Lösung Serie 4

---

1. **a)** Beh.: $\int_0^1 \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)\, \mathrm{d}x$ konvergiert.

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5)(x \to 0)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{x^3/3! + \mathcal{O}(x^5)}{x^2 + \mathcal{O}(x^4)}(x \to 0)$$

$\Rightarrow \exists A, 0 < A < 1$, sodass

$$\left|\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right| \leq 2 \cdot \frac{x^3/3!}{x^2} = \frac{x}{3} \forall 0 < x < A.$$

Die Behauptung folgt aus $\int_0^A \frac{x}{3} \mathrm{d}x < \infty$.

b) Beh.: $\int_0^{\frac{1}{\pi}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\, \mathrm{d}x$ konvergiert.

$$\left|\int_0^{\frac{1}{\pi}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\, \mathrm{d}x\right| \leq \int_0^{\frac{1}{\pi}} \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{1}{\pi}} \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}.$$

c) Beh.: $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x}\, \mathrm{d}x$ konvergiert.

$\sqrt{1+z} = 1 + \frac{1}{2}z + \mathcal{O}(z^2)(z \to 0)$

Deshalb gilt für $x \to \infty$: $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{2x} - (1 - \frac{1}{2x}) + \mathcal{O}(\frac{1}{x^2})\right) = \frac{1}{x^{3/2}} + \mathcal{O}(\frac{1}{x^{5/2}})$.

$\Rightarrow \exists A > 1$ so, dass $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{2}{x^{3/2}} \forall x \geq A$ und die Behauptung folgt aus $\int_A^\infty \frac{2}{x^{3/2}} \mathrm{d}x < \infty$.

d) Beh.: $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$ ist divergent.

$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2} = \underbrace{\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2}}_{\text{divergent}}$ mit der Substitution $t = \ln x$.

2. Die absolute Konvergenz folgt sofort aus

$$\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^s}\right| \mathrm{d}x < \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^s} < \infty \qquad \text{für } s > 1.$$

Durch partielle Integration erhält man

$$\left|\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^s}\mathrm{d}x\right| \leq \left|\left[-x^{-s}\cos x\right]_1^\infty\right| + \int_1^\infty \left|\frac{x^{-s-1}}{-s}\cos x\right| \mathrm{d}x \leq 1 + \frac{1}{s}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^{s+1}} < \infty \qquad \text{für } s > 0.$$

3. Da $x_0 > 0$, darf man die Variablen separieren:

$$\dot{x} = t\,x^{1+\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x^{1+\alpha}} = t\,dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{x^{-\alpha}}{\alpha} = \frac{t^2}{2} + c$$

$$\Downarrow (x(0) = x_0)$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt[\alpha]{x_0^{-\alpha} - \alpha\,\frac{t^2}{2}}} = \sqrt[\alpha]{\frac{2\,x_0^\alpha}{2 - \alpha\,x_0^\alpha\,t^2}}$$

4. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y''(r) - \frac{4}{r}\,y'(r) + \frac{6}{r^2}\,y(r) = r^5, \qquad r > 0\,.$$

Lösung der homogenen Gleichung:

$$\begin{aligned} & \text{Euler–Ansatz}: && y(r) = r^\alpha \\ \Rightarrow\ & \text{Index–Polynom}: && \alpha(\alpha-1) - 4\alpha + 6 = 0 \\ \Rightarrow\ & \alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 3\,. \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung des homogenen Problems:

$$y_h(r) = C_1\,r^2 + C_2\,r^3.$$

Partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned} \text{Ansatz}: \quad & y(r) = C\,r^\alpha \\ \Rightarrow \quad & C(\,\alpha(\alpha-1) - 4\alpha + 6)\,r^{\alpha-2} = r^5 \end{aligned}$$

Wählen wir $\alpha = 7$, dann folgt:

$$C\,(42 - 28 + 6) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{1}{20}$$

Insgesamt lautet die allgemeine Lösung:

$$y(r) = \frac{1}{20}\,r^7 + \underbrace{C_1\,r^2 + C_2\,r^3}_{\substack{\text{(musste in Aufgabe} \\ \text{nicht bestimmt werden)}}}\,.$$

5. **a)** Offenbar ist $y_p(t) \equiv 1$ eine Lösung der Gleichung.

b) Setzen wir den Ansatz in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir

$$-\frac{\dot{u}}{u^2} = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{\cdot} = (2t-1)(1+\frac{1}{u}) + (1-t)(1+\frac{1}{u})^2 - t$$

und somit

$$\dot{u} = -(2t-1)u(u+1) - (1-t)(u+1)^2 + tu^2 = -u + t - 1$$

Die allgemeine Lösung dieser linearen inhomogenen Differentialgleichung ist

$$u(t) = c\mathrm{e}^{-t} + t - 2$$

Somit ist die allgemeine Lösung der ursprünglichen Gleichung:

$$y(t) = 1 + \frac{1}{c\mathrm{e}^{-t} + t - 2}$$

6. Welche der folgenden Differentialgleichungen ist linear?

- ○ $(y' - 2)^2 = y$
- √ ○ $y'' + \dfrac{y'}{1-x^2} + \dfrac{y}{1+x} = \dfrac{1}{x^2}$
- ○ $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$
- ○ $y'' + y' + y^2 = 0$
- ○ $y = xy' + (y')^2$