Stichworte zur Vorlesung Algebra II, Frühjahrssemester 2009

Teil D: (Nichtkommutative) Algebren

Ab jetzt sind alle Ringe unitär, aber nicht notwendigerweise kommutativ. Zur Unterscheidung nennen wir sie Algebren.

1. Grundbegriffe

- entgegengesetzte Algebra A^opp
- Links-Modul, Rechts-Modul
- Untermodul, Faktormodul, Durchschnitt, Erzeugnis, Summe, Homomorphismus, Kern, Bild ... wie im kommutativen Fall
- Links-Ideal, Rechts-Ideal, beidseitiges Ideal
- Faktorring
- Divisionsalgebra = Schiefkörper
- Beispiel: Matrizenring mit Spaltenvektoren als Standardmodul
- Beispiel: Quaternionenalgebren

2. Halbeinfache Moduln

- direkte Summe von Moduln
- einfacher Modul
- halbeinfacher Modul
- ... verschiedene äquivalente Charakterisierungen
- Zerlegung in isotypische Komponenten

3. Kommutanten

- Kommutante A' einer Algebra A auf einem Modul M
- Bikommutante A''
- natürlicher Homomorphismus k: A ---> A''
- Dichtigkeitssatz
- Kriterium für A = A''
- Lemma von Schur: Jeder nichttriviale Homomorphismus zwischen einfachen Moduln ist ein Isomorphismus ...
- ... und der Endomorphismenring jedes einfachen Moduls ist ein Schiefkörper.
- Kriterium für A = Matrizenring über einer Divisionsalgebra

4. Halbeinfache Algebren

- einfache Algebra
- halbeinfache Algebra
- Zerlegung in endlich viele (!) isotypische Komponenten
- A halbeinfach ==> jeder A-Modul ist halbeinfach
- Jede endlichdimensionale halbeinfache K-Algebra ist eine direkte Summe von Matrizenringen über endlichdimensionalen K-Divisionsalgebren.
- Jede endlichdimensionale halbeinfache Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K ist direkte Summe von Matrizenringen über K.

5. Gruppenringe

- Gruppenring K[G]
- Jede lineare Darstellung von G über K ist ein K[G]-Modul und umgekehrt
- Satz von Maschke: Jede lineare Darstellung einer endlichen Gruppe G über einem Körper, dessen Charakteristik IGI nicht teilt, ist halbeinfach. Insbesondere ist dann K[G] eine halbeinfache Algebra.
- Satz: Ist K zusätzlich algebraisch abgeschlossen, so ist K[G] eine direkte Summe von Matrizenringen über K.
- Folge: Die Ordnung von G ist die Summe der Quadrate der Dimensionen der irreduziblen Darstelllungen von G über einem solchen K, bis auf Isomorphie.