Serie 6

1. Es seien $f_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$-messbare Funktionen ($k \in \mathbb{N}$). Es gelte

$$\mathcal{L}^n(\{x\,;\, |f_k(x) - f_{k+1}(x)| > 2^{-k}\}) < 2^{-k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeige: Der Limes $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ existiert fast überall.

2. Cantor-Lebesgue-Funktion: Betrachte die Cantormenge C aus der Vorlesung mit der Wahl $\gamma_k := 3^{-k}$, d.h. $C = [0,1] \setminus \Omega$ mit

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{2^{k-1}} \Omega_l^{(k)}\ ,$$

wobei $\Omega_l^{(k)}$ die zentrierten Teilintervalle der Länge γ_k sind und $I_l^{(k)}$ die Intervalle, welche nach dem Herausschneiden der $\Omega_l^{(k)}$ im k-ten Schritt übrigbleiben. Definiere für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Funktion $f_k : [0,1] \to [0,1]$ durch

$$f_k(x) := \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x = 1 \\ (2j-1)2^{-l}, & x \in \overline{\Omega_j^{(l)}}, l \le k \\ \text{linear zwischen den Endpunkten} & , x \in I_j^{(k)} \end{cases},$$

siehe Abbildung 1 auf der folgenden Seite.

a) Zeige, dass die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen eine stetige, monoton steigende Funktion f konvergiert, welche zudem auf $[0,1] \setminus C$ differenzierbar ist mit Ableitung null.

b) Finde eine $\mathcal{L}^1$-messbare Funktion $g : [0,1] \to [0,1]$ und eine $\mathcal{L}^1$-messbare Menge $E \subset [0,1]$, so dass $g^{-1}(E)$ nicht $\mathcal{L}^1$-messbar ist.

c) Finde ein Beispiel zweier $\mathcal{L}^1$-messbaren Funktionen $g, h : [0,1] \to [0,1]$, so dass $h \circ g$ nicht $\mathcal{L}^1$-messbar ist.

d) Zeige: Nicht jede $\mathcal{L}^1$-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist eine Borelmenge.

Bitte wenden!

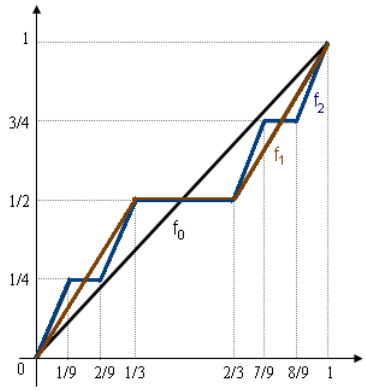

Abbildung 1: Konstruktion der Cantor-Lebesgue-Funktion (aus “Cantor function” Wikipedia)

3. Es sei f eine endliche, μ-messbare Funktion, und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge μ-messbarer Funktionen mit folgender Eigenschaft: Jede Teilfolge $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ enthält eine weitere Teilfolge, die im Mass μ gegen f konvergiert.

a) Zeige, dass dann die gesamte Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ im Mass μ gegen f konvergiert.

b) Zeige, dass die analoge Aussage nicht gilt, wenn man Masskonvergenz durch punktweise Konvergenz μ-fast überall ersetzt.

4. Gegenbeispiel zu $\delta = 0$ im Satz von Lusin: Finde ein Beispiel einer $\mathcal{L}^1$-messbaren Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ mit der Eigenschaft, dass für alle $M \subset [0,1]$ $\mathcal{L}^1$-messbar mit $\mathcal{L}^1(M) = \mathcal{L}^1([0,1]) = 1$ die eingeschränkte Funktion $f|_M : M \to \mathbb{R}$ nicht in allen Punkten von M stetig ist.
Hinweis: Verwende die Menge aus Serie 3, Aufgabe 3.

Abgabe: In der Übung vom 11. April 2013.