D-MATH
D-PHYS
D-CHAB

Analysis II

Prof. J. Teichmann
ETH Zürich
Frühjahr 2013

Serie 3

---

1. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\int \sin^2 t \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$,

b) $\int \frac{dt}{1+\cos t}$ $(\tan(t/2) := u)$,

c) $\int \sinh t \cos t \, dt$,

d) $\int \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}} \, dt$ $(t^2+1 := u)$,

e) $\int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}-t} \, dt$ $(t := \sin^2 u)$,

f) $\int \frac{dt}{\sqrt{1+\mathrm{e}^t}}$.

2. Zeigen Sie folgende kuriose Identität:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \, x^{-x} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$$

Hinweis: Schreiben Sie $x^{-x} = e^{-x \log x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x \log x)^k}{k!}$.

3. Wir betrachten die Funktionenfolge $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ mit

$$f_n(x) := \arctan(nx).$$

a) Überprüfen Sie, dass (f_n) gegen eine Grenzfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert. Ist die Konvergenz gleichmässig auf $[0, \pi]$?

b) Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f_n(x)\mathrm{d}x$ und $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x$

4. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(n\,t)}{n\,t} dt.$$

Hinweis: Wählen Sie ein $\varepsilon > 0$ und zerlegen Sie den Integrationsbereich in die Teilintervalle $[0, \varepsilon]$ und $[\varepsilon, \frac{\pi}{2}]$.

Bitte wenden!

5. Bestimmen Sie alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, die

$$f(x) = 1 - \int_0^x f(t)^2 \mathrm{d}t$$

für alle $x \geq 0$ erfüllen.

Hinweis: Machen Sie sich zuerst klar, dass f stetig differenzierbar ist.

6. Multiple Choice Aufgabe: Gegeben sei die Fehlerfunktion (engl. error function)

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

Der Wert von

$$\int_1^2 e^{-ax^2}\, dx \quad , \quad a > 0$$

ist

- ◯ $\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\operatorname{erf}(2\sqrt{a}) - \operatorname{erf}(\sqrt{a})\right)$
- ◯ $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \left(\operatorname{erf}(2) - \operatorname{erf}(1)\right)$
- ◯ $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \left(\operatorname{erf}(\sqrt{a}) - \operatorname{erf}(2\sqrt{a})\right)$
- ◯ $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \left(\operatorname{erf}(2\sqrt{a}) - \operatorname{erf}(\sqrt{a})\right)$
- ◯ $\operatorname{erf}(\sqrt{a}) - \operatorname{erf}(2\sqrt{a})$

Abgabe: Montag 18. März 2013.