D-MATH, D-PHYS, D-CHAB Lineare Algebra II FS 13
Prof. Dr. Giovanni Felder

Serie 3

Abgabe: Am Freitag, der 15. März 2013 in den Übungen.

Einsendeschluss für die Online Aufgabe: Freitag, der 15. März , 11.59 Uhr.

1. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -20 \\ 0 & 4 & -9 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

diagonalisierbar ist. Bestimmen Sie eine zu A ähnliche Diagonalmatrix $B = P^{-1}AP$ mit $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ und geben Sie P, P^{-1} explizit an.

2. Sei $V = P_n(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grade $\leq n$. Welche der folgenden Abbildungen $V \to V$ sind linear? Berechnen Sie gegebenfalls Eigenwerte und Eigenräume. Welche Abbildungen sind diagonalisierbar?

a) $p \longmapsto \dfrac{d}{dt} p = p'$

b) $p \longmapsto t \cdot p'$

c) $p(t) \longmapsto p(1-t)$ (nur für $n = 3$)

3. **a)** Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ für beliebiges n.

b) Sei (f_k) die Fibonacci Folge: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$, für $k \geq 2$. Beweisen Sie mit a) die explizite Darstellung:

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Bitte wenden!

4. Sei P ein komplexes Polymon. Sei $P^{(k)}$ die k-te Ableitung von P. Sei α eine Nullstelle von P. Beweisen Sie, dass die Multiplizität von P in α genau dann l ist, wenn $P^{(k)}(\alpha) = 0$ für $k = 0, \ldots, l-1$ und $P^{(l)}(\alpha) \neq 0$.

---

5. Online-Abgabe Mehrere Antworten können richtig sein.

Frage 1

Ein ausgefülltes Sudokugitter gibt eine 9×9 Matrix S mit Einträgen in $\mathbb{Q}$. Welche Aussagen sind korrekt?

- ◯ 45 ist ein Eigenwert von S.
- ◯ $(1, \ldots, 9)^{\mathrm{T}}$ ist ein Eigenvektor.
- ◯ Die Determinante von S ist positiv.
- ◯ Die Determinante von S ist durch 9 teilbar.
- ◯ Die Determinante von S ist durch 5 teilbar.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 2

Betrachte die reelle Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- ◯ Die Eigenwerte von A sind $0, 1$ und 2
- ◯ Für alle p, q, r ist der Eigenraum E_1 von $(0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ aufgespannt
- ◯ 0 ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 0
- ◯ Alle Eigenwerte haben algebraische Vielfachheit 1
- ◯ Für alle p, q, r ist A diagonalisierbar

Frage 3

Betrachte die reelle Matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & p & q \\ 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- ◯ der Eigenwert 1 hat algebraische Vielfachheit 2
- ◯ der Eigenwert 1 hat geometrische Viefachheit 2
- ◯ der Eigenwert 2 hat algebraische Vielfachheit 1
- ◯ der Eigenwert 2 hat geometrische Vielfachheit 1
- ◯ Für alle p, q, r ist B diagonalisierbar

Bitte wenden!

Frage 4

Betrachte die reelle Matrix:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & p & q \\ 0 & 2 & r \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- ◯ 2 ist ein Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 3
- ◯ Die Dimension vom Eigenraum E_2 ist mindestens 2
- ◯ Die geometrische Vielfachheit vom Eigenwert 2 ist $3 - \text{Rang}\left(\begin{smallmatrix} p & q \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right)$
- ◯ Für alle p, q, r ist A diagonalisierbar