Serie 11

Abgabe: Am Freitag, der 17. Mai 2013 in den Übungen.

Einsendeschluss für die Online Aufgabe: Freitag, der 17. Mai, 11.55 Uhr.

1. Ist die quadratische Form

$$4x_1^2 - 12x_1x_2 + 12x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_4 - 4x_3x_4 + 3x_4^2$$

auf $\mathbb{R}^4$ positiv definit? ausgeartet? Was ist dessen Signatur? Verwende quadratische Ergänzung.

2. Sei V endlichdimensional. Ziel der Aufgabe ist folgende Aussage zu verstehen und zu beweisen :

„die Wahl einer nicht ausgearteten Bilinearform auf V entspricht eindeutig der Angabe eines Isomorphismus von V mit seinem Dualraum V^*. “

a) Beweise, dass für eine nicht ausgeartete Bilinearform s auf V,

$\Phi_s \colon V \to V^*, v \mapsto s(v, \cdot)$ ein wohldefinierter Isomorphismus ist.

b) Beweise, dass umgekehrt für einen gegebenen Isomorphismus $\Phi \colon V \xrightarrow{\sim} V^*$, $s_\Phi(v, w) = \Phi(v)(w)$ eine nicht ausgeartete Bilinearform V definiert.

Hinweis: Eine Bilineareform ist genau dann nicht ausgeartet, wenn der (linke) Ausartungraum $V_0 = \{v \in V \mid s(v, w) = 0 \text{ für alle } w \in V\}$ von s gleich $\{0\}$ ist.

c) Beweise das die obige Vorschriften zwei bijektive Abbildungen zwischen der Menge der Isomorophismen $V \xrightarrow{\sim} V^*$, und der Menge der nicht ausgearteten Bilinearformen auf V definieren. Es wird sehr oft so dargestellt:

$$\begin{array}{ccc} \{\text{ Isomorphismen } V \xrightarrow{\sim} V^*\} & \xleftrightarrow{1:1} & \{\text{ nicht ausgeartete Bilinearformen auf } V\} \\ & \Phi \longmapsto \Phi_s & \\ & s_\Phi \longleftarrow\!\shortmid\ s & \end{array}$$

Bitte wenden!

3. Seien

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Pauli-Matrizen (sie bilden eine Basis des Vektorraums der Hermiteschen spurfreien 2×2 Matrizen).

a) Verifiziere, dass $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \mathbf{1}_2$, $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = i\mathbf{1}_2$.

b) Leite daraus:

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2 &= -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3\,, \\ \sigma_2\sigma_3 &= -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1\,, \\ \sigma_3\sigma_1 &= -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2\,. \end{aligned}$$

c) Für $x \in \mathbb{R}^3$ sei $x \cdot \sigma = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3$. Zeige

$$(x \cdot \sigma)(y \cdot \sigma) = x \cdot y\mathbf{1}_2 + i(x \times y) \cdot \sigma\,,$$

wobei $x \cdot y$, $x \times y$ das Skalar- bzw. Vektorprodukt auf $\mathbb{R}^3$ bezeichnen.

4. Bei einer chemischen Kettenreaktion entsteht aus einem Stoff A ein Zwischenprodukt B, das wiederum ein Produkt C erzeugt:

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C.$$

Die Zeitevolution der Konzentrationen $a(t), b(t), c(t)$ wird durch die Differenzialgleichungen

$$\dot{a} = -k_1 a, \quad \dot{b} = k_1 a - k_2 b, \quad \dot{c} = k_2 b,$$

beschrieben ($\dot{} = \frac{d}{dt}$). Die Reaktionsgeschwindigkeiten k_1, k_2 sind positive Konstanten.

a) Schreibe das System in der Form $\dot{x} = Ax$ und geben Sie eine explizite Formel für die Lösung $x(t) = \exp(At)x_0$ des Anfangswertproblems, insbesondere für $k_1 = k_2$.

Hinweis: Zeige und verwende, dass $a + b + c$ zeitunabhängig ist. x kann man daher zweidimensional wählen.

b) Geben Sie eine graphische Darstellung von $a(t), b(t)$ und $c(t)$ für die Anfangsbedingung $a(0) = 1, b(0) = c(0) = 0$ und repräsentative Werte von k_1, k_2.

Online-Abgabe. Mehrere Antworten können richtig sein.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 1

Betrachte die quadratische Form auf $\mathbb{Q}^2$:

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_2^2 = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x}\,, \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{Q}^2$, B die Darstellungsmatrix von Q bezüglich $\mathcal{B}$. Also existiert eine Transformationsmatrix $T = T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Q})$ mit $B = T^{\mathrm{T}} A T$.

- ◯ Es gilt immer $\det A = \det B$.
- ◯ Es gibt $\lambda \in \mathbb{Q}$, mit $\det A = \lambda^2 \det B$.
- ◯ Es gibt $\mathcal{B}$ so, dass $Q(x_1, x_2) = y_1^2 - y_2^2$, wo (y_1, y_2) die Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}$ sind.

Frage 2

Betrachte auf K^2 die quadratische Form:

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_2^2\,.$$

Gibt es Koordinaten (y_1, y_2) so, dass ...

- ◯ $Q(x_1, x_2) = y_1^2 - y_2^2$, für $K = \mathbb{Q}$?
- ◯ $Q(x_1, x_2) = y_1^2 - y_2^2$, für $K = \mathbb{R}$?
- ◯ $Q(x_1, x_2) = y_1^2 + y_2^2$, für $K = \mathbb{R}$?
- ◯ $Q(x_1, x_2) = y_1^2 - y_2^2$, für $K = \mathbb{C}$?
- ◯ $Q(x_1, x_2) = y_1^2 + y_2^2$, für $K = \mathbb{C}$?

Bitte wenden!

Frage 3

Betrachte auf K^2 die quadratische Form:

$$Q(x_1, x_2) = x_1 x_2 \,.$$

Gibt es Koordinaten (y_1, y_2) so, dass ...

- ◯ $Q(x_1, x_2) = y_1^2 - y_2^2$, für $K = \mathbb{R}$?
- ◯ $Q(x_1, x_2) = y_1^2 + y_2^2$, für $K = \mathbb{R}$?
- ◯ $Q(x_1, x_2) = y_1^2 - y_2^2$, für $K = \mathbb{C}$?
- ◯ $Q(x_1, x_2) = y_1^2 + y_2^2$, für $K = \mathbb{C}$?