Serie 5

Abgabe: Am Donnerstag, der 28. März 2013 vor 16.00 in den Fächli.
Osterferien: das HG schliesst um 17.00! Kein Übungsbetrieb am Freitag.

Einsendeschluss für die Online Aufgabe: Donnerstag, der 28. März , 17.00 Uhr.

1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimme eine orthogonale Matrix $S \in O(3)$ so, dass $S^T AS$ eine Diagonalmatrix ist.

2. Sei $P_n(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynomen vom Grade $\leq n$, und L der Endomorphismus definiert durch:

$$L(P) = \frac{d}{dx}\left[\left(1 - x^2\right)\frac{d}{dx}P\right], \quad P \in P_n(\mathbb{R}).$$

Mit dem Skalarprodukt $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$ wird $P_n(\mathbb{R})$ zu einem euklidischem Vektorraum. Seien die Polynome $P_i, i = 1, \ldots, n$ so definiert: wende das Gram-Schmidt Verfahren auf die Basis $(1, x, \ldots, x^n)$ von $P_n(\mathbb{R})$ an, und normiere die Polynome so, dass sie Norm 1 haben.

a) Prüfe, dass L eine wohldefinierte lineare Abbildung ist.

b) Berechne P_i, für $i = 0, \ldots, 2$.

c) Beweise, dass L selbstadjungiert ist.

d) Beweise, dass die P_i eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von L ist.

Hinweis: Verwende Induktion nach n.

Bemerkung: Die P_i entsprechen bis auf der Normierung den Legendre Polynomen aus Serie 11 des HS2012.

Bitte wenden!

3. Sei V der Vektorraum aller Folgen $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}_{>0}}$ reeller Zahlen mit endlich vielen nicht verschwindenden Gliedern x_i.

a) Zeige, dass $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ ein Skalarprodukt auf V definiert.

b) Sei $W = \mathbb{R}$ mit dem Standardskalarprodukt.Zeige, dass es dann keine zur Additionsabbildung $f\colon V \to W$, $x \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ adjungierte Abbildung gibt.

Als Erinnerung: die zu f adjungierte Abbildung $f^*\colon W \to V$ ist, falls sie existiert, eindeutig definiert durch:

$$\forall\lambda \in W, \forall x \in V, \quad \langle f^*(\lambda), x\rangle_V = \langle \lambda, f(x)\rangle_W.$$

4. Sei A die relle symmetrischen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 500 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeige folgende Aussagen.

a) Sei λ_1 der grösste Eigenwert. Dann ist $500 \leq \lambda_1 \leq 512$, (ohne χ_A zu berechnen). **Zusatzaufgabe:** Finde eine bessere obere Schranke, etwa $\lambda_1 \leq 503$.

b) Für den zweitgrössten Eigenwert λ_2 gilt $\lambda_2 \leq 6$.

Hinweis: Verwenden Sie das Courant min-max-Prinzip und betrachten Sie die Einschränkung des Rayleigh-Quotients auf dem Unterraum $\{0\} \times \mathbb{R}^3$.

c) A hat einen negativen Eigenwert.

Hinweis: Betrachten Sie den Vektor $v = (0, 1, 0, -1)^T$.

Online-Abgabe Mehrere Antworten können richtig sein.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 1

Wir betrachten den unitären Vektorraum $M(2\times 2, \mathbb{C})$ mit Skalarprodukt $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^*)$. Dann bilden folgende Matrizen eine Orthonormalbasis:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

- ◯ Wahr.
- ◯ Falsch.

Frage 2

Welche der folgenden Matrizen sind hermitesch?

- ◯ $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$
- ◯ $\frac{1}{i}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
- ◯ $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}i & -2\\ 2 & i\end{pmatrix}$
- ◯ $\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}$
- ◯ $\begin{pmatrix}1 & 1+i & \frac{2+i}{3}\\ 1-i & 0 & \frac{i}{5}\\ \frac{-i-2}{3} & \frac{-i}{5} & -1\end{pmatrix}$
- ◯ $\begin{pmatrix}\frac{41}{49} & -\frac{12}{49} & -\frac{24}{49}\\ -\frac{12}{49} & \frac{31}{49} & -\frac{36}{49}\\ -\frac{24}{49} & -\frac{36}{49} & -\frac{23}{49}\end{pmatrix}$

Bitte wenden!

Frage 3

Welche der folgenden Matrizen sind unitär?

- ◯ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
- ◯ $\frac{1}{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ◯ $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} i & -2 \\ 2 & i \end{pmatrix}$
- ◯ $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$
- ◯ $\begin{pmatrix} \frac{41}{49} & -\frac{12}{49} & -\frac{24}{49} \\ -\frac{12}{49} & \frac{31}{49} & -\frac{36}{49} \\ -\frac{24}{49} & -\frac{36}{49} & -\frac{23}{49} \end{pmatrix}$