Lösung Serie 8

---

1. **a)** Man bemerke, dass die Nebenbedingung überall regulär ist. Wir bilden die Lagrange-Funktion $L(x,y) := x^2+y^2+\lambda(2x+y+1)$ und erhalten die Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= 2x + 2\lambda \\ 0 &= 2y + \lambda \\ 0 &= 2x + y + 1 \end{aligned}$$

Wir finden den kritischen Punkt $(x,y) = (-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}) =: p$ und $\lambda = \frac{2}{5}$. Um den Typ des kritischen Punktes zu ermitteln, bilden wir die Hesse-Matrix der Lagrange Funktion in p.

$$\mathrm{Hess}_L(p) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

welche positiv definit ist. Also ist p ein (relatives) lokales Minimum.

b) Falls die Nebenbedingung erfüllt ist, kann keine der Koordinaten 0 sein. Und überall wo dies der Fall ist, ist die Nebenbedingung regulär.

$$L(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 + \lambda(xyz - 1)$$

Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 =& 4x^3 + \lambda yz \\ 0 =& 4y^3 + \lambda xz \\ 0 =& 4z^3 + \lambda xy \\ 0 =& xyz - 1 \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit x, die zweite mit y und subtrahieren die entstehenden Gleichungen voneinander. Wir erhalten $x^4 - y^4 = 0$, also $x^2 = y^2$. Verfahren wir mit der ersten und der dritten Gleichung analoger Weise, so erhalten wir $x^2 = y^2 = z^2$ und unter Berücksichtigung der Nebenbedingung erhalten wir die 4 kritischen Punkte $p_0 = (1,1,1), p_1 = (1,-1,-1), p_2 = (-1,1,-1), p_3 = (-1,-1,1)$ und an jedem dieser Punkte ist $\lambda = -4$ Die Hesse-Matrix berechnet sich zu

$$\mathrm{Hess}_L(p_j) = \begin{pmatrix} 12x_j^2 & -4z_j & -4y_j \\ -4z_j & 12y_j^2 & -4x_j \\ -4y_j & -4x_j & 12z_j^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -4z_j & -4y_j \\ -4z_j & 12 & -4x_j \\ -4y_j & -4x_j & 12 \end{pmatrix}$$

Die Hauptminoren dieser Matrix sind

$$12, \quad \begin{vmatrix} 12 & -4z_j \\ -4z_j & 12 \end{vmatrix} = 128, \quad \begin{vmatrix} 12 & -4z_j & -4y_j \\ -4z_j & 12 & -4x_j \\ -4y_j & -4x_j & 12 \end{vmatrix} = 1024$$

Da diese alle positiv sind, ist die Matrix laut dem Satz von Sylvester positiv definit und alle 4 Punkte sind (relative) lokale Minima.

2. $\nabla f_\alpha(x,y) = \binom{\cos(x)\sin(y)+\alpha\sin(x)}{\sin(x)\cos(y)+\alpha\sin(y)}$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x)\sin(y)+\alpha\cos(x) & \cos(x)\cos(y) \\ \cos(x)\cos(y) & -\sin(x)\sin(y)+\alpha\cos(y) \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von $Hf(0,0)$ sind $\alpha \pm 1$. Falls $\alpha > 1$ ist die Hesse-Matrix positiv definit und wir haben ein lokales Minimum für $\alpha < -1$ ist sie negativ definit und wir haben ein lokales Maximum. Für $-1 < \alpha < 1$ entsteht ein Sattelpunkt. Entartet ist der kritische Punkt nur für $\alpha = \pm 1$.

3. Für jedes $t > 0$ gilt

$$\begin{aligned} &a_1^{\lambda_1} \dots a_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \quad \Rightarrow \\ &(ta_1)^{\lambda_1} \dots (ta_n)^{\lambda_n} = t^{\lambda_1+\dots+\lambda_n} a_1^{\lambda_1} \dots a_n^{\lambda_n} = t a_1^{\lambda_1} \dots a_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1(ta_1) + \dots + \lambda_n(ta_n) \end{aligned}$$

und es genügt deshalb, die Ungleichung für $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 1$ zu zeigen. Wir möchten also die Funktion $f : \mathbb{R}^n_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$

$$f(a_1, \dots, a_n) = a_1^{\lambda_1} \dots a_n^{\lambda_n}$$

unter der Nebenbedingung $g(a_1, \dots a_n) = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 1$ maximieren.

