Lösung Ferienserie

1. Sei A_n die gegebene Matrix, also

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n & n-1 & 1 & & 1 \\ n & n-1 & n-2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 \quad 1 \end{pmatrix}.$$

1. Spalte - n. Spalte ergibt

$$\det A_n = \det \begin{pmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & n-1 & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & n-1 & & 1 \end{pmatrix} = (1-n) \det A_{n-1}.$$

Also $\det A_n = (-1)^{n-1}(n-1)!$.

2. Man bemerkt, daß für die Standardbasis (e_1, e_2, e_3),

$$e_1 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3), \quad e_2 = \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \quad \text{und} \quad e_3 = \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3)$$

gilt. Somit bilden ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 eine Basis für $\mathbb{R}^3$. Das Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$, für welches ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 eine orthonormale Basis bilden ist durch die Gleichungen

$$\langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j, \end{cases}$$

$i, j = \{1, 2, 3\}$, eindeutig bestimmt. Die Matrix, die dieses Sklarprodukt bezüglich der Standardbasis ausdrückt, ist somit

$$A = \big(\langle e_i, e_j \rangle\big)_{i,j=1,\ldots,4} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. $$\text{Rang} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix} = \text{Rang} \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Bitte wenden!

4. $E^{(kl)} := \left(\delta_{ik}\delta_{jl}\right) \in M(n \times n, \mathbb{R})$.

a) $\left(E^{(kl)}\right)_{k,l=1,\ldots,n}$ ist Basis von $M(n \times n, \mathbb{R})$. Also: $\dim M(n \times n, \mathbb{R}) = n^2$.

b) $\left(E^{(kl)} + E^{(lk)}\right)_{1 \leq k \leq l \leq n}$ ist Basis von S. Also: $\dim S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

5. **a)** $\det \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 42 \neq 0$. Es gibt genau 1 Lösung.

b) $\left.\begin{array}{l} \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 1 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist Lösung} \end{array}\right\} \Longrightarrow \#\,\text{Lösungen} = 7.$

6. Für $p = 2$: $|\operatorname{GL}_2(\mathbb{F}_2)| = 6$.

Für $p \geqslant 3$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b(p-1) \\ c & d(p-1) \end{pmatrix}$$
$$\|$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c(p-1) & d(p-1) \end{pmatrix}$$

$\Longleftrightarrow\ b = c = 0$.
A invertierbar (mit $b = c = 0$) $\Longleftrightarrow\ a, d \in \mathbb{F}_p^\times$.
Die gesuchte Anzahl ist also $\left|\mathbb{F}_p^\times\right|^2 = (p-1)^2$.

7. (i) Wir berechnen

$$\phi_1(v_1) = -6 - 1 + 5 + 2 = 0, \quad \phi_2(v_1) = -7 - 2 + 6 + 1 + 2 = 0$$

also ist v_1 in V und

$$\phi_1(v_2) = -6 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 0, \quad \phi_2(v_2) = -7 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 0,$$

also liegt v_2 auch in V.

(ii) Definiere ein Vektor v_3 als

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Wegen

$$\phi_1(v_3) = -1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = 0, \quad \phi_2(v_3) = -2 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = 0$$

ist v_3 in V. Wir zeigen nun, dass v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig sind: Seien λ_1, λ_2 und λ_3 reelle Zahlen, so dass

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

Siehe nächstes Blatt!

gilt. Dies ist äquivalent zu

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & & & = & 0, \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0, \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0, \\ \lambda_1 & & & & & = & 0, \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & 0. \end{array}$$

Aus der vierte Gleichung wissen wir, dass λ_1 gleich Null ist, also folgt jetzt aus der erster und zweiter Gleichungen, dass auch λ_2 und λ_3 gleich Null sind. Die Vektoren $\{v_1, v_2, v_3\}$ sind also linear unabhängig. Wir müssen noch zeigen, dass $\{v_1, v_2, v_3\}$ der Unterraum V erzeugen oder äquivalenterweise, dass die Dimension von V kleiner gleich 3 ist. Es gilt, für $i = 1$ oder 2, dass

$$\mathrm{DimKer}(\phi_i) = 5 - \mathrm{DimIm}(\phi_i) = 5 - 1 = 4.$$

Da ϕ_1 und ϕ_2 verschiedene Kerne haben (sonst würden sich ϕ_1 und ϕ_2 um einen Skalar unterscheiden) ist die Dimension von $V = \mathrm{Ker}(\phi_1) \cap \mathrm{Ker}(\phi_2)$ kleiner gleich 3.

