Serie 2

Abgabe: Am Freitag, der 8. März 2013 in den Übungen.

Die MC Aufgaben erscheinen verspätet am Montag, schriftliche abgabe möglich. Einsendeschluss für die Online Aufgabe: Freitag, der 8. März 2013, 11.59 Uhr.

1. Das *charakteristische Polynom* $P_A(\lambda)$ einer Matrix A ist definiert durch

$$\chi_A(\lambda) := \det(\lambda \cdot \mathbf{1} - A).$$

Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$

c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$

2. Faktorisieren Sie folgende Polynome in $\mathbb{R}[t]$ und $\mathbb{C}[t]$:

a) $t^5 - t$ (Zusatzaufgabe: das gleiche in $\mathbb{F}_5[t]$)

b) $t^4 + t^3 + t - 1$ (Hinweis: rate eine komplexe Nullstelle...)

Bitte wenden!

3. **a)** Sei V ein $\mathbb{R}$ Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $f^2 = \mathbf{1}$. Beweisen Sie, dass f nur die Eigenwerte 1 oder -1 haben kann.

b) Sei $f : M(n \times n, \mathbb{R}) \to M(n \times n, \mathbb{R}), A \mapsto A^{\mathrm{T}}$. Finden Sie die Eigenwerte von f, und beschreiben sie die Eigenräume. Können Sie eine Basis von $M(n \times n, \mathbb{R})$ angeben, die aus Eigenvektoren besteht?

4. Führen Sie die folgende Polynomdivision mit Rest durch:

$$(t^6 + t^5 - t^3 - 2t^2 + t + 1) \ : \ (t^2 - 1)$$

---

5. Online-Abgabe. Mehrere Antworten können richtig sein.

Frage 1

Sei A die Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ○ $(2, 2, -3, -1)^{\mathrm{T}}$ ist ein Eigenvektor von A
- ○ $(3, 3, 3, -4)^{\mathrm{T}}$ ist ein Eigenvektor von A
- ○ A hat den Eigenwert $6 = 2 + 0 + 1 + 3$
- ○ Der Eigenraum E_1 zum Eigenwert 1 hat dimension 2.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 2

Sei A eine nilpotente Matrix: $A^n = 0$ für ein $n > 0$. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

◯ A hat keine Eigenwerte

◯ Der einzig mögliche Eigenwert ist 0

◯ 0 ist ein Eigenwert von A

Frage 3

Sei A eine komplexe $n \times n$ Matrix, $(v_1, \ldots, v_n)$ ein Basis aus Eigenvektoren. Dann sind alle Vektoren in $\mathbb{C}^n$ Eigenvektoren

◯ Wahr

◯ Falsch.

Frage 4

Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an

◯ $(t-2)$ ist kein Teiler von $t(t+1)$ (K beliebig)

◯ $(2t-2)$ ist ein Teiler von $t^4 + 2t^3 - 2t^2 - 3t + 2$ (über $\mathbb{Q}$)

◯ i ist ein Teiler von $2t^5 - 3t^4 + 2t - 1$ (über $\mathbb{C}$)

◯ i und somit auch $-i$ sind Nullstellen von $2t^4 + it^3 + 2t^2 - 1$ (in $\mathbb{C}$)

◯ Die Polymondivision von $t^6 + t^4 + t^2 + 1$ durch $t - 2$ hat Rest 85, (über $\mathbb{R}$)