Serie 7

Abgabe : Am Montag, den 22. April in der Übungsstunde.
Einsendeschluss für die Online Aufgabe: Montag, den 22.04.2013, 10:00 Uhr

1. Bestimme die allgemeine (reelle) Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 7y^{(2)} - 6y^{(1)} + 2y = 0.$$

2. **a)** Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{y} - 3\dot{y} - 4y = t + t \cdot e^{-2t} \ .$$

b) Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{y} - y = \cosh t$$

sowie die Lösung, welche die Anfangsbedingungen $y(0) = 1, y'(0) = -1$ erfüllt.

3. Finde die Lösungen $y(x)$ der folgenden *separierbaren Differentialgleichungen*:

a) $y' = y^2 - 1$;

b) $y' - y = \log(x) \cdot y + 1 + \log(x)$ zur Anfangsbedingung $y(2) = 3$;

c) $y' = e^{x+y}$;

d) $y' = \dfrac{e^{x+y} - e^{x-y}}{\cosh(y)}$;

e) $y' = \cos(2x) y \log y$.

4. (Basisprüfung WS06 D-ITET)

a) Bestimme die Funktion $y = y(x) > 0$, die für $x > 0$ die Differentialgleichung

$$y' = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$$

löst, sowie die Bedingung $y'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ erfüllt.

Hinweis: Substituiere $u(x) := \frac{y(x)}{x}$.

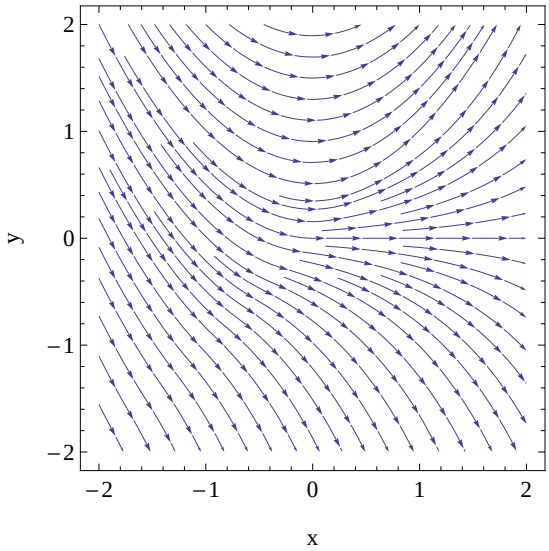
b) Wie verhalten sich $y(x)$ und $y'(x)$, wenn x gegen die untere oder obere Grenze des maximalen Definitionsintervalls von $y = y(x)$ strebt? Skizziere den Graphen von $y = y(x)$.

Bitte wenden!

5. Online-Abgabe

Frage 1

Welche der folgenden Differentialgleichungen hat das gegebene Richtungsfeld?



- ◯ $y' = x + y$
- ◯ $y' = x - y$
- ◯ $y' = \min\{x, y\}$
- ◯ $y' = \max\{x, y\}$
- ◯ $y' = |y| - |x|$

Siehe nächstes Blatt!

Frage 2

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Bestimme welche Aussage(n) gilt (gelten).

- ◯ f ist stetig in $(0,0)$.
- ◯ Für jeden Vektor (α, β) ist
$$t \mapsto f(t\alpha, t\beta)$$
stetig in 0. (Dies ist die Einschränkung von f auf die durch (α, β) erzeugte Gerade.)
- ◯ Die Funktion
$$t \mapsto f(t, t^2)$$
ist stetig in 0. (Dies ist die Einschränkung von f auf eine Parabel.)

Frage 3

Die (2.Ordnung) Differentialgleichung $\ddot{x} + x = 0$ kann als (1. Ordnung) Differentialgleichungssystem $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$ geschrieben werden, weil $\ddot{x} = -\dot{y} = -x$ gilt.
Welche ist die äquivalente (2. Ordnung) Differentialgleichung für das (1.Ordnung) Differentialgleichungssystem $\begin{cases} \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\dot{x} \\ \dot{y} = \frac{1}{2}y + x \end{cases}$?

- ◯ $\ddot{x} - \dot{x} + \frac{1}{4}x = 0$
- ◯ $\ddot{x} - \dot{x} + \frac{5}{4}x = 0$
- ◯ $\ddot{x} + \frac{5}{4}x = 0$