(iii) Wir normieren zuerst den Vektor v_1 und erhalten

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ein Vektor in V der orthogonal zu v_1 ist, kriegt man als

$$\begin{aligned} \tilde{u_2} &= v_2 - < u_1, v_2 > u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}}(2+2+1)\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und man normiert ihn noch:

$$u_2 = \frac{\tilde{u_2}}{\|\tilde{u_2}\|^2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da $< u_1, v_3 > = < u_2, v_3 > = 0$ ist v_3 orthogonal zu v_1 und v_2. Wir müssen v_3 noch normalisieren:

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Die Menge $\{u_1, u_2, u_3\}$ ist eine orthonormale Basis von V.

Bitte wenden!

8. (i) Der Vektorraum V hat Dimension 4 und folgende Basis: $\{x^3, x^2, x, 1\}$. Bezüglich dieser Basis schreibt man p_1, p_2, p_3 und p_4 in Koordinaten als

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die p_i's bilden also genau dann eine Basis wann der Determinant der Matriz

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ungleich Null ist. Entweder beobachtet man das die Untermatriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ von Vandermondesche Typ ist (und hat also ungleich Null Determinant), oder berechnen wir:

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(M) &= -7 \cdot \mathrm{Det} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -7 \cdot \mathrm{Det} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -7 \cdot \mathrm{Det} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = +14. \end{aligned}$$

(ii) Die Abbildung F ist linear, da

- $F(\lambda p(x)) = x\frac{d(\lambda p(x))}{dx} = \lambda x \frac{dp(x)}{dx} = \lambda F(p(x))$, für alle λ in $\mathbb{R}$ und $p(x)$ in V,
- $F(p(x) + q(x)) = \frac{d(p(x)+q(x))}{dx} = \frac{dp(x)}{dx} + \frac{dq(x)}{dx} = F(p(x)) + F(q(x))$ für alle $p(x)$ und $q(x)$ in V.

Die lineare Abbildung F ist kein Vektorraumisomorphismus, da die konstanten Polynome im Kern von F liegen.

(iii) Man berechnet

$$\begin{aligned} F(p_1) &= p_3 + p_4, \\ F(p_2) &= p_3, \\ F(p_3) &= p_4 \quad \text{und} \\ F(p_4) &= 6p_2 - 11p_3 + 6p_4, \end{aligned}$$

also ist die Matrix von F bzgl. dieser Basis:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & -11 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

und da diese Matrix klarerweise Determinant gleich Null hat, zeigt dies noch Mals, das F kein Vektorraumisomorphismus ist.

Siehe nächstes Blatt!

9. Die Abbildungen f_0, f_1, f_2, f_3 sind offensichtlich Linearformen auf V. Sei $B^* = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ die zu $(1, t, t^2, t^3)$ duale Basis von V^*. In der Basis B^* ausgedrckt, haben wir

$$(f_0)^{B^*} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad (f_1)^{B^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (f_2)^{B^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (f_3)^{B^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Da fr die Matrix $S = \left((f_0)^{B^*}\,(f_1)^{B^*}\,(f_2)^{B^*}\,(f_3)^{B^*}\right)$, die Determinante $\det S = 12 \neq 0$ ist, ist (f_0, f_1, f_2, f_3) eine Basis von V^*. Da $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, haben wir

$$e_0 = f_0 - \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{12}f_2 \qquad e_1 = f_1 - \frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{12}f_3$$
$$e_2 = \frac{1}{2}f_2 - \frac{1}{4}f_3 \qquad e_3 = \frac{1}{6}f_3.$$

10. Online-Abgabe Mehrere Antworten können richtig sein.

Frage 1

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

◯ Seien $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ und $v \in \mathbb{C}^n$ so, dass $(v, \mathcal{A}v, \mathcal{A}^2v, \ldots, \mathcal{A}^{n-1}v)$ eine Basis von $\mathbb{C}^n$ ist. Dann ist $\mathcal{A}$ ein Isomorphismus.

