Lösung Serie 5

---

1. Betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}\mathrm{e}^{-x^2 \sin\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{10}, & x = 0, \end{cases}$$

so finden wir für die Ableitung

$$|f'(x)| = \frac{1}{10}\left|\cos\frac{1}{x} - 2x\sin\frac{1}{x}\right| \mathrm{e}^{-x^2\sin\frac{1}{x}} \leq \frac{3\mathrm{e}}{10} < 1, \quad x \in (0,1],$$

und

$$f'(0) = \frac{1}{10}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-x^2\sin\frac{1}{x}} - 1}{x} = -\frac{1}{10}\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$$

Da außerdem $f([0,1]) \subset [0,1]$ ist, ist $f : [0,1] \to [0,1]$ eine Kontraktion und besitzt somit nach dem Banach'schen Fixpunktsatz genau einen Fixpunkt $x = f(x)$. Da weder $x = 0$ noch $x = 1$ diese Gleichung lösen, liegt die Lösung im offenen Intervall $(0,1)$.

2. Sei $a := 2C$

$$|f(t.u)| \leq C|u|\log(1+|u|^2) \quad \Rightarrow \quad |u|\underbrace{|f(t,u)|}_{=|\dot{u}|} \leq a\tfrac{1+|u|^2}{2}\log(1+|u|^2).$$

Benutze Cauchy-Schwarz: $|u|\cdot|\dot{u}| \geq u\cdot\dot{u}$. $\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log(1+|u|^2) = \frac{2u\dot{u}}{1+|u|^2} \leq a\log(1+|u|^2)$.

$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) \leq af(t)$ mit $f(t) := \log(1+|u(t)|^2) \Rightarrow f(t) \leq f(0)e^{at}$ d.h. $\log(1+|u|^2) \leq e^{at}\log(1+|u_0|^2)$. Aus Satz 3.3.1 (entweder $T_{\max} = \infty$ oder $|u(t)| \to \infty (t \to T_{\max})$) folgt also $T_{\max} = \infty$.

Beachte: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u(t)|^2 = 2u(t)\cdot\dot{u}(t)$ (Skalarprodukt!)

3. Man betrachtet zuerst den Fall $(x,y) \neq (0,0)$: die Funktion ist offensichtlich differenzierbar, da sie die Zusammensetzung von differenzierbaren Funktionen ist. Man kann sämtliche partiellen Ableitungen berechnen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= y(1+z^2)\left[\sin\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) + xy\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\right], \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= x(1+z^2)\left[\sin\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) + xy\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\right], \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= 2xyz\sin\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right).
\end{aligned}$$

Falls $(x, y) = (0, 0)$, dann bekommt man

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,z) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0,z) - f(0,0,z)}{t} = 0,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,z) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t,z) - f(0,0,z)}{t} = 0,\\
\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,z) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0,z+t) - f(0,0,z)}{t} = 0.
\end{aligned}$$

Die Gestalt von den partiellen Ableitungen in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ zeigt, dass sie dort stetig sind; um die Differenzierbarkeit von f in ganz $\mathbb{R}^3$ zu zeigen, genügt es zu verifizieren, dass sämtliche partielle Ableitungen in $(x, y) = (0, 0)$ stetig sind. Man betrachte e.g. die partielle Ableitung bzgl. x; in zylindrischen Koordinaten kann man schreiben

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi, \quad z = z, \quad r \in \mathbb{R}^+, \quad \phi \in [0, 2\pi),$$

woraus

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = r(1+z^2)\sin\phi\,[&\sin(\cos\phi\sin\phi) + \\
&\sin\phi\cos\phi(\sin^2\phi - \cos^2\phi)\cos(\sin\phi\cos\phi)\big]\,.
\end{aligned}$$

Falls (x, y) gegen $(0, 0)$ strebt, dann strebt r gegen 0, unabhängig vom Winkel ϕ: deshalb strebt die partielle Ableitung von f bzgl. x gegen 0, falls (x, y) gegen $(0, 0)$ strebt. Ähnliche Berechnungen zeigen, dass auch die restlichen partiellen Ableitungen gegen 0 streben, falls (x, y) gegen $(0, 0)$ strebt, woraus die Behauptung folgt.

4. Da die Funktion f differenzierbar ist, so gilt

$$\frac{d}{dt} f(e^t x)|_{t=0} = \langle df(x), x\rangle.$$

Auf der anderen Seite gilt

$$\frac{d}{dt} f(e^t x)|_{t=0} = \frac{d}{dt} e^{\alpha t} f(x)|_{t=0} = \alpha f(x),$$

woraus die Behauptung folgt.

5. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erklärt durch die Vorschrift

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0),\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

○ f ist im Punkt $(0, 0)$ nicht partiell differenzierbar.

○ f ist zweimal stetig partiell differenzierbar.

√ ◯ $\partial_1\partial_2 f(0,0) \neq \partial_2\partial_1 f(0,0)$.

◯ f ist nicht stetig.

Berechnen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen an dem Punkt $(0,0)$. Dann folgt

$$\partial_1\partial_2 f(0,0) = 1 \neq -1 = \partial_2\partial_1 f(0,0).$$

6. a)

$$M = \{u \in C^0([0,T];\mathbb{R}^n) | \sup_{0\le t\le T} |u(t) - u_0| \le r_0\}$$

r_0 und $L = L(r_0)$ sind so, dass

$$u, v \in B_{r_0}(u_0) \Rightarrow |f(t,u) - f(t,v)| \le L|u - v| \forall t$$

$\Phi : M \to M$, falls $T \le c_0^{-1} r_0$ (*), wobei

$$c_0 := Lr_0 + \sup_{0\le t\le T} |f(t,u_0)|.$$

Φ ist $\frac{1}{2}$-kontrahierend, falls $T \le \frac{1}{2L}$ (**).