1. f hat auf $g = 1$ ein globales Maximum, bei welchem alle Koordinaten grösser 0 sind g beschreibt eine Hyperebene, welche alle Koordinatenachsen schneidet. Demnach ist die Menge $D := \{\, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n_+ \mid g(\mathbf{a}) = 0 \,\}$ beschränkt und ihr Abschluss somit kompakt. Der Rand ∂D ist der Durchschnitt oben genannter Hyperebene mit den Koordinatehyperebenen. f lässt sich auf $\bar{D}$ stetig fortsetzen durch $f|_{\partial D} = 0$. Da $\bar{D}$ wie erwähnt kompakt ist, nimmt f darauf ein Maximum an. Da f im Innern von D positiv ist, kann dieses Maximum nicht am Rand liegen.

2. Bestimmung des globalen Maximums von f auf $g = 1$. Die globale Maximalstelle muss für ein $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\partial_i f(\mathbf{a}) = \lambda \partial_i g(\mathbf{a}) \quad i = 1, \dots, n$$

erfüllen. Diese Gleichung ist

$$(\lambda_i/a_i) f(\mathbf{a}) = \lambda\lambda_i \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Wir erhalten als einzige Lösung $\lambda = 1$ und $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$. Der zugehörige Funktionswert ist $f(\mathbf{a}) = 1$.

Aus 1. und 2. folgt für $a_i > 0$ und $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = 1$

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n} \leq 1$$

und daraus die zu beweisende Ungleichung.

4. Wir werden die Extrema mit dem Verfahren von Lagrange bestimmen.
Seien λ_1 und λ_2 zwei reelle Parameter. Wir führen eine neue Funktion ein:

$$\begin{aligned} F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) :&= f(x,y,z) - \lambda_1\, g_1(x,y,z) - \lambda_2\, g_2(x,y,z) = \\ &= x^3 + y^3 + z^3 - (\lambda_1 + 2\,\lambda_2)\, x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\, y^2 - \lambda_1\, z^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\,. \end{aligned}$$

Die Extrema von f mussen dann folgendes Gleichungssytem erfüllen

$$\begin{cases} 3\,x^2 - 2\,x\,(\lambda_1 + 2\,\lambda_2) = 0 \\ 3\,y^2 - 2\,y\,(\lambda_1 + \lambda_2) = 0 \\ 3\,z^2 - 2\,\lambda_1\, z = 0 \\ g_1(x,y,z) = 0 \\ g_2(x,y,z) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x\,(3\,x - 2\,(\lambda_1 + 2\,\lambda_2)) = 0 \\ y\,(3\,y - 2\,(\lambda_1 + \lambda_2)) = 0 \\ z\,(3\,z - 2\,\lambda_1) = 0 \\ x^2 - z^2 = 0 \\ 2\,x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Wir können dann folgende Lösungen finden

$$\mathbf{a}_\pm \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1$$

$$\mathbf{b}_{\pm,\pm} \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{oder} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{3}\,(\lambda_1 + 2\,\lambda_2) \\ y = \frac{2}{3}\,(\lambda_1 + \lambda_2) \\ z = \frac{2}{3}\,\lambda_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (\lambda_1 + 2\,\lambda_2) = \pm\lambda_1 \\ 2\,(\lambda_1 + 2\,\lambda_2)^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)^2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \mathbf{c}_\pm \\ \mathbf{d}_{\pm,\pm} \end{matrix}$$

$$\mathbf{c}_\pm \quad \begin{cases} \lambda_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = y = z = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\mathbf{d}_{\pm,\pm} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ 2\,\lambda_1 = \frac{9}{4} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = 0\,,\ x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (= \mathbf{b}_{\pm,\pm})$$

Wenn wir jetzt die zugehörige Funktionswerten bestimmen

$$f(\mathbf{a}_\pm) = \pm 1\,, \quad f(\mathbf{b}_{\pm,\pm}) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,, 0\,, \quad f(\mathbf{c}_\pm) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\,,$$

sehen wir sofort, dass die globale Extrema in $\mathbf{a}_\pm$ liegen.

Das gleiche Resultat kann man auch kriegen, wenn man die Funktion sowie die Nebenbedingungen in Zylinder- oder Kugelkoordinaten umschreibt. Wir werden den ersten Fall skizzieren.

$$\begin{cases} x = \varrho\,\cos\varphi \\ y = \varrho\,\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} g_1(\varrho,\varphi) = \varrho^2 + z^2 - 1 = 0 \\ g_2(\varrho,\varphi) = 2\,\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} z^2 = 1 - \varrho^2 \\ \cos^2\varphi = \frac{1-\varrho^2}{\varrho^2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} F(\varrho) &= f(x(\varrho), y(\varrho), z(\varrho)) = \\ &= \varrho^3\cos^3\varphi(\varrho) + \varrho^3\sin^3\varphi(\varrho) + z^3(\varrho) = \\ &= 2\,(1-\varrho^2)^{3/2} + (2\,\varrho^2 - 1)^{3/2} \end{aligned}$$

Dann ist $F'(\varrho) = 0$ für $\varrho = 1 \quad \Rightarrow \quad (x,y,z) = (0,0,\pm 1)$ wie oben.

5. **a)** Wir bemerken zunächst, dass $(1,1,0)$ das Gleichungssystem löst. Seien nun

$$F_1(x,y,z) := x^2 - y^3 z + 2\sinh(z) \quad \text{und} \quad F_2(x,y,z) := x\log y - xz^2 + y^2 e^z\,.$$

Da die Matrix

$$\begin{pmatrix} \partial_y F_1(1,1,0) & \partial_z F_1(1,1,0) \\ \partial_y F_2(1,1,0) & \partial_z F_2(1,1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y^2 z & -y^3 + 2\cosh z \\ \frac{x}{y} + 2ye^z & -2xz + y^2 e^z \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y,z)=(1,1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

invertierbar ist, folgt die Behauptung aus dem Theorem ber implizite Funktionen.

b) Mit der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} dF_1(x, f_1(x), f_2(x)) \\ dF_2(x, f_1(x), f_2(x)) \end{pmatrix}\Bigg|_{x=1} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x F_1(x, f_1(x), f_2(x)) & \partial_y F_1(x, f_1(x), f_2(x)) & \partial_z F_1(x, f_1(x), f_2(x)) \\ \partial_x F_2(x, f_1(x), f_2(x)) & \partial_y F_2(x, f_1(x), f_2(x)) & \partial_z F_2(x, f_1(x), f_2(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ f_1'(x) \\ f_2'(x) \end{pmatrix}\Bigg|_{x=1}. \end{aligned}$$

Mit $\binom{\partial_x F_1(1,1,0)}{\partial_x F_2(1,1,0)} = \binom{2}{0}$ folgt

$$df(1) = \begin{pmatrix} f_1'(1) \\ f_2'(1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(Bemerkung 8.8.2. i) im Skript.)

6. **a)** Die notwendige Bedingung für kritische Punkte ergibt

$$\begin{aligned} x^2 - 2 + y &= 0\,, \\ x + y &= 0\,. \end{aligned}$$

Also ist $x = -y$, und es folgt $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0$. Damit hat f die kritischen Punkte

$$P_1 = (2, -2) \quad \text{und} \quad P_2 = (-1, 1)\,.$$

Weiter ist

$$Hess_f(P_1) = 6\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Hess_f(P_2) = 6\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$Hess_f(P_1)$ ist positiv definit (Eigenwerte $\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{13})$) und $Hess_f(P_1)$ ist indefinit (Eigenwerte $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{13})$). Somit ist P_1 eine lokale Minimalstelle und P_2 ein Sattelpunkt.

b) Die Punkte P_1 und P_2 liegen nicht in D. Kritische Punkte auf dem Rand von D:

- $y = 0, x \in]0,1[$: $\frac{d}{dx}(2x^3 - 12x) = 6x^2 - 12 \neq 0\,,$
- $x = 0, y \in]0,1[$: $\frac{d}{dy}(3y^2) = 6y \neq 0\,,$
- $y = 1-x, x \in]0,1[$: $\frac{d}{dx}(2x^3 - 3x^2 - 12x + 3) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x-2)(x+1) \neq 0\,,$
- Eckpunkte: $P_5 = (0,0)$, $P_6 = (0,1)$, $P_7 = (1,0)\,.$

Es kommen also nur die Eckpunkte in Frage. Die Funktionswerte sind:

	P_5	P_6	P_7
(x,y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$
$f(x,y)$	0	3	-10

Es folgt $\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = 3$ und $\min_{(x,y)\in D} f(x,y) = -10$.

7. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und sei p ein kritischer Punkt von f. Sind alle Eigenwerte der Hesseschen Form negativ, so gilt

- ○ die Hessesche Form ist negativ definit und p ist ein globales Maximum
- ○ die Hessesche Form ist positiv definit und p ist ein globales Maximum
- √ ○ die Hessesche Form ist negativ definit und p ist ein lokales Maximum
- ○ die Hessesche Form ist negativ definit und p ist ein lokales Minimum

Die Hessesche Form gibt nur Auskunft über das lokale Verhalten der Funktion. Nach Definition ist die Hessche Form in diesem Fall negativ definit. In geeigneten Koordinaten ist f in der Nähe von p gegeben durch $f(x) = f(p) - \lambda_1 x_1^2 - \lambda_2 x_2^2 - \lambda_3 x_3^2$ für $-\lambda_i < 0$ und damit ist $f(p)$ ein lokales Maximum.