Serie 9

Abgabe : Am Montag, den 13. Mai in der Übungsstunde.
Einsendeschluss für die Online Aufgabe: Montag, den 13.05.2013, 10:00 Uhr

1. Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = xy$.

a) Bestimme die Richtung größter Steigung am Punkt $(x_0, y_0) = (2, 1)$ sowie die Größe dieser Steigung.

b) Bestimme für einen beliebigen Punkt (x_0, y_0) die Richtung größter Steigung sowie die Größe dieser Steigung.

c) Skizziere in der $x - y$–Ebene das Vektorfeld, das jedem Punkt (x, y) die größte Steigung zuordnet.

2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) := x^3 + y^3 - 3xy$. Finde die kritischen Punkte von f und entscheide, ob es sich dabei um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt.

3. Berechne alle kritischen Punkte der Funktion $f(x, y) := x\,y^2 - \cos x$ und bestimme, sofern sie nicht entartet sind, deren Typ .

4. Man berechne die Taylorpolynome ersten und zweiten Grades der folgenden Funktionen um den angegebenen Punkt und approximiere damit den Funktionswert an den angegebenen Approximationspunkten. Vergleiche das Resultat mit den tatsächlichen Funktionswerten.

a) $f(x, y) = e^x \sin y$ um $P = (0, \pi/2)$.
Approximationspunkt: $(-1/10, \pi/2 + 1/4)$.

b) $f(x, y) = e^{x/y}$ um $P = (1, 1)$,
Approximationspunkt: $(5/4, 1/2)$.

c) Wie genau ist die Approximation der linearen Taylorentwicklung aus a) auf dem Ball $B_{1/4}(0, \pi/2)$? Bestimme eine Schranke für den entstehenden Fehler.

d) Bestimme einen Radius r, so dass der Approximationsfehler der linearen Taylorentwicklung auf dem Ball $B_r(0, \pi/2)$ höchstens 10^{-4} beträgt.

Bitte wenden!

5. Frage 1

Sei L eine Niveaulinie einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, und sei z_0 ein regulärer Punkt von L mit Gradient $\nabla f(z_0)$.

- ◯ Der Gradient ist parallel zur Tangente an L in z_0.
- ◯ Der Gradient ist nie parallel zur Tangente, aber alle anderen Richtungen sind möglich.
- ◯ Der Gradient und die Tangente stehen in keiner Beziehung.
- ◯ Der Gradient steht senkrecht auf der Tangente.

Frage 2

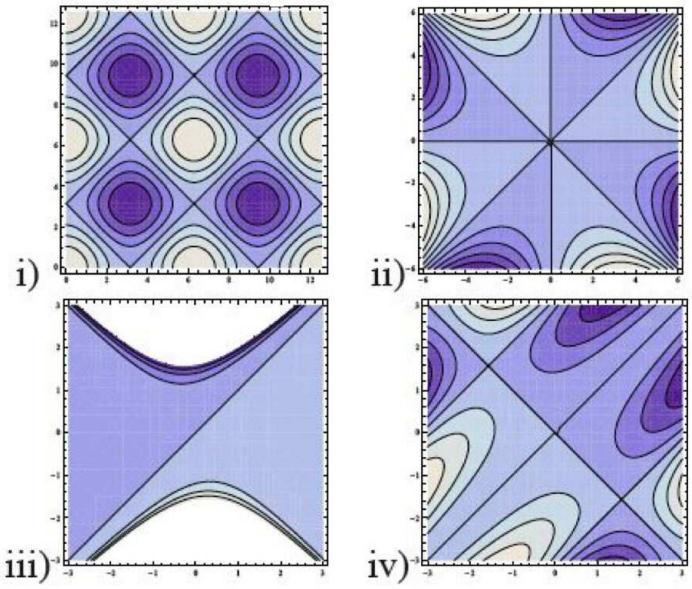
Welche der folgenden Aussagen über die Niveaulinien einer C^1-Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist korrekt?

