Lösung Serie 11

---

1. **a)** $\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \\ t \end{pmatrix}, \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1.$

$$K(\gamma_1(t)) = \begin{pmatrix} 1-3t+t^2 \\ t^2-t+1 \\ 2t-1 \end{pmatrix} \implies \int_{\gamma_1} K \cdot \mathrm{d}s = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-3t+t^2 \\ t^2-t+1 \\ 2t-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = 1.$$

Analog: $\int_{\gamma_2} K \cdot \mathrm{d}s = \int_{\gamma_3} K \cdot \mathrm{d}s = 1 \implies \int_{\partial\triangle} K \cdot \mathrm{d}s = 3.$

b)

$$\vec{\mathrm{rot}} K = \begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 1-(-1) \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Parametrisierung $\Phi(u,v) = (u, v, 1-u-v)$

$$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\implies \int_{\partial\triangle} K \cdot \mathrm{d}s = \iint_{\triangle} \vec{\mathrm{rot}} K \cdot n \mathrm{d}o = \int_0^1 \int_0^{1-u} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}v \mathrm{d}u = 6 \int_0^1 (1-u) \mathrm{d}u$$

$$= 6(u - \frac{u^2}{2})|_0^1 = 3.$$

c) Der Rand $\partial\triangle$ besteht aus drei Geradenabschnitten, ist also stückweise stetig differenzierbar. Ausserdem ist das Vektorfeld K auf ganz $\mathbb{R}^3$ (also auf einer Umgebung von $\triangle$) stetig differenzierbar. Damit sind die Voraussetzungen des Satzes von Stokes erfüllt.

2. $\frac{\partial K^1}{\partial y} = \frac{\partial K^2}{\partial x} = 2\frac{x^2-y^2xyz}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial K^1}{\partial z} = \frac{\partial K^3}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{\partial K^2}{\partial z} = \frac{\partial K^3}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2} \implies \vec{\mathrm{rot}} K = 0$ ausserhalb der z-Achse.

Sei C der Kegel durch γ_1 und γ_2 mit $0 \leq z \leq 2$. Dann ist $\partial C = \gamma_1 - \gamma_2$ der orientierte Rand von C und K ist wohldefiniert (und glatt) auf C. Nach Stokes gilt also

$$\int_{\gamma_1-\gamma_2} K = \int_{\partial C} K = \iint_C \vec{\mathrm{rot}} K \cdot n \mathrm{d}o = 0.$$

3. Es seien also

$$H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\},$$
$$S := \{(x,y,z) \in H \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

Wir parametrisieren S durch

$$f : \begin{pmatrix} \varphi \\ r \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi \end{pmatrix},$$

und berechnen

$$f_r \times f_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 2r(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ -2r^2\sin 2\varphi \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -2r\cos^3\varphi \\ 2r\sin^3\varphi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Rand von S ist

$$\partial S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ z = x^2 - y^2\},$$

und kann durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos^2 t - \sin^2 t \end{pmatrix}$$

parametrisiert werden. Es ist

$$\mathrm{d}\gamma = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ -2\sin 2t \end{pmatrix} \mathrm{d}t.$$

Das Vektorfeld F ist gegeben als $F(x,y,z) := (z,x,y)$. Die Rotation davon ist

$$\mathbf{rot} F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir können nun die Berechnung starten.

Linienintegral:

$$\int_{\partial S} F\,\mathrm{d}\gamma = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos^2 t - \sin^2 t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ -4\sin t\cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\cos^2 t\sin t + \sin^3 t + \cos^2 t - 4\sin^2\cos t)\mathrm{d}t = \pi$$

Flächenintegral:

$$\iint_S \mathbf{rot} F \cdot n \mathrm{d}o = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (f_\varphi \times f_r)\, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} [2r^2(\sin^3\varphi - \cos^3\varphi) + r]\, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r = \int_0^1 (0 + 2\pi r) \mathrm{d}r = 2\pi \Big| \frac{r^2}{2} \Big|_0^1 = \pi.$$

4. **a)** Eine mögliche Parametrisierung der gegebenen 'Paraboloidenkuppel' ist

$$f : [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} u\cos v \\ u \sin v \\ 1 - u^2 \end{pmatrix}$$

Die Punkte, in denen diese Funktion nicht injektiv oder nicht regulär ist, bilden eine Nullmenge bzgl. des zweidimensionalen Masses.