Falsch: z. B. $n = 1$, $\mathcal{A} = 0$.

◯ Betrachten Sie $V \times W$ mit der Vektorraumstruktur: $\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w), (v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$. Seien $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Basis von V und $(f_1, \ldots, f_n)$ eine Basis von W. Dann ist $\left\{(e_i, f_j) \;\middle|\; 1 \leq i, j \leq n\right\}$ eine Basis von $V \times W$.

Falsch: Eine Basis von $V \times W$ ist $(e_1, 0), \ldots, (e_n, 0), (0, f_1), \ldots, (0, f_n)$ und $\dim(V \times W) = \dim V + \dim W \overset{\text{i.a.}}{\neq} (\dim V)(\dim W)$.

Bitte wenden!

Frage 2

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

◯ Der Rang einer Dreiecksmatrix ist gleich der Anzahl der von 0 verschiedenen Diagonalelemente.

Falsch: $\mathrm{Rang}\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right) \neq 0$.

◯ Es gibt $A, B \in M(n \times n, \mathbb{C})$ mit AB nilpotent und BA nicht nilpotent. [$N \in M(n \times n, \mathbb{C})$ heisst *nilpotent*, falls eine positive ganze Zahl m existiert mit $N^m = 0$.]

Falsch: $(AB)^m = 0 \Longrightarrow (BA)^{m+1} = B(AB)^m A = 0$.

◯ Für alle $A, B \in M(n \times n, \mathbb{C})$ gilt $\mathrm{Rang}(AB) = \mathrm{Rang}(BA)$.

Falsch: $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$ hat Rang 1, aber $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$ hat Rang 0.

Frage 3

Welche der folgende Systeme von Vektoren sind linear unabhängig in $\mathbb{R}^3$?

√ ◯ $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$

◯ $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,0)$

◯ $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$

√ ◯ $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$

◯ $(1,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,0,1)$

Frage 4

Sei V ein Vektorraum über dem Körper K, $v, w \in V$ und $a, b \in K \setminus \{0\}$. Dann gilt:

◯ $(a+b) \cdot (v+w) = av + bw$

√ ◯ $(a+b)v + (a+b)w = a(v+w) + b(v+w)$

√ ◯ $a(a^{-1}v + b^{-1}w) = v + ab^{-1}w$

√ ◯ $av + bw = bw + av$

◯ $av + bw = aw + bv$

Siehe nächstes Blatt!

Frage 5

Seien V, W endlich dimensionale Vektorräume über einem Körper K. Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung und $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Dann gilt:

◯ $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ sind linear unabhängig, wenn F surjektiv ist

√ ◯ $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ sind linear unabhängig, wenn F injektiv ist

√ ◯ $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ bilden ein Erzeugendensystem, wenn F surjektiv ist

◯ $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ bilden ein Erzeugendensystem, wenn F injektiv ist

√ ◯ $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ bilden eine Basis genau dann, wenn F ein Isomorphismus ist.

Frage 6

Sei A eine reelle 2×2-Matrix, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die zugehörige lineare Abbildung. Dann ist

◯ $\dim \operatorname{Ker} F = 2 - \det A$

√ ◯ $\dim \operatorname{Ker} F = 1 \Longrightarrow \det A = 0$

◯ $\dim \operatorname{Ker} F = 1 \Longrightarrow \det A = 1$

√ ◯ $\dim \operatorname{Ker} F = 2 - \operatorname{Rang} F$

√ ◯ $\dim \operatorname{Ker} F = 2 \Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$