In diesem Fall: $f(t,u) = u^2$; $f(t,u_0) = 1 \quad \Rightarrow c_0 = Lr_0 + 1$ und (*) sagt: $T \le \frac{r_0}{Lr_0+1}$. Lipschitz-Bed.: $u, v \in B_{r_0}(u_0) \Rightarrow |u^2 - v^2| = |(u+v)(u-v)| \le (|u| + |v|)|u - v| \le \underbrace{2(1+r_0)}_{=:L}|u - v|$. Einsetzten in (*) und (**) liefert: $T \le \frac{r_0}{Lr_0+1} = \frac{r_0}{2r_0(1+r_0)+1}$; $T \le \frac{1}{4(1+r_0)}$. Die Wahl $T \le \frac{r_0}{4r_0(1+r_0)+1} < 1$ erfüllt die beiden Bedingungen. $r_0 > 0$ ist frei wählbar, aber T ist maximal ($= 1/8$) für $r_0 = 1/2$.

b) Beh.: $(1 + t + \cdots + t^n)^2 = \sum_{k=0}^{n}(k+1)t^k + \sum_{k=n+1}^{2n}(2n-k+1)t^k \quad n \ge 0)$.

Bew. (Induktion) $n = 0: \quad 1 = 1$(die zweite Summe ist leer)

$n \to n+1$: $(1+t+\cdots+t^n+t^{n+1})^2 = (1+t+\cdots+t^n)^2 + 2(1+t+\cdots+t^n)t^{n+1} + t^{2n+2} = \sum_{k=0}^{n}(k+1)t^k + \sum_{k=n+1}^{2n}(2n-k+1)t^k + 2(t^{n+1} + t^{n+2} + \cdots + t^{2n+1}) + t^{2n+2} = \sum_{k=0}^{n}(k+1)t^k + (n+2)t^{n+1} + \sum_{k=n+2}^{2n}\left((2n-k+1)t^k + 2t^k\right) + 2t^{2n+1} + t^{2n+2} = \sum_{k=0}^{n+1}(k+1)t^k + \sum_{k=n+2}^{2n+2}(2(n+1)-k+1)t^k$. □

Beh. $u^{(n)}(t) = 1 + t + \cdots + t^n + q_n(t)$ für ein Polynom q_n, das sich als $q_n(t) = t^{n+1}p_n(t)$ schrieben lässt.

Bew. (Induktion) $n = 0$: $u^{(0)}(t) = 1, \quad n = 1 : u^{(1)}(t) = 1 + t$

$n \to n+1$: Hier sind $u^{(n+1)}(t) = 1 + \int_0^t u^{(n)}(\tau)^2 \mathrm{d}\tau = 1 + \int_0^t (1 + \tau + \cdots + \tau^n + q_n(\tau))^2 \mathrm{d}\tau = 1 + \int_0^t \left((1+\tau+\cdots+\tau^n)^2 + 2q_n(\tau)\cdot(1+\tau+\cdots+\tau^n) + q_n(\tau)^2\right)\mathrm{d}\tau =$

$$1 + \underbrace{\int_0^t \sum_{k=0}^{n}(k+1)\tau^k \mathrm{d}\tau}_{=t+t^2+\cdots+t^{n+1}} + \underbrace{\int_0^t \left(\sum_{k=n+1}^{2n}(2n-k+1)\tau^k + 2q_n(\tau)\cdot(1+\tau+\cdots \quad \tau^n) + q_n(\tau)^2\right)\mathrm{d}\tau}_{=:q_{n+1}(t)}$$

Sei $d_n := \mathrm{Grad}(q_n)$. Die Definition von q_{n+1} aus q_n zeigt:

- $d_n \geq n+1 \quad (n \geq 2)$
- $d_{n+1} \leq 2d_n + 1$ und deshalb $d_n \leq 2^n - 1 \quad (n \geq 2)$
- alle Koeffizienten von q_n liegen zwischen 0 und 1. (Nachprüfen!) $\Rightarrow q_n(t) = t^{n+1} \underbrace{\sum_{k=0}^{2^n-n-2} a_k^{(n)} t^k}_{=p_n(t)}, \quad 0 \leq a_k^{(n)} \leq 1 \forall k, n. \quad \square$

Für $0 \leq t \leq T$ gilt $p_n(t) \leq \sum_{k \geq 0} t^k = \frac{1}{1-t}$.

Sei $u(t) := \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n + \cdots \quad (0 \leq t \leq T)$. Dann gilt für $0 \leq t \leq T$: $|u^{(n)}(t) - u(t)| = |t^{n+1} p_n(t) - t^{n+1} - t^{n+2} - \cdots| \leq t^{n+1}(p_n(t) + 1 + t + t^2 + \cdots) \leq t^{n+1} \frac{2}{1-t} \leq T^{n+1} \frac{2}{1-T} \to 0 \quad (n \to \infty)$. (***)

c) Solange $T < 1$ ist die Konvergenz (***) glm. auf $[0, T]$ (geometrische Reihe)