Serie 8

Abgabe : Am Montag, den 29. April in der Übungsstunde.
Einsendeschluss für die Online Aufgabe: Montag, den 29.04.2013, 10:00 Uhr

1. Aus einer Funktion *einer* Variablen $f : r \mapsto f(r)$ entsteht durch Einsetzen von $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ die Funktion von drei Variablen

$$\tilde{f} : (x, y, z) \longmapsto f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) .$$

a) Zeige, dass

$$\mathbf{grad}\, \tilde{f} = \frac{f'(r)}{r} \cdot \mathbf{r} \ , \ \text{ wobei } \ \mathbf{r} = (x, y, z) \ .$$

b) Bestimme $f(r)$ so, dass

$$\mathbf{grad}\, \tilde{f} = \frac{\mathbf{r}}{r^5} \ \text{ und } \ f(1) = 0 \, .$$

2. Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, und nehmen wir an dass $\frac{\partial h}{\partial y}$ stetig ist. Ausserdem, definiere für jedes $y \in \mathbb{R}$

$$F(y) := \int_0^1 h(s, y)\, ds.$$

Zeige, dass F differenzierbar ist und

$$F'(y) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial y}(s, y)\, ds.$$

3. **a)** Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktion

$$f(t) = u(e^t, t^2).$$

Drücken Sie das Resultat durch die partiellen Ableitungen u_x, u_y, der Funktion u aus, wobei $x(t) = e^t$ und $y(t) = t^2$.

b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$g(x) = \int_0^x \sin(xt^2) dt.$$

Hinweis: Schreiben Sie zunächst $g(x)$ mit Hilfe der Funktion $f(x, y) = \int_0^x \sin(yt^2) dt$ um und nutzen Sie dann die Kettenregel.

Bitte wenden!

4. (Aus dem 1. Vordiplom, D-INFK, FS10)

Sei $f(x,y) = e^{x^2} \cdot (x+y)$. Bestimme $c \in \mathbb{R}$ so dass der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c \end{pmatrix}$$

tangential an den Graphen

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, y, f(x,y)), (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

im Punkt $(1, 1, z)$ liegt.

5. Frage 1

Gegeben ist die Funktion $f\colon (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + z^2$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ◯ Die Niveauflächen von f sind Oberflächen von Kugeln mit Mittelpunkt O.
- ◯ Die Niveauflächen von f sind Ebenen senkrecht zum Vektor $(1, 2, 3)$.
- ◯ Die Niveauflächen von f sind Oberflächen von Ellipsoiden mit Mittelpunkt O.

Frage 2

Sei $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) := (\cos(x))^y$. Dann gilt für die partielle Ableitungen von f:

- ◯ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -y\tan(x)(\cos(x))^y \sin(x)$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (-\sin(x))^y$.
- ◯ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -y\tan(x)(\cos(x))^y$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \log(\cos(x))(\cos(x))^y$.
- ◯ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -y(\cos(x))^{y-1} \sin(x)$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \log(\cos(x))(\cos(x))^y$.

Frage 3

Wie lautet der Gradient der Funktion $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto xy$?

- ◯ $\nabla f(x,y) = (x,y)$
- ◯ $\nabla f(x,y) = x + y$
- ◯ $\nabla f(x,y) = y$
- ◯ $\nabla f(x,y) = (0,0)$
- ◯ $\nabla f(x,y) = (y,x)$