Serie 2

---

1. Berechnen Sie mittels Partialbruchzerlegung die folgenden unbestimmten Integrale:

a)
$$\int \frac{x}{x^3 + x^2 - x - 1}\, dx;$$

b)
$$\int \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2}\, dx.$$

Hinweis: i ist eine Nullstelle des Nenners.

2. **a)** Sei
$$I_n := \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\, \mathrm{d}x$$
Bestimmen Sie eine Rekursion, welche I_n durch I_{n-1} ausdrückt.

b) Verwenden Sie Partialbruchzerlegung und (a) um das folgende unbestimmte Integral zu bestimmen:
$$\int \frac{x^6 + 3x^4 + 4x^2 - x + 1}{x^7 + 3x^5 + 3x^3 + x}\, \mathrm{d}x$$

3. Berechnen Sie:

a)
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right);$$

b)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}.$$

4. Konstruieren Sie eine Folge von Riemann-integrablen Funktionen $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x \neq 0 \quad \text{und} \quad \forall x \in [0,1] : \lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0.$$

5. Multiple Choice Aufgabe: Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ rational ist,} \\ 1 & \text{falls } x \text{ irrational ist.} \end{cases}$$

Ist f Riemann-integrierbar oder nicht? Und was ist die richtige Begründung? Die Funktion f ist ...

- ◯ integrierbar, weil sie beschränkt ist.
- ◯ nicht integrierbar, weil sie unstetig ist.
- ◯ integrierbar, weil die Stellen mit $f(x) = 0$ vernachlässigbar sind und sie ansonsten mit einer konstanten Funktion übereinstimmt.
- ◯ nicht integrierbar, weil sie in jedem Teilintervall von $[0,1]$ beide Werte 0 und 1 annimmt und daher die Riemann-Summen nicht konvergieren.

6. Programmieraufgabe in SAGE: Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Schaffen Sie in einem SAGE-worksheet eine `interact`-Umgebung, welche folgendes ermöglicht:

(i) Eingabe von n Funktionswerte $f(\frac{1}{n}), f(\frac{2}{n}), \ldots, f(1)$ einer (unbekannten) Funktion f.

(ii) Approximative Berechnung der Funktion $g(x) := \int_0^x f(u)\mathrm{d}u$ für $0 \leq x \leq 1$.

(iii) Approximative Berechnung der Funktion $h(x) := \int_0^x g(u)\mathrm{d}u$ für $0 \leq x \leq 1$.

(iv) Darstellung der drei Vektoren von Funktionswerten $\big(f(\frac{1}{n}), f(\frac{2}{n}), \ldots, f(1)\big)$, $\big(g(\frac{1}{n}), g(\frac{2}{n}), \ldots, g(1)\big)$ und $\big(h(\frac{1}{n}), h(\frac{2}{n}), \ldots, h(1)\big)$.

Abgabe: Montag 11. März 2013.