Lösung Serie 3

---

1. Der Einfachheit der Notation halber lassen wir die Integrationskonstante bei jedem Integral weg.

a) Mit zweimaligem partiellen Integrieren bekommen wir für beliebiges $a \in \mathbb{R}$

$$\int \mathrm{e}^{-t}\,\sin^2 t\,dt = -\,\mathrm{e}^{-t}\,\sin^2 t - 2\mathrm{e}^{-t}\,\sin t\cos t + 2\int \mathrm{e}^{-t}\,(\cos^2 t - \sin^2 t)\,dt =$$

$$= -\,\mathrm{e}^{-t}\,\sin^2 t - 2\mathrm{e}^{-t}\,\sin t\cos t - 2\mathrm{e}^{-t}\,-4\int \mathrm{e}^{-t}\,\sin^2 t\,dt$$

$$\Rightarrow \quad \int \mathrm{e}^{-t}\,\sin^2 t\,dt = -\,\frac{1}{5}\left(\mathrm{e}^{-t}\,\sin^2 t + 2\mathrm{e}^{-t}\,\sin t\cos t + 2\mathrm{e}^{-t}\right)$$

b) Mit der trigonometrischen Identität $\cos(2\vartheta) = 2\cos^2\vartheta - 1$ und der gegebenen Substituition $u = \tan\frac{t}{2}$ bekommen wir

$$\int \frac{dt}{1+\cos t} = \int \frac{dt}{1+\cos\left(2\frac{t}{2}\right)} = \int \frac{dt}{1+\left(2\cos^2\frac{t}{2}-1\right)} = \int du = u = \tan\frac{t}{2}.$$

c) Zweimal partiell integrieren ergibt

$$\int \sinh t\,\cos t\,dt = \cosh t\,\cos t + \sinh t\,\sin t - \int \sinh t\,\cos t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cosh t\,\cos t + \sinh t\,\sin t\right).$$

d) Mit der Substitution $u = t^2 + 1$ erhalten wir

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \int \frac{(t^2+1)-1}{2\sqrt{1+t^2}}\,(2tdt) = \int \frac{u-1}{2\sqrt{u}} = \frac{u^{3/2}}{3} - \sqrt{u} = \frac{(t^2-2)\sqrt{t^2+1}}{3}$$

e) Wir setzen $t = \sin^2 u$ und finden

$$\int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}-t} = \int \frac{\cos u}{\sin u(1-\sin u)}(2\sin u\cos u\,du) = 2\int \frac{\cos^2 u}{1-\sin u}\,du =$$

$$= 2\int (1+\sin u)\,du = 2(\arcsin\sqrt{t} - \sqrt{1-t}).$$

f) Die Substitution $u = \sqrt{1+\mathrm{e}^t}$ liefert unmittelbar

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1+\mathrm{e}^t}} = \int \frac{1}{u}\left(\frac{2u\,du}{u^2-1}\right) = 2\int \frac{du}{u^2-1} = \log\frac{u-1}{u+1} = 2\log(\sqrt{1+\mathrm{e}^t}-1) - t.$$

2.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{d}x\, x^{-x} &= \int_0^1 \mathrm{d}x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x\log x)^k}{k!} \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^1 \mathrm{d}x\,(-x\,\log x)^k \\
&\overset{x=e^{-u}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^{\infty} \mathrm{d}u\, u^k e^{-u(k+1)} \\
&\overset{u(k+1)=v}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{k+1}} \underbrace{\frac{1}{k!}\int_0^{\infty} \mathrm{d}v\, v^k e^{-v}}_{=1\,(\text{wieso?})} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}.
\end{aligned}$$

Bei $(*)$ wurden Summe und Integral vertauscht. Das ist erlaubt, da die Summe gleichmässig konvergiert.

3. **a)** Die (punktweise) Grenzfunktion ist

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ \frac{\pi}{2}, & x>0 \end{cases}$$

Da diese im Unterschied zu den f_n nicht stetig auf $[0,\pi]$ ist, kann die Konvergenz auf diesem Intervall nicht gleichmässig sein.

b) Wir haben offenbar

$$\int_0^{\pi} f(x) = \frac{\pi^2}{2}.$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f_n(x)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \arctan(nx)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(x\arctan(nx)|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{nx}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(x\arctan(nx) - \frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n}\Big|_0^{\pi}\right) \\
&= \frac{\pi^2}{2} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{2n\pi^2}{1+n^2\pi^2} \\
&= \frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt Bernoulli-de l'Hopital verwendet wurde. Somit bemerken wir $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f_n(x)\mathrm{d}x$. Aber Vorsicht: Da keine gleichmässige Konvergenz vorherrscht, ist dies gewissermassen Zufall. Wir hätten es nicht wissen können, ohne beide Seiten der Gleichung zu berechnen!

4. Wir teilen für $\varepsilon > 0$ das Integrationsgebiet auf und bekommen

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(n\,t)}{n\,t}\, dt \right| \leq \int_0^{\varepsilon} dt + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sin(n\,t)}{n\,t} \right| dt = \varepsilon,$$

wobei wir verwendet haben, dass der Integrand im Intervall $[\varepsilon, \frac{\pi}{2}]$ gleichmässig konvergiert. Lassen wir nun ε gegen Null streben, so sehen wir, dass der Grenzwert des Integrals Null ist.

5. Wenn f stetig ist (also auch f^2), gilt nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung, dass $\int_0^x f(t)^2\mathrm{d}t$ differenzierbar ist mit Ableitung $f(x)^2$. D.h. es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = -f(x)^2 \quad x \in \mathbb{R}_{>0}\ .$$

Die rechte Seite ist lokal Lipschitz-stetig (als Funktion von f). Separation ergibt $f(x) = 1/(x + C)$ fr eine Konstante C. Aus $f(0) = 1$ folgt $f(x) = 1/(x + 1)$.

6. Gegeben sei die Fehlerfunktion (engl. error function)

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

Der Wert von

$$\int_1^2 e^{-ax^2}\, dx \quad , \quad a > 0$$

ist

- ○ $\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\operatorname{erf}(2\sqrt{a}) - \operatorname{erf}(\sqrt{a})\right)$
- ○ $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \left(\operatorname{erf}(2) - \operatorname{erf}(1)\right)$
- ○ $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \left(\operatorname{erf}(\sqrt{a}) - \operatorname{erf}(2\sqrt{a})\right)$
- √ ○ $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \left(\operatorname{erf}(2\sqrt{a}) - \operatorname{erf}(\sqrt{a})\right)$
- ○ $\operatorname{erf}(\sqrt{a}) - \operatorname{erf}(2\sqrt{a})$

Es ist

$$\int_1^2 e^{-ax^2}\,dx = \int_0^2 e^{-ax^2}\,dx - \int_0^1 e^{-ax^2}\,dx$$

$$\overset{\text{Sub: } t=\sqrt{a}x}{=} \int_0^{2\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-t^2}\,dt - \int_0^{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-t^2}\,dt$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\sqrt{a}} e^{-t^2}\,dt - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{a}} e^{-t^2}\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \left(\operatorname{erf}\left(2\sqrt{a}\right) - \operatorname{erf}\left(\sqrt{a}\right)\right)$$