Serie 2

Abgabe : Am Montag, den 4. März in der Übungsstunde.
Einsendeschluss für die Online Aufgabe: Montag, den 4.3.2013, 10:00 Uhr

1. **a)** Zeige, dass die Funktion

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

im Interval $(-1, 1)$ die konvergente Potenzreihendarstellung

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

besitzt.

Hinweis: betrachte die Ableitung von arctan.

b) (Fakultativ) Die Reihe konvergiert (nicht absolut) für $x = \pm 1$. Schliesse daraus

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \cdots .$$

2. **a)** Betrachte die folgende Funktion

$$f : [0; 10] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Existiert das Riemannschen Integral $\int_0^{10} f(x)\, dx$? Man bestimme im Fall einer positiven Antwort den Wert des Integrals.

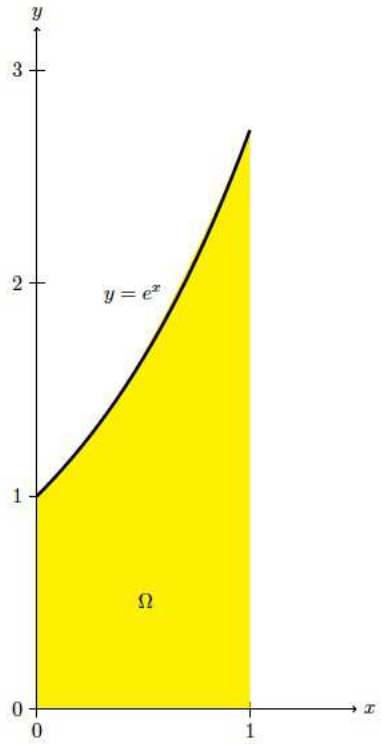
b) Betrachte die folgende Funktion

$$g : [0; 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeige: g ist nicht auf $[0, 1]$ Riemann integrierbar.

Bitte wenden!

3. Berechne mit Hilfe der Riemann-Summen die Fläche Ω.



4. Online-Abgabe

Frage 1

Welche der folgenden Funktionen stellt die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$ dar?

- ◯ $(1-x)^{-1}$
- ◯ $(1-x)^{-2}$
- ◯ $(1+x)^{-2}$
- ◯ $x \cdot (1-x)^{-2}$
- ◯ $x \cdot (1-x)^{-3}$

Siehe nächstes Blatt!

Frage 2

Welche der folgenden Implikationen für eine Funktion f ist richtig?

- ◯ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist integrierbar.
- ◯ f ist integrierbar $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig.
- ◯ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist integrierbar.
- ◯ f ist integrierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar.

Frage 3

Die durch eine punktförmige Lichtquelle verursachte Beleuchtungsstärke nimmt mit dem Quadrat des Abstandes zwischen Ausgangspunkt und Beobachtungspunkt ab. Wo befindet sich der dunkelste Punkt x_0 auf der Verbindungsstrecke zwischen zwei zehn Meter voneinander entfernten, punktförmigen Lichtquellen A (bei $x = 0$ Meter) und B (bei $x = 10$ Meter), falls B viermal so stark ist wie A?

- ◯ $x_0 = \frac{10}{1+\sqrt{4}}$
- ◯ $x_0 = \frac{10}{3}$
- ◯ $x_0 = 2$
- ◯ $x_0 = \frac{10}{1+\sqrt[3]{4}}$
- ◯ $x_0 = \frac{10}{1+\sqrt[3]{2}}$