Serie 7

Abgabe: Am Freitag, der 19. April 2013 in den Übungen.

Einsendeschluss für die Online Aufgabe: Freitag, der 19. April , 11.55 Uhr.

1. **a)** Sei A eine hermitesche positiv semidefinite $n \times n$ Matrix (A hermitesch und $\forall v \in \mathbb{C}^n : v^* A v \geq 0$). Zeige, dass für eine beliebige Matrix B auch BAB^* positiv semidefinit ist.

b) Für welche Matrizen B bleibt die Aussage korrekt, wenn 'semidefinit' durch 'definit' ersetzt wird ($\forall v \in \mathbb{C}^n \setminus 0 : v^* A v > 0$) ?

c) Sei C eine beliebige Matrix. Beweise, dass C^*C hermitesch, und positiv semidefinit ist. Finde eine Bedingung für C so, dass C^*C positiv definit ist.

2. **a)** Sei S eine hermitesche positiv semidefinite Matrix, beweise dass es eine eindeutige hermitesche positiv semidefinite Matrix $\sqrt{S}$ mit $S = \sqrt{S}^2$ gibt.

Hinweis: Finde so ein $\sqrt{S}$ für S diagonal.

b) [**Polarzerlegung**] Beweise, dass es zu jeder normalen Matrix A, eine hermitesche positiv semidefinite Matrix R und eine unitäre Matrix U gibt mit: $A = RU = UR$.

Hinweis: Betrachte den Fall A diagonal, und den 1-dimensionalen Fall!

c) Beweise für A invertierbar die Eindeutigkeit der Polarzerlegung.

Hinweis: Zeige zum Beipsiel $R = \sqrt{A^*A}$.

3. Gegeben sind die beiden symmetrischen Matrizen

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme eine *obere Dreiecksmatrix* B mit $B^{\mathrm{T}}B = P$, und berechne B^{-1}.

Bitte wenden!

b) Bestimme

$$\max_{x \in \mathbb{R}^3 - \{0\}} \frac{x^{\mathrm{T}} Q x}{x^{\mathrm{T}} P x}.$$

Hinweis: Setze $x = B^{-1} y$.

4. Gegeben sei die reelle Matrix $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Zeige, dass A orthogonal ist und dass $\det A = 1$ gilt.

b) Bestimme ohne das Charakteristische Polynom von A zu berechnen, die Drehachse und den Drehwinkel der Drehung, welche im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit Standardskalarprodukt bezüglich der Standardbasis durch die Matrix A gegeben ist.

Hinweis: Für den Winkel verwende die Spur von A.

Online-Abgabe Mehrere Antworten können richtig sein.

Frage 1

Betrachte $A = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 4 \end{pmatrix}$. Welche Aussagen sind korrekt?

- ◯ Für $v = (i, 0)^{\mathrm{T}}$ ist $v^* A v = 1$.
- ◯ Die Eigenwerte von A sind strikt positiv.
- ◯ $\forall v \in \mathbb{C}^n \setminus 0, v^* A v > 0$.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 2

Sei A eine normale Matrix, $p \in C[t]$ ein Polynom. Welche Aussagen sind allgemein korrekt?

- ◯ $p(A)^* = p(A^*)$.
- ◯ $A^i(A^*)^j = (A^*)^j A^i$.
- ◯ $p(A)$ ist normal.
- ◯ Jeder Eigenwert λ von A ist auch Eigenwert von $p(A)$.
- ◯ Jeder Eigenvektor v von A ist auch Eigenvektor von $p(A)$.

Frage 3

Seien U, V unitäre $n \times n$ Matrizen, $\lambda = e^{2\pi i \vartheta}$, $\vartheta \in \mathbb{R}$. Welche Aussagen sind allgemein korrekt?

- ◯ $U + V$ unitär.
- ◯ λU ist unitär.
- ◯ U^{-1} unitär.
- ◯ UV unitär.
- ◯ $U(n)$ ist ein Untervektorraum von $M(n \times n, \mathbb{C})$.

Frage 4

Seien A, B positiv definite Matrizen. Welche Aussagen sind im Allgemeinen korrekt?

- ◯ $A + B$ ist positiv definit.
- ◯ $A - B$ ist positiv definit.
- ◯ λA ist positiv definit, für $\mathrm{Re}\lambda > 0$.
- ◯ λA ist positiv definit, für $0 < \lambda \in \mathbb{R}$.