Serie 10

Abgabe: Am Freitag, der 10. Mai 2013 in den Übungen.

Einsendeschluss für die Online Aufgabe: Freitag, der 10. Mai, 11.55 Uhr.

1. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Bestimme die Jordansche Normalform von A und eine zugehörige Jordan-Basis von $\mathbb{R}^5$.

2. **a)** Gib für $1 \leq \alpha \leq 5$ je eine komplexe 5×5-Matrix an, die das Minimalpolynom $(t-1)^\alpha$ hat.

b) Sei B eine komplexe 5×5-Matrix mit charakteristischem Polynom $(t-3)^2(t+5)^3$ und Minimalpolynom $(t-3)(t+5)^2$. Bestimme die möglichen Jordan-Normalformen von B.

3. Sei s eine nicht ausgeartete Bilinearform auf einem Vektorraum V. Eine Selbstabbildung $F \in \mathrm{End}(V)$ heisst Isometrie, falls für alle $v, w \in V$ gilt

$$s\left(F(v), F(w)\right) = s\left(v, w\right).$$

a) Beweise, dass jede Isometrie injektiv ist. Folgere, dass für V endlichdimensional, F sogar bijektiv sein muss.

b) Sei $V = \mathbb{R}^n$ und $s(\cdot,\cdot) = \langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt. Beweise, dass jede orthogonale Matrix eine Isometrie von $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ darstellt.

c) Sei (M, s) der Minkowskiraum: $M = \mathbb{R}^4$ mit Koordinaten (x, y, z, t), und

$$s\left((x,y,z,t),(x',y',z',t')\right) = xx' + yy' + zz' - tt'.$$

Beweise, dass folgende Endomorphismen Isometrien von (M, s) sind:

Bitte wenden!

- $A = \left(\begin{array}{c|c} O & 0 \\ \hline 0 & \pm 1 \end{array}\right)$ mit $O \in O(3)$ Orthogonal.
- Ein Lorentzboost in x-Richtung, und Geschwindigkeit $v < c = 1$:

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & & & -v\gamma \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -v\gamma & & & \gamma \end{pmatrix}$$

Wobei $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$.

d) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ der Euklidische Vektorraum aus Serie 5 Aufgabe 3:

$$V = \{(x_i)_{i \geq 0} \mid x_i \in \mathbb{R}, x_i = 0 \text{ ausser für endlich viele } i\},$$
$$\langle (x_i), (y_i) \rangle = \sum x_i y_i \,.$$

Zeige dass der Endomorphismus $(x_0, x_1, \ldots) \mapsto (0, x_0, x_1, \ldots)$ eine Isometrie ist. Ist diese Injektiv? Surjektiv? Vergleiche mit **a)**.

4. Sei s eine Bilinearform auf einem reellem Vektorraum V. s heisst *reflexiv* falls aus $s(u, v) = 0$ für $u, v \in V$ folgt, dass $s(v, u) = 0$. Dann heissen u und v orthogonal bezüglich s. Man kann zeigen, dass eine Bilinearform genau dann reflexiv ist, wenn sie entweder symmetrisch oder alternierend ist.

a) Finde eine Bilinearform s auf $\mathbb{R}^2$ und $u, v \in \mathbb{R}^2$ mit $s(u, v) = 0$, $s(v, u) \neq 0$.

b) Sei jetzt s nicht ausgeartet und reflexiv, U ein Untervektorraum. Definiere $U^\perp = \{v \in V \mid \forall u \in U \colon s(u, v) = s(v, u) = 0\}$. Zeige, dass $U^\perp$ ein Untervektorraum ist.

c) Berechne $U^\perp$ für $U = \operatorname{Span}(e_1 + \alpha e_4)$ im 4-dimensionalen Minkowskiraum (M, s).

d) Beweise $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$.

Gilt $U \oplus U^\perp = V$?

Online-Abgabe. Mehrere Antworten können richtig sein.

Siehe nächstes Blatt!

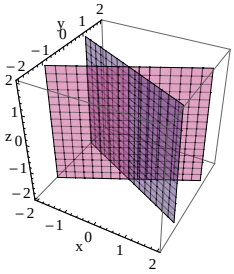
Frage 1

Sei s die Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

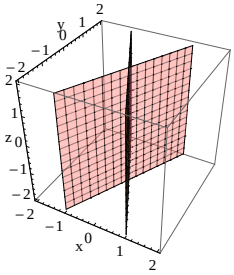
$$s((x,y,z),(x',y',z')) = xx' - 4yy'.$$

Welches der folgenden Bilder gibt eine Darstellung der Quadrik

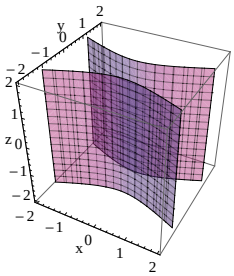
$$C_0 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid s(v,v) = 0\}?$$



○ 1



○ 2



○ 3

Bitte wenden!

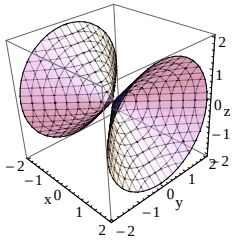
Frage 2

Sei s die Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

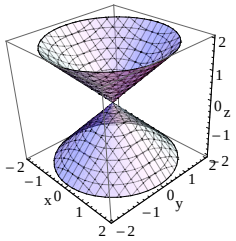
$$s((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + yy' - zz'.$$

Welches der folgenden Bilder gibt eine Darstellung der Quadrik

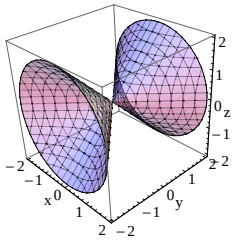
$$C_0 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid s(v,v) = 0\}?$$



○ 1



○ 2



○ 3

Siehe nächstes Blatt!

Frage 3

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Was ist das Minimalpolynom von A?

- ◯ $t - 7$.
- ◯ $(t-7)^2$.
- ◯ $(t-7)^3$.
- ◯ $(t-7)^4$.
- ◯ $(t-7)^5$.

Frage 4

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Was ist das Minimalpolynom von B?

- ◯ $t - 7$.
- ◯ $(t-7)^2$.
- ◯ $(t-7)^3$.
- ◯ $(t-7)^4$.
- ◯ $(t-7)^5$.

Bitte wenden!

Frage 5

Sei A die Matrix

$$\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$$

mit s Jordanblöcken J_i der Grösse l_i zum gleichen Eigenwert λ:

$$J_i = \left.\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}\right\} l_i \,.$$

Seien zudem:

$\mu = \dim H_\lambda(A)$ die algebraische Vielfachheit von λ,
$\nu = \dim E_\lambda(A)$ die geometrische Vielfachheit von λ,
r die Multiplizität von $(t-\lambda)$ im Minimalpolynom $m_a(t)$.

Welche Ausagen sind korrekt?

- ◯ $\nu \leq r \leq \mu$
- ◯ $\mu = \sum_{i=1}^{s} l_i$.
- ◯ $s = \nu$.
- ◯ $r = \max l_i$.