Serie 4

---

1. Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

a) $$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) dx$$

b) $$\int_0^{\frac{1}{\pi}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

c) $$\int_1^\infty \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{x} dx$$

d) $$\int_0^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

2. Zeigen Sie: Das Integral

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^s} \mathrm{d}x$$

ist für $s > 0$ konvergent und für $s > 1$ absolut konvergent. (Durch partielle Integration erhöhe man die Potenz in x^s!)

3. Bestimmen Sie für $\alpha > 0$ die Lösung $x = x(t)$ des folgenden Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{x} &= t\, x^{1+\alpha}\,, \\ x(0) &= x_0 > 0\,. \end{cases}$$

4. Versuchen Sie über einen geeigneten Ansatz die allgemeine Lösung der folgenden inhomogenen Eulerschen Differentialgleichung

$$y'' - \frac{4}{r}\, y' + \frac{6}{r^2}\, y = r^5 \qquad (0 < r < \infty)$$

für die Funktion $y = y(r)$ zu finden.

5. Gegeben sei die Riccati-Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = (2t-1)y(t) + (1-t)y(t)^2 - t \qquad (*)$$

a) Erraten Sie eine (partikuläre) Lösung $y_p(t)$ der Gleichung $(*)$.

b) Finden Sie die allgemeine Lösung von $(*)$ mit Hilfe des Ansatzes $y(t) := y_p(t) + \frac{1}{u(t)}$.

6. Multiple Choice Aufgabe: Welche der folgenden Differentialgleichungen ist linear?

○ $(y' - 2)^2 = y$

○ $y'' + \dfrac{y'}{1-x^2} + \dfrac{y}{1+x} = \dfrac{1}{x^2}$

○ $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$

○ $y'' + y' + y^2 = 0$

○ $y = xy' + (y')^2$

7. Programmieraufgabe in SAGE: Modifizieren sie den Code zur Picard-Iteration im SAGE-worksheet `integration.sws` auf der Webpage von Josef Teichmann so, dass anstatt sybolischer eine numerische Integrationsroutine verwendet wird. Gestalten sie weiters eine interaktive symbolische Eingabe von $(t, u) \mapsto f(t, u)$ und von $t \mapsto u0(t)$.

Abgabe: Montag 25. März 2013.