Serie 9

Abgabe: Am Freitag, der 3. Mai 2013 in den Übungen.

Einsendeschluss für die Online Aufgabe: Freitag, der 3. April , 11.55 Uhr.

1. Berechne die Minimalpolynome folgender Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. **a)** Berechne den Rest der Polynomdivision von t^{10} durch $\chi_A(t)$, das charakteristische Polynom der Matrix:

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Setze die Eigenwerte von A in die Polynomdivision

$$t^{10} = q(t)\chi_A(t) + r(t)$$

ein, um die Koeffizienten des Rests zu finden.

b) Migros und Coop streiten sich in einer Stadt mit 100 000 Einwohner um die Kunden. Jeden Monat verliert Migros 10 % seiner Kunden an Coop und gewinnt 10 % der Kunden von Coop. Anfänglich hat Migros 60 000 Kunden und Coop 40 000 Kunden. Wie sind die Kunden verteilt nach 10 Monaten?

Hinweis: Verwende den Satz von Cayley-Hamilton.

Bitte wenden!

3. Sei K ein Körper mit $\operatorname{char} K \neq 2$ und V ein K-Vektorraum. Beweise, dass jede Bilinearform sich eindeutig als Summe einer symmetrischen und einer alternierenden Bilinearform darstellen lässt.

4. **a)** Berechne die Signatur der Bilinearformen die durch folgende Matrizen gegeben sind:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

b) Zeichne für symmetrische Bilinearformen $s(\cdot,\cdot)$ auf $\mathbb{R}^3$ aller möglichen Signaturen, die Quadrik

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid s(x,x) = 1 \right\}.$$

Man überlege sich welche Quadriken man durch variieren der Hauptachsen als Grenzwert welcher anderen bekommt.

Mit Mathematica oder anderer Software lassen sich schöne Bilder machen. In Mathematica kann man `ContourPlot3D` verwenden.

Online-Abgabe. Mehrere Antworten können richtig sein.

Frage 1

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Das Minimalpolynom von A ist:

- ○ ein Teiler von $(t-3)^3$.
- ○ $(t-3)^3$.
- ○ $(t-3)^2$.
- ○ $(t-3)$.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 2

Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen über Haupt- und Eigenräume von A sind korrekt?

- ◯ $E_2(A) = \mathrm{Span}(e_1, e_2)$.
- ◯ $H_2(A) = \mathrm{Span}(e_1, e_2)$.
- ◯ $H_4(A) = \mathrm{Span}(e_3, e_4)$.
- ◯ $(2, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}} \in E_4(A)$.

Frage 3

Sei s_A folgende Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$: $s_A(x, y) = x^{\mathrm{T}} A y$, wo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- ◯ s_A ist eine nicht-ausgeartete Bilinearform.
- ◯ Die Signatur von s_A ist $(1, 1)$.
- ◯ Die Signatur von s_A ist $(2, 0)$.
- ◯ Die Signatur von s_A ist $(0, 2)$.

Bitte wenden!

Frage 4

Sei s_B folgende Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$: $s_B(x, y) = x^{\mathrm{T}} B y$, wo

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

- ◯ s_B ist eine nicht-ausgeartete Bilinearform.
- ◯ Die Signatur von s_B ist $(1, 1)$.
- ◯ Die Signatur von s_B ist $(1, 0)$.
- ◯ Die Signatur von s_B ist $(0, 1)$.

Frage 5

Sei s_C folgende Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$: $s_C(x, y) = x^{\mathrm{T}} C y$. Wo, mit $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

- ◯ s_C ist genau dann ausgeartet, wenn $\det C = 0$.
- ◯ Sind $a, c > 0$ und $\det C \neq 0$, dann ist die Signatur $(2, 0)$.
- ◯ Ist $\det C > 0$, und $\operatorname{tr} C > 0$, dann ist die Signatur $(2, 0)$.
- ◯ Ist die Spur von C strikt negativ dann ist die Signatur (r, s) mit $s \geq 1$.