Serie 5

Abgabe : Am Montag, den 25. März in der Übungsstunde.
Einsendeschluss für die Online Aufgabe: Montag, den 25.03.2013, 10:00 Uhr

1. Zeige: Falls $0 < \lambda < e$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(\frac{n}{\lambda})^n} = 0.$$

Falls $e < \lambda$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(\frac{n}{\lambda})^n} = +\infty.$$

2. Berechne fünf der folgenden Integrale. An der Prüfung wird verlangt, dass ihr alle Integrale von dieser Art lösen könnt.

a) $\int_0^4 (x^3 - 5x^2 + 1.5x - 10)\, dx$;

b) $\int_1^4 \frac{1-x^2}{x}\, dx$;

c) $\int_1^9 \sqrt{x}\,(2-x)\, dx$.

d) $\int_e^{e^2} \frac{\log^2 x}{x}\, dx$;

e) $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$;

f) $\int_0^{\pi/2} \sin(3x - \pi/4)\, dx$;

g) $\int \log x\, dx$;

h) $\int_0^1 t^2 \cdot \cosh(2t)\, dt$;

i) $\int \frac{4x-2}{x^2-2x-63} dx$.

j) $\int_0^{1/2} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

k) $\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2 x}{2\cos^2 x} dx$;

l) $\int e^{2x} \cdot \cos(x) dx$;

m) $\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{t})\, dt$;

n) $\int_0^{\log(3)} e^{3t-e^t}\, dt$;

o) $\int \frac{4x+8}{x^4-16}\, dx$;

p) $\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\, dx$.

3. Seien f, f_k stetige Funktionen auf $[a, b]$ mit der Eigenschaft, dass $f_k \to f$, gleichmässig konvergiert falls $k \to \infty$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Bitte wenden!

Schliesse daraus, dass Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzkreises gliedweise integriert werden können.

4. Online-Abgabe

Frage 1

Sei f die Funktion mit $f(x) = \int_{\sin x}^{0} e^{t^2} dt$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung?

- ◯ $f'(x) = -\cos(x) e^{\sin(x)^2}$
- ◯ $f'(x) = -2\sin(x) e^{\sin(x)^2}$
- ◯ $f'(x) = 1 - e^{\sin(x)^2}$
- ◯ Keine Antwort ist korrekt.

Frage 2

Ist $f(x) = e^{-\frac{x}{3}}$ eine Lösung der Differentialgleichung $3y'' + 4y' + y = 0$?

- ◯ Nein.
- ◯ Ja.

Frage 3

Angenommen $f(x), g(x)$ erfüllen die Differentialgleichung $3y''+4y'+y = 0$. Welche der folgenden Funktionen ist (sind) wieder eine Lösung der Differentialgleichung. Hier bezeichnen C_1 und C_2 beliebige Konstante.

- ◯ $f(x)^{C_1}$
- ◯ $C_1 f(x) + C_2 g(x)$
- ◯ $f(x)g(x)$
- ◯ $\frac{f(x)}{g(x)}$.