Serie 3

Abgabe : Am Montag, den 11. März in der Übungsstunde.
Einsendeschluss für die Online Aufgabe: Montag, den 11.03.2013, 10:00 Uhr

1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann Integrabel. Zeige

a) f ist beschränkt, i.e. $\exists\, M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M$ für alle $x \in [a, b]$.

b) $\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$.

c) falls $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq M(b - a).$$

2. Angenommen $a < b$ sind zwei reelle Zahlen. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann Integrabel mit den folgenden Eigenschaften:

1. f ist stetig,
2. $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$,
3. $\int_a^b f(x)\, dx = 0$.

Zeige, dass $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$.

3. Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \int_e^x \sqrt{\ln^2 t - 1}\, dt$$

und bestimmen Sie die Bogenlänge des Graphen von f über das Intervall $[e, e^3]$.
Hinweis: Die Bogenlänge L des Graphen von einer Funktion $f(x)$ über das Intervall $[a, b]$ ist gegeben durch

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Bitte wenden!

4. Online-Abgabe

Frage 1

Seien F, G Stammfunktionen von f, $g : (a, b) \to \mathbb{R}$. Welche der Aussagen gilt?

- ◯ $F + G$ ist eine Stammfunktion von $f + g$.
- ◯ FG ist eine Stammfunktion von fg.
- ◯ Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $F + c$ eine Stammfunktion von f.
- ◯ FG ist eine Stammfunktion von $fG + Fg$.

Frage 2

Welche der Aussagen gilt?

- ◯ Eine Stammfunktion ist stetig.
- ◯ Eine Stammfunktion ist zweimal differenzierbar.
- ◯ $x \mapsto 1/x$ hat auf $(-5, -1)$ eine Stammfunktion.

Frage 3

Eine Stammfunktion von $x \mapsto \sqrt{x}\,(1 - x)$ ist

- ◯ $2\sqrt{x^3} - \frac{2}{3}\sqrt{x^5}$
- ◯ $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{5}\sqrt{x^5}$
- ◯ $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$
- ◯ $x\,(1 - \sqrt{x})$

Frage 4

Sei f die Funktion mit $f(x) = \int_3^x \sin(t)dt$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung?

- ◯ $f'(x) = \cos(x) - \cos(3)$
- ◯ $f'(x) = \sin(x) - \sin(3)$
- ◯ $f'(x) = \cos(x)$
- ◯ $f'(x) = \sin(x)$
- ◯ Keine Antwort ist korrekt.