Ferienserie

Abgabe: Mittwoch, der 28. Mai 2013 in den Fächli, falls für das Testat erforderlich.

Kein Einsendeschluss für die MC Aufgaben.

Alle Aufgaben stammen aus alten Prüfungen.

1. Finde eine Matrix $R \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ so, dass $R^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt, oder zeige, dass keine solche Matrix R existiert.

2. Sei $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ mit Spaltenvektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$. Es bezeichne $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^2$. Zeige, dass

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \det A \cdot (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2).$$

3. Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ ist

$$x_1^2 + (t-1)x_2^2 + 4x_3^2 - (t-1)^2 x_4^2 + 4x_1x_3 + 2(t-1)x_2x_4 \ \geq \ 0$$

für alle $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$?

4. Wir definieren durch die folgenden Rekursionsformeln zwei reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} x_0 = y_0 = 1, \quad x_{n+1} &= -2x_n - 2y_n \\ y_{n+1} &= \ \ 5x_n + 4y_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Man berechne x_n und y_n als Funktion von n.

Bitte wenden!

5. Man finde die Eigenwerte und Eigenräume folgender Matrizen, und gebe jeweils an, ob sie trigonalisierbar oder diagonalisierbar sind:

$$A = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 & 2-2i \\ -3 & 2 & 4 \\ -2+2i & 0 & 5-2i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}) \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

6. Sei $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist A positiv definit?

7. Bestimme die Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$ im Polynom $p(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ so, dass für die invertierbare reelle 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt $A^{-1} = p(A)$.

8. Seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} - \{0\}$. Beweise: Die symmetrische reelle Matrix $J = \begin{pmatrix} a_0 & b_1 & & \text{\Large 0} \\ b_1 & a_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_n \\ \text{\Large 0} & & b_n & a_n \end{pmatrix}$ ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$ mit $\lambda_0 < \cdots < \lambda_n$. (Man beachte die strikten Ungleichungen, also nicht bloss $\lambda_0 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.)

9. Sei $A = (a_{ij}) \in O(n)$ eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie:

$$|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}| \leq n.$$

Hinweis: $a_{ij} =< e_i, A(e_j) >$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^n$.

Siehe nächstes Blatt!

10. Seien $a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen mit $a_1 \neq 0$ und $M \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_n \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_{n-1} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie den Rang von M und folgern Sie, dass das charakteristische Polynom $\chi_M(x)$ von M durch x^{n-1} teilbar ist.

b) Berechnen Sie mittels Induktion das charakteristische Polynom von M.

c) Ist M diagonalisierbar?

11. Gegeben sei die Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$A = (a_{ij}).$$

1. Zeigen Sie, dass reelle Zahlen r und s existieren, die nur von A abhängig sind, so dass

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - x & a_{12} - x & \ldots & a_{1n} - x \\ a_{21} - x & a_{22} - x & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} - x & a_{n2} - x & \ldots & a_{nn} - x \end{pmatrix} = rx + s.$$

(Tipp: Benützen Sie elementare Zeilenoperationen.)

2. Berechnen Sie damit für $a \neq b$

$$\det \begin{pmatrix} c_1 & a & a & . & . & a \\ b & c_2 & a & . & . & a \\ b & b & c_3 & . & . & a \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & c_{n-1} & a \\ b & . & . & . & b & c_n \end{pmatrix}$$

12. Sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $n > 1$, eine Matrix mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda_1| > |\lambda_i| \ \forall\, i > 1$. Gib eine notwendige und hinreichende Bedingung für $v \in \mathbb{R}^n$, dass die Folge

$$\left\{ \left(\frac{1}{\lambda_1} A \right)^k v \right\}_{k \geq 1}$$

gegen einen Eigenvektor von A konvergiert.

Online-Abgabe. Mehrere Antworten können richtig sein.

Bitte wenden!

Frage 1

Welche der folgender Aussagen über $V = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$ sind korrekt?

- ◯ $\dim V = 5$.
- ◯ $\dim V = 6$.
- ◯ $e_i \otimes 0$, $0 \otimes e_j$ bilden eine Basis von V.
- ◯ $e_i \otimes e_j$ bilden eine Basis von V.

Frage 2

Welche der folgender Aussagen über $V = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^3$ sind korrekt?

- ◯ $\dim V = 5$.
- ◯ $\dim V = 6$.
- ◯ $(e_i, 0)$, $(0, e_j)$ bilden eine Basis von V.
- ◯ (e_i, e_j) bilden eine Basis von V.

Frage 3

Sei $A = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. Ist die reelle Matrix A diagonalisierbar über $\mathbb{R}$?

- ◯ Ja.
- ◯ Nein.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 4

Seien $x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{C}$, $A = (a_{ij})$ mit $a_{i,i+1} = x_i$, $a_{ij} = 0$ für $j - i \neq 1$. Dann gilt:

- ◯ Die Singulärwerte sind $|x_1|, \ldots |x_{n-1}|$.
- ◯ Die Standardbasisvektoren $e_1, \ldots, e_n$ bilden eine Orthonormalbasis von rechten und linken Singulärvektoren.
- ◯ A hat eine SVZ $A = VDU^*$ mit $V = \mathrm{diag}(\frac{x_1}{|x_1|}, \ldots \frac{x_{n-1}}{|x_{n-1}|}, 1)$, und U hat Spalten $e_2, \ldots, e_n, e_1$.
- ◯ A hat keine SVZ da sie nicht diagonalisierbar ist.

Frage 5

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Das Minimalpolynom von A ist:

- ◯ ein Teiler von $(t-9)^6$.
- ◯ $(t-9)^3$.
- ◯ $(t-9)^2$.
- ◯ $(t-9)$.

Bitte wenden!

Frage 6

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Das Minimalpolynom von A ist:

- ◯ ein Teiler von $(t-9)^6$.
- ◯ $(t-9)^4$.
- ◯ $(t-3)^3$.
- ◯ $(t-9)$.

Frage 7

Sei $s\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf einem reellem Vektorraum V. Seien $v, w \in V \setminus \{0\}$, dann ist $s(v,w) \neq 0$.

- ◯ Wahr.
- ◯ Falsch.

Frage 8

Sei $s\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf einem reellem Vektorraum V. Welche Aussagen sind korrekt?

- ◯ s ist ein Skalarprodukt auf V.
- ◯ Aus $v \neq 0$ folgt $s(v,v) = 0$
- ◯ Aus $v \neq 0, w \neq 0$ folgt $s(v,w) \neq 0$.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 9

Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Welche Aussagen sind korrekt?

- ◯ 4 ist der einzige Eigenwert.
- ◯ Die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 4 ist 2.
- ◯ Die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes 4 ist 2.
- ◯ Die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes 4 ist 1.
- ◯ Der Eigenraum $E_4(A)$ zum Eigenwert 4 ist $E_4(A) = \mathbb{R}^2$.
- ◯ Der Hauptraum $H_4(A)$ zum Eigenwert 4 ist $H_4(A) = \mathbb{R}^2$.

Frage 10

Welcher der folgenden Polynome sind Teiler von:

$$p(t) = (t-2)^2(t+1)^7(t-1)^3 \in \mathbb{C}[t]\,.$$

- ◯ $\lambda(t-2)^\alpha(t+1)^\beta(t-1)^\gamma$, wo $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$, $\alpha \leq 2$, $\beta \leq 7$, $\gamma \leq 3$.
- ◯ $1 - t^2$.
- ◯ $1 + t^2$.
- ◯ 0.
- ◯ $2t^3 - 5t^2 + t$.

Bitte wenden!

Frage 11

Welche der folgenden komplexen Matrizen sind unitär?

- ◯ Eine $n \times n$ Matrix dessen Spalten eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$ bilden.
- ◯ $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.
- ◯ $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.
- ◯ $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ◯ $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$.
- ◯ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- ◯ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 12

Welche der folgenden komplexen Matrizen sind hermitesch?

○ $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

○ $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$.

○ $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$.

○ $\begin{pmatrix} 2 & 5+3i \\ 5-3i & 7 \end{pmatrix}$.

○ $\begin{pmatrix} 3 & i & 1 \\ 2 & 1 & -i \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

○ $\begin{pmatrix} 1 & i & 6+i \\ -i & 0 & 7 \\ 6-i & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

Frage 13

Sei V ein K-Vektorraum, $0 \neq v \in V$. Dann gibt es ein $\alpha \in V^*$ mit $\alpha(v) \neq 0$.

○ Wahr.

○ Falsch.

Bitte wenden!

Frage 14

Betrachte die Basis

$$p_0 = \frac{1}{2}(t-1)(t-2)\,, \quad p_1 = -t(t-1)\,, \quad p_2 = \frac{1}{2}t(t-1)$$

von $V = P_2(\mathbb{R})$, die reellen Polynome von Grad kleiner gleich 2. Dann bildet $\alpha_i \in V^*$, $\alpha_i(p) = p(i)$, $i = 0, 1, 2$ die zugehörige Dualbasis von V^*

- ◯ Wahr.
- ◯ Falsch.

Frage 15

Seien V (bzw. W) $\mathbb{C}$-Vektoräume der Dimension 2 (bzw. 3). Sei $F\colon V \to W$ linear. Bezüglich Basen ist F gegeben durch eine 3×2 Matrix A. Was ist die zu F duale Abbildung?

- ◯ $F^*\colon V^* \to W^*$ gegeben bezüglich der Dualbasen durch die Matrix A^T
- ◯ $F^*\colon V^* \to W^*$ gegeben bezüglich der Dualbasen durch die Matrix $(A^T)^{-1}$
- ◯ $F^*\colon W^* \to V^*$ gegeben bezüglich der Dualbasen durch die Matrix A^T
- ◯ $F^*\colon W^* \to V^*$ gegeben bezüglich der Dualbasen durch die Matrix $\overline{A}^T$

Siehe nächstes Blatt!

Frage 16

Die Wahl der (geordneten) Basis

$$(e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2)$$

von $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ gibt einen Isomorphismus $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^4$ ($e_1 \otimes e_2 \leftrightarrow e_1$,$e_1 \otimes e_2 \leftrightarrow e_2$,...)
Was sind die Koordinaten von $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis ?

○ $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

○ $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Frage 17

Die komplexe $n \times n$ Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom mit dem Minimalpolynom übereinstimmt.

○ Wahr.

○ Falsch.

Frage 18

Die komplexe $n \times n$ Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn

$$E_\lambda = H_\lambda$$

für alle Eigenwerte λ, wo E_λ bzw. H_λ die Eigen- bzw. Haupträume sind.

○ Wahr.

○ Falsch.

Bitte wenden!

Frage 19

Jede A normale **reelle** $n \times n$ Matrix besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

- ◯ Wahr.
- ◯ Falsch.