальные поверхности внутри отсекаемых частей ведут себя предсказуемым образом, см. [12]). Поэтому содержательная (пока отсутствующая) часть решения гипотезы состоит в доказательстве того, что при упомянутых условиях на спайн других нормальных торов нет.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Матвеев, С. В.: Сложность трехмерных многообразий и их перечисление в порядке возрастания сложности. Доклады Академии наук СССР. **301**(1988), N 2, 280-284. Zbl 0674.57012

[2] Matveev, S. V.: Complexity theory of 3-manifolds. Acta Appl. Math. **19**(1990), N 2, 101-130. Zbl 0724.57012

[3] Matveev, S. V.: Computer Recognition of Three Manifolds. Experimental Mathematics, **7**(1998), N 2, 153-161. Zbl 0916.57017

[4] Waldhausen, F.: Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten I, II. Invent. Math., **3** (1967), 308-333; Invent. Math., **4**(1967), 87-117. Zbl 0168.44503

[5] Martelly, B., Petronio, C.: 3-Manifolds having Complexity at Most 9. Geometry and Topology, 2001 (to appear).

[6] Matveev, S. V.: Tables of 3-manifolds up to complexity 6. Max Planck Institute preprint MPI 1998-67, 50 P.

[7] Anisov, S.: Towards lower bounds for complexity of 3-manifolds: a program. IHES Preprint M/01/13, 2001, P. 43.

[8] Первова, Е. Л.: Функции Морса на простых полиэдрах и связанный с ним способ задания специальных спайнов многообразий. Этот том. Zbl 1004.57017

[9] Матвеев, С. В., Первова, Е. Л.: Нижние оценки сложности трехмерных многообразий. Доклады Академии Наук, **378** (2001), N. 2 (в печати).

[10] Rubinstein, J. H.: Polyhedral minimal surfaces, Heegaard splittings and decision problems for 3-dimensional manifolds. Preprint 1994, 19 P.

[11] Johannson, K.: Topology and combinatorics of 3-manifolds. Springer LNM **1599**(1995), 446 P. Zbl 0820.57001

[12] Фоминых, Е. А.: Полное описание множества фундаментальных поверхностей для некоторых трехмерных многообразий. Этот том. Zbl 1004.57018

Челябинский государственный университет Челябинск, 454021
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: matveev@csu.ru