Korrekturen im Skript "Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik"

Seite 23, Formel (2.62) sollte sein

$$A, B \text{ sind unabhängig} \iff \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B).$$

Seite 55, Bemerkung nach Beispiel 3.20:

Die Umkehrung von Satz 3.10, viii) (nicht vi)) ist falsch.

Seite 55, Ein neues Beispiel 3.21 wurde hinzugefügt:

Bei der n-dimensionalen Normalverteilung (siehe Beispiel 3.18) können wir die Kovarianzen $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j)$ mit Hilfe der Regeln iv) und v) von Satz 3.10 sofort berechnen, weil $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0$ für $i \neq j$ und $\mathrm{cov}(X_i, X_i) = \mathrm{var}(X_i) = 1$. Man erhält $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = (B^\top B)_{ij} = \Sigma_{ij}$.

Wenn $\mathbf{Y}$ eine n-dimensionale Normalverteilung hat und $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = 0$ für $i \neq j$, dann zerfällt die gemeinsame Dichte in ein Produkt und damit sind die $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ unabhängig. Die Umkehrung von Satz 3.10, viii) gilt daher bei gemeinsamer Normalverteilung.

Seite 58. Die **Anwendung in der Analysis** wurde neu formuliert, um Fehler zu korrigieren und den Inhalt verständlicher zu machen. Der Text lautet neu:

Wir verwenden das Gesetz der grossen Zahlen, um den **Satz von Weierstrass** zu beweisen, dass die Menge der Polynome dicht ist in $C[0,1]$, versehen mit der Supremums-Norm. Die **Bernsteinpolynome** vom Grad n auf $[0,1]$ sind definiert als

$$B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Eine stetige Funktion f auf $[0,1]$ kann durch die folgende Linearkombination der Bernsteinpolynome approximiert werden

$$B_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x).$$

Weshalb ist $B_n^f(x) \approx f(x)$? Eine probabilistische Begründung beruht darauf, dass $B_{n,k} = \mathbb{P}(S_n = k)$, wobei S_n die Anzahl Erfolge bei n Würfen mit Erfolgsparameter x bezeichnet. Also ist $B_n^f(x) = \mathbb{E}(f(\frac{S_n}{n}))$. Nach dem Gesetz der grossen Zahlen ist aber $\frac{S_n}{n} \approx x$ und f ist stetig.

Genauer gilt:

$$\begin{aligned}|B_n^f(x) - f(x)| &= \left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right)\right| \leq \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right) \\ &\leq 2\sup_u |f(u)|\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right) + \sup_{|u-v|\leq\delta} |f(u) - f(v)|\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \leq \delta\right).\end{aligned}$$

Wegen der gleichmässigen Stetigkeit von f ist der zweite Term rechts $\leq \varepsilon$ wenn δ klein genug ist. Der erste Term rechts ist wegen der Chebyshev-Ungleichung beschränkt durch

$$2\sup_u |f(u)| \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{2n\delta^2} \sup_u |f(u)| \leq \varepsilon,$$

wenn n gross genug ist. Damit haben wir gezeigt, dass

$$\sup_x |B_n^f(x) - f(x)| \longrightarrow 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Seite 83: Kleine Änderungen bei Lemma 6.1: $\mathbf{X}$ statt $\mathbf{x}$, wenn es sich um Zufallsvariable und nicht um den realisierten Wert handelt, monoton wachsend statt fallend.

Der P-Wert hängt ab von $\mathbf{X}$ und ist daher eine Zufallsvariable. Wie sieht seine Verteilung aus ?

Lemma 6.1 *Sei $\pi(\mathbf{X}) = \inf\{\alpha; \varphi_\alpha(\mathbf{X}) = 1\}$ der P-Wert für die Tests (φ_α) mit Niveau α $(0 \leq \alpha \leq 1)$. Wenn $\theta \in \Theta_0$, dann gilt $\mathbb{P}_\theta(\pi(\mathbf{X}) \leq u) \leq u$. Wenn $\mathbb{P}_\theta(\varphi_\alpha(\mathbf{X}) = 1) = \alpha$ für alle α, dann gilt $\mathbb{P}_\theta(\pi(\mathbf{X}) \leq u) = u$, d.h. der P-Wert ist uniform verteilt.*

Beweis: Weil $\alpha \mapsto \varphi_\alpha(\mathbf{x})$ monoton wachsend ist, impliziert $\pi(\mathbf{x}) < u$, dass $\varphi_u(\mathbf{x}) = 1$. Daraus folgt

$$\mathbb{P}_\theta(\pi(\mathbf{X}) < u) \leq \mathbb{P}(\varphi_u(\mathbf{X}) = 1) \leq u.$$

Weil $\mathbb{P}(_\theta(\pi(\mathbf{X}) \leq u)$ rechtsstetig und monoton wachsend ist, folgt die erste Behauptung. Ferner folgt aus $\varphi_u(\mathbf{x}) = 1$, dass $\pi(\mathbf{x}) \leq u$, also auf Grund der zusätzlichen Bedingung an $\mathbb{P}_\theta$ dass $u = \mathbb{P}_\theta(\varphi_u(\mathbf{X}) = 1) \leq \mathbb{P}_\theta(\pi(\mathbf{X}) \leq u)$. $\square$

Seite 83, 2. Zeile in Abschnitt 6.3.2: ... die Alternative $\{\theta_1\}$ (nicht $\{\theta_0\}$).