Serie 8

---

1. **a)** Bestimmen Sie die lokalen Minima und Maxima von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $2x + y = -1$.

b) Bestimmen Sie die lokalen Minima und Maxima von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) := x^4 + y^4 + z^4$ unter der Nebenbedingung $xyz = 1$.

2. Betrachten Sie die Funktionenschar

$$f_\alpha(x,y) := \sin x \sin y - \alpha(\cos x + \cos y),$$

α ein reeller Parameter. Der Ursprung ist ein kritischer Punkt für sämtliche Funktionen dieser Schar. Für welche α ist f_α im Ursprung lokal maximal bzw. minimal bzw. keines von beiden? Für welche α ist der kritische Punkt entartet? (Diese Sonderfälle nicht weiter diskutieren!)

3. Seien $\lambda_i > 0$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ und $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie, wie die Ungleichung

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$$

aus einem Extremwertproblem mit Nebenbedingung folgt.

4. Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion:

$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$$

unter den Nebenbedingungen :

$$g_1(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\,,$$
$$g_2(x,y,z) := 2\,x^2 + y^2 - 1 = 0\,.$$

5. **a)** Zeigen Sie: das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 - y^3 z + 2\sinh(z) &= 1 \\ x \log y - x z^2 + y^2 e^z &= 1 \end{aligned}$$

kann in einer Umgebung des Punktes $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ nach den Variablen $y = f_1(x)$ und $z = f_2(x)$ aufgelöst werden.

b) Betrachten Sie nun die Funktion $f(x) := \binom{f_1(x)}{f_2(x)}$ mit f_1 und f_2 aus Teil **a)**. Berechnen Sie $df(1)$.

6. Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad (x, y) \mapsto 2x^3 - 12x + 3y^2 + 6xy$$

a) Finden Sie die kritischen Punkte von f und entscheiden Sie jeweils, ob es sich dabei um eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder einen Sattelpunkt handelt.

b) Sei

$$D := \{(\,x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0\,, y \geq 0\,, x + y \leq 1\}$$

Bestimmen Sie die globalen Extrema der auf D eingeschränkten Funktion $f\big|_D$.

(Bei Aufgaben 5 und 6 handelt es sich um alte Prüfungsaufgaben.)

7. **Multiple Choice Aufgabe:** Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und sei p ein kritischer Punkt von f. Sind alle Eigenwerte der Hesseschen Form negativ, so gilt

- ◯ die Hessesche Form ist negativ definit und p ist ein globales Maximum
- ◯ die Hessesche Form ist positiv definit und p ist ein globales Maximum
- ◯ die Hessesche Form ist negativ definit und p ist ein lokales Maximum
- ◯ die Hessesche Form ist negativ definit und p ist ein lokales Minimum

Abgabe: Montag 6. Mai 2013.