- ◯ Eine Niveaulinie kann sich nie selbst schneiden.
- ◯ Niveaulinien zu verschiedenen Niveaus können sich schneiden, aber nur in singulären Punkten.
- ◯ Jeder Punkt liegt auf genau einer Niveaulinie.
- ◯ Jede Niveaulinie geht durch genau einen Punkt.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 3

Gegeben sind die Niveaulinien



und die Funktionen

a) $f(x,y) = \sin(x-y)(-x^2+y^2)$,

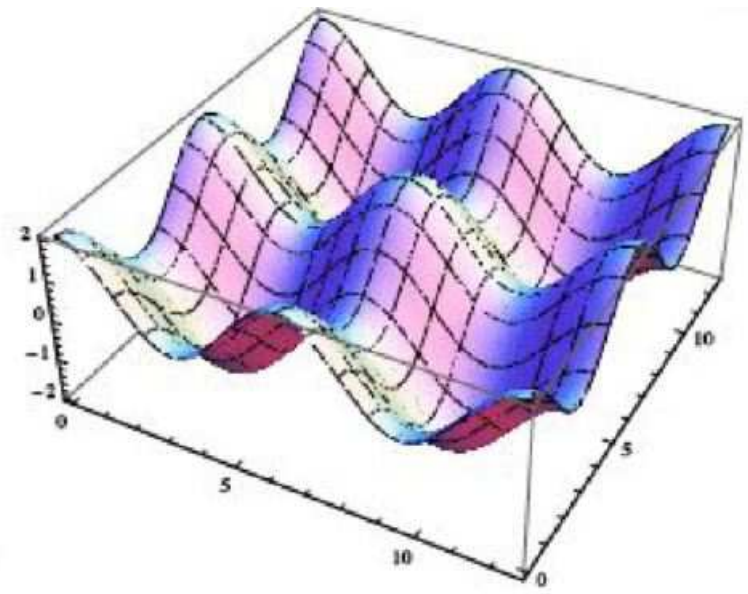
b) $f(x,y) = (x-y)e^{-x^2+y^2}$,

c) $f(x,y) = \cos(x) + \cos(y)$,

d) $f(x,y) = (x^2-y^2)xy$.

Welche Niveaulinien und welche Funktion passen zu diesem Graphen?

Bitte wenden!



○ i)

○ ii)

○ iii)

○ iv)

○ a)

○ b)

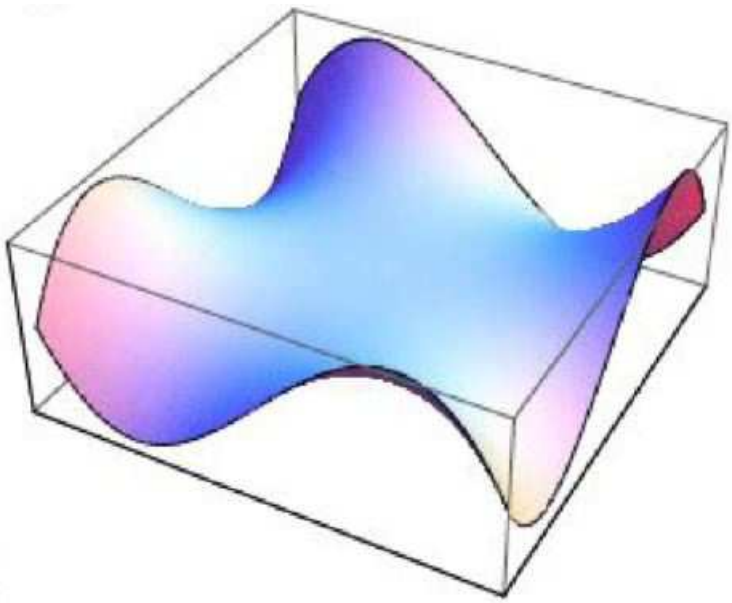
○ c)

○ d)

Siehe nächstes Blatt!

Frage 4

Welche der vorigen Niveaulinien und welche Funktion passen zu diesem Graphen?



- ○ i)
- ○ ii)
- ○ iii)
- ○ iv)
- ○ a)
- ○ b)
- ○ c)
- ○ d)