Wir müssen also

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} K(f(u,v)) \cdot (f_u \times f_v)\, \mathrm{d}v \mathrm{d}u$$

berechnen. Zuerst:

$$f_u \times f_v = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ -2u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u^2 \cos v \\ 2u^2 \sin v \\ u \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} u\cos v \\ u \sin v \\ (1-u^2)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2u^2 \cos v \\ 2u^2 \sin v \\ u \end{pmatrix} \mathrm{d}v \mathrm{d}u =$$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} 2u^3(\cos^2 v + \sin^2 v) + u(1 - 2u^2 + u^4)\, \mathrm{d}v \mathrm{d}u =$$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} u + u^5\, \mathrm{d}v \mathrm{d}u = 2\pi \int_0^1 u + u^5\, \mathrm{d}u = \frac{4\pi}{3}.$$

b) Für den Satz von Gauss brauchen wir die Divergenz von K:

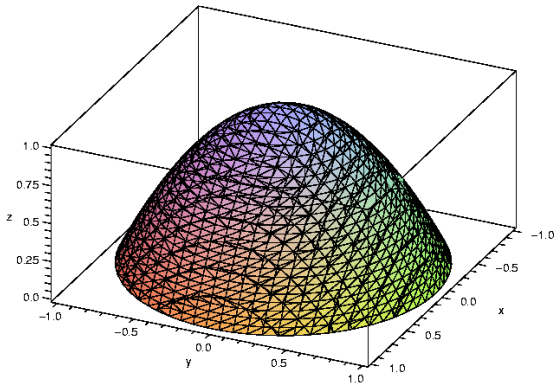
$$\operatorname{div} K = 2(1+z).$$

Das Integral über die 'gefüllte Paraboloidenkappe' wird am besten in Zylinderkoordinaten berechnet. Für

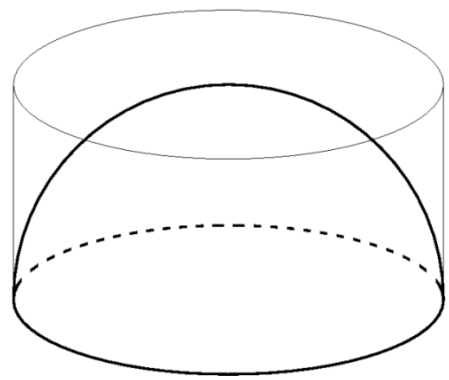
$$g : \begin{pmatrix} \varphi \\ r \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

gilt $|J_g(\varphi, r, z)| = r$. Darum wird das Integral:

$$\int_0^1 \int_0^{1-r^2} \int_0^{2\pi} 2(1+z)r \,\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z \mathrm{d}r$$
$$= 4\pi \int_0^1 r\Big|z + \frac{z^2}{2}\Big|_0^{1-r^2} \mathrm{d}r = 4\pi \int_0^1 \frac{3}{2}r - 2r^3 + \frac{1}{2}r^5 \,\mathrm{d}r = \frac{4\pi}{3}.$$



$0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$ (Aufg. 2)



Halbsphäre im Zylinder (Aufg. 3)

5. a) Parametrisierung von H:

$$f : [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}.$$

Da f injektiv und regulär bis auf eine Nullmenge (bzgl. des zweidimensionalen Masses) ist, berechnen wir

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} K(f(u, v)) \cdot (f_u \times f_v) \,\mathrm{d}v \mathrm{d}u.$$

Zuerst:

$$f_u \times f_v = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ -\sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \cos^2 v \\ \sin u \cos^2 v \\ \sin v \cos v \end{pmatrix}.$$

Der Fluss ist also:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - \sin v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos u \cos^2 v \\ \sin u \cos^2 v \\ \sin v \cos v \end{pmatrix} \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$
$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin v \cos v - \sin^2 v \cos v) \,\mathrm{d}v = 2\pi \Big|\frac{1}{2} \sin^2 v\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{3}.$$

b) Aus der Definition des Vektorfeldes K sieht man unmittelbar, dass
- der Vektor $K(x, y, z)$ immer in vertikale Richtung zeigt, und dass
- $K = 0$ überall auf der '$z = 1$'-Ebene ist.

Sei Z der Zylinder um die z-Achse mit Radius 1 und z-Werten von 0 bis 1. Wegen der obigen Bemerkungen verschwindet der Fluss von K sowohl auf dem 'oberen Deckel' als auf dem Mantel von Z.

Wir definieren dann Ω als den Teil von Z, der von unten durch H berandet wird. Somit besteht der Rand von Ω aus H, dem oberen Deckel von Z und dem Mantel von Z, und wir wissen:

$$\iint_H K \cdot n \, \mathrm{d}o = \iint_{\partial\Omega} K \cdot n \, \mathrm{d}o.$$

Mit Gauss haben wir dann

$$\iint_{\partial\Omega} K \cdot n \, \mathrm{d}o = -\iiint_\Omega \operatorname{div} K \, \mathrm{d}\mu = \iiint_\Omega 1 \, \mathrm{d}\mu,$$

und letzteres ist einfach das dreidimensionale Volumen von Ω, das sich leicht als 'Zylinder minus Halbkugel' berechnen lässt:

$$\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3}.$$

6. a) (direkte Rechnung): B wird parametrisiert durch:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} R\cos\vartheta\cos\varphi \\ R\cos\vartheta\sin\varphi \\ R\sin\vartheta \end{pmatrix}, \ \varphi \in [0\,,\,2\pi)\,,\ \vartheta \in \left[\vartheta_0\,,\,\tfrac{\pi}{2}\right),$$

wobei der Winkel ϑ_0 dem Winkel der "Abschneidhöhe" entspricht. Dort muss gelten:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= R^2\cos^2\vartheta_0\cos^2\varphi + R^2\cos^2\vartheta_0\sin^2\varphi = R^2\cos^2\vartheta_0 = \frac{d^2}{4} \\ &\Rightarrow \ \vartheta_0 = -\arccos\left(\frac{d}{2R}\right) \ \text{ damit } \vartheta_0 \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, 0\right] \text{ ist.} \end{aligned}$$

Mit dieser Parametrisierung ist das vektorielle Flächenelement

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{o} &= \frac{\partial T}{\partial\varphi} \times \frac{\partial T}{\partial\vartheta} \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\vartheta = \begin{pmatrix} -R\cos\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\sin\vartheta\cos\varphi \\ -R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\vartheta \\ &= \begin{pmatrix} R^2\cos^2\vartheta\cos\varphi \\ R^2\cos^2\vartheta\sin\varphi \\ R^2\sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\vartheta \end{aligned}$$

tatsächlich nach aussen orientiert, wie verlangt. Ausserdem ist

$$\mathbf{F}(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v} = \operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Der Fluss ist also:

$$\begin{aligned}
\int_B \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\vec{o} \;&=\; \int_{\vartheta_0}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 2R^2 \sin\vartheta\cos\vartheta \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \\
&=\; 2\pi R^2 \int_{\vartheta_0}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \\
&=\; 2\pi R^2 \Big[-\cos^2\vartheta\Big]_{\vartheta_0}^{\frac{\pi}{2}} \\
&=\; 2\pi R^2\cos^2\vartheta_0 \;=\; 2\pi R^2\cdot\frac{d^2}{4R^2} \;=\; \frac{\pi d^2}{2}.
\end{aligned}$$

b) (Stokes): Da $\mathbf{v} = \operatorname{rot}\mathbf{F}$ gilt, bietet sich auch der Satz von Stokes zur Berechnung des Flusses durch B an. Sei γ die geschlossene Kurve, die B berandet. Der Satz von Stokes besagt:

$$\int_B \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\vec{o} = \int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Für γ wählen wir die Parametrisierung

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{2}\cos t \\ \frac{d}{2}\sin t \\ z_0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} t\in[0\,,\,2\pi) \\ z_0 = R\sin\vartheta_0 \;:\; \text{feste Abschneidhöhe.} \end{array}$$

γ umläuft die Ballonoberfläche im mathematisch positiven Sinn, d. h. wir werden am Ende der Rechnung das richtige Vorzeichen erhalten. Der Fluss berechnet sich folglich zu

$$\begin{aligned}
\int_B \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\vec{o} \;&=\; \int_B \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\vec{o} = \int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\mathrm{d}t = \\
&=\; \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\frac{d}{2}\sin t \\ \frac{d}{2}\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{d}{2}\sin t \\ \frac{d}{2}\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \\
&=\; \int_0^{2\pi} \frac{d^2}{4}\mathrm{d}t = \frac{\pi d^2}{2}.
\end{aligned}$$

c) (Gauss): Sei D der kreisförmige "Deckel", der den Ballon verschliesst, und sei G das Innere der durch $B\cup D$ gebildeten geschlossenen Fläche. Der Gausssche Integralsatz besagt:

$$\int_B \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\vec{o} + \int_D \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\vec{o} = \int_{B\cup D} \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\vec{o} = \int_G \operatorname{div}\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0.$$

Wir berechnen den Fluss durch D mittels der Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z_0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} r \in [0\,,\,\frac{d}{2}] \\ \varphi \in [0\,,\,2\pi) \\ z_0 = R\sin\vartheta_0 \;:\; \text{feste Abschneidhöhe.} \end{array}$$

Deren vektorielles Flächenelement

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{o} &= \frac{\partial T}{\partial\varphi} \times \frac{\partial T}{\partial r}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r\sin^2\varphi - r\cos^2\varphi \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \end{aligned}$$

ist ebenfalls auf den Gesamtballon bezogen nach aussen gerichtet, wie es sein muss. Der Fluss durch D ist also:

$$\begin{aligned} \int_D \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\vec{o} &= \int_0^{\frac{d}{2}}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^{\frac{d}{2}}\int_0^{2\pi} -2r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= -4\pi\int_0^{\frac{d}{2}} r\,\mathrm{d}r = -4\pi\,\frac{r^2}{2}\bigg|_0^{\frac{d}{2}} \\ &= \frac{-4\pi d^2}{8} = -\frac{\pi d^2}{2}. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Gauss ist der Fluss durch D *und* den Ballon gleich 0, also ist der Fluss durch den Ballon:

$$\int_B \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\vec{o} \;=\; -\int_D \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\vec{o} \;=\; \frac{\pi d^2}{2}.$$