# Lösung Serie 10

---

**1.** Per Definition ist $\{\mathrm{d}x_j\}$ die duale Basis zur Standardbasis von $\mathbb{R}^n$, d.h. $v = \sum_{j=1}^n \mathrm{d}x_j(v)e_j$. Durch Entwicklung nach der ersten Spalte erhalten wir somit

$$\begin{aligned}\det(x, v_1, \ldots, v_{n-1}) &= \begin{vmatrix} x_1 & \mathrm{d}x_1(v_1) & \mathrm{d}x_1(v_2) & \cdots & \mathrm{d}x_1(v_{n-1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & \mathrm{d}x_n(v_1) & \mathrm{d}x_n(v_2) & \cdots & \mathrm{d}x_n(v_{n-1}) \end{vmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} x_j \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j-1} \wedge \mathrm{d}x_{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n(v_1, \ldots, v_{n-1})\end{aligned}$$

was die gesuchte Formel ergibt.

**2.** **a)**

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega =& \mathrm{d}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \wedge \mathrm{d}y - \mathrm{d}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \wedge \mathrm{d}x \\ =& \left(\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x + \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y\right) \wedge \mathrm{d}y - \left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y + \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\right) \wedge \mathrm{d}x \\ =& \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \\ =& 0\end{aligned}$$

**b)** Die übliche Parametrisierung $(x(t), y(t)) := (\cos t, \sin t)$ ergibt

$$\int_{S^1} \omega = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(t)\cos(t) - \sin(t)(-\sin(t))}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi$$

**3.** Zunächst bemerken wir, dass wegen Schiefsymmetrie $\omega(\ldots, v, \ldots, v, \ldots) = 0$ gilt. Desweiteren, falls eine Linearkombination $v = \sum_{j=1}^l a_l v_l$ existiert, dann folgt $\omega(v_1, \ldots, v_l, v, \ldots) = 0$ wegen dem vorherigen und Multilinearität. Zusammengefasst: Falls Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig sind, dann gilt $\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0$. Nun gilt per Definition für beliebige $x \in \mathbb{R}^m$ und $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^m$:

$$\phi^*\omega(x)(v_1, \ldots, v_k) = \omega(\phi(x))(\mathrm{d}\phi(x)v_1, \ldots, \mathrm{d}\phi(x)v_k)$$

wobei $\mathrm{d}\phi(x)v_j \in T_{\phi(x)}M$. Aber es gilt $\dim T_{\phi(x)}M = d < k$ und somit sind die Vektoren $\mathrm{d}\phi(x)v_1, \ldots, \mathrm{d}\phi(x)v_k$ linear abhängig und nach dem oben gesagten folgt $\phi^*\omega(x)(v_1, \ldots, v_k) = 0$ und somit $\phi^*\omega = 0$.

**4.** Für die Funktion $f(x,y,z) = ((y^2-2)(x^2-1),\ y^2+z)$ bekommen wir

$$df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x(y^2-2) & 2y(x^2-1) & 0 \\ 0 & 2y & 1 \end{pmatrix},$$

was nur für $(x,y) = 0$ oder $|x| = 1$ und $|y| = \sqrt{2}$ nicht surjektiv ist. Daher ist die angegebene Menge sicher für alle $c_1$, $c_2$ mit $c_1 \notin \{0,2\}$ eine Untermannigfaltigkeit.

Für $c_1 = 0$ ist die Menge die Vereinigung der vier Geraden $x = \pm 1$ und $y = \pm\sqrt{2}$, was sicherlich keine Mannigfaltigkeit ist, und für $c_1 = 2$ ist der Nullpunkt ein isolierter Punkt. Somit ist die Menge genau für $(c_1, c_2) \in (\mathbb{R} \setminus \{0,2\}) \times \mathbb{R}$ eine Untermannigfaltigkeit.

**5.** **a)** Wir haben $\partial M = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z^2 + y^2 = z,\ z = 1 \,\}$ und der Tangentialvektor $(-y, x, 0)^t \in T_{(x,y,1)}\partial M$ ist positiv orientiert bezüglich der induzierten Orientierung des Randes.

**b)** Die Parametrisierung $\varphi(t) := (\cos t, \sin t),\ 0 \le t < 2\pi$ leistet das gewünschte.

**6.** Es ist eine Fläche $S$ gegeben durch die Parameterdarstellung $(u,v) \to r(u,v)$. Die gleiche Fläche $S$ sei auch durch die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ gegeben. Man betrachte einen festen Punkt $P_0$ auf der Fläche $S$; dabei gelte $\vec{OP_0} = r(u_0, v_0)$. Klicke die **richtige** Aussage an. Die Vektoren $\operatorname{grad} f|_{P_0}$ und $r_u(u_0,v_0) \times r_v(u_0,v_0)$

√ ◯ sind parallel.

◯ stehen senkrecht aufeinander.

◯ sind weder parallel noch stehen sie senkrecht aufeinander.

◯ sind gleich.

◯ sind entgegengesetzt gleich.