D-MATH, D-PHYS, D-CHAB Lineare Algebra II FS 13
Prof. Dr. Giovanni Felder

Serie 4

Abgabe: Am Freitag, der 22. März 2013 in den Übungen.

Einsendeschluss für die Online Aufgabe: Freitag, der 22. März , 11.59 Uhr.

1. Sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum. Seien $f, g \in \mathrm{End}(V)$, $c \in \mathbb{C}$, f^* und g^* die adjungierten Abbildungen. Beweise:

a) $(f+g)^* = f^* + g^*$

b) $(cf)^* = \bar{c} f^*$

c) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$

d) $(f^*)^* = f$

e) $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$ (f invertierbar)

f) $\det f^* = \overline{\det f}$.

2. Sei V ein unitärer Vektorraum. Ein Endomorphismus F heisst *normal*, wenn $FF^* = F^*F$ gilt.

Zeige: Sowohl unitäre als auch selbstadjungierte Endomorphismen sind normal.

3. a) Finde die allgemeine reelle Lösung der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung 3. Ordnung:

$$f^{(3)}(t) - f^{(2)}(t) + f'(t) - f(t) = 0.$$

Reformuliere dazu das Problem in eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung der Form

$$\begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

wobei $f_1 = f, f_2 = f', f_3 = f^{(2)}$

b) Berechnen Sie e^{tA} für $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Hinweis: Vgl. Analysis II Serie 1

Bitte wenden!

4. a) Beweise, dass $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$

b) Sei $A = (a_{ij})$ eine Matrix, so dass das charakteristische Polynom $P_A(\lambda)$ in Linearfaktoren

$$P_A(\lambda) = c \cdot \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$$

zerfällt (die λ_i müssen nicht paarweise verschieden sein) und sei $\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ die Spur von A. Zeige

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Hinweis: Berechne den Koeffizienten von λ^k in $P_A(\lambda)$, mit verschiedenen Methoden, k geschickt gewählt.

Online-Abgabe Mehrere Antworten können richtig sein.

Frage 1

Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an.

◯ Wenn für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$: $x^{\mathrm{T}} A y = x^{\mathrm{T}} B y$, dann ist $A = B$.

◯ Wenn für alle $x \in \mathbb{C}^n$: $x^{\mathrm{T}} A x = x^{\mathrm{T}} B x$, dann ist $A = B$.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 2

Seien A und B folgende Matrizen mit $\lambda \in \mathbb{C}$. Kreuzen sie die richtigen Aussagen an.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- ◯ Der Eigenwert λ zu A hat algebraische Vielfachheit 4.
- ◯ Der Eigenwert λ zu A hat geometrische Vielfachheit 2.
- ◯ Der Eigenwert λ zu B hat algebraische Vielfachheit 2.
- ◯ Der Eigenwert λ zu B hat geometrische Vielfachheit 4.
- ◯ Die Jordan Normalform einer 4×4 Matrix mit einem einzigen Eigenwert ist, bis auf die Ordnung der Blöcke, durch die algebraische und geometrische Vielfachheit dieses Eigenwertes bestimmt.

Frage 3

Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an.

- ◯ Sei A eine diagonalisierbare $n \times n$ Matrix. Dann gibt es bis auf Skalarmultiplikation genau eine invertierbare Matrix P mit: $P^{-1}AP$ diagonal.
- ◯ Seien $A, P \in M(n \times n, K)$, mit $P^{-1}AP$ diagonal. Dann sind die Spalten von P Eigenvektoren von A.
- ◯ $A \in M(n \times n, K)$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn die Summe der Dimensionen der Eigenräume gleich n ist.
- ◯ $A \in M(n \times n, K)$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn die Summe der algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A gleich n ist.
- ◯ Eine Nilpotente Matrix ist nur dann diagonalisierbar wenn sie 0